$$\int_{\text{19 июня 2023}}^{\text{28 июня 2023}} \left(\begin{array}{c} \text{Московские сборы} \\ \text{секция математики} \end{array} \right) \mathrm{d}t$$

Немного о структуре

Материалы разбиты по группам, в пределах каждой группы отсортированы по темам. Отдельно приведены анонсы спецкурсов.

Материалы, общие для нескольких групп, дублируются.

Оглавление

Глава 1

9-1 (9-1)

Алгебра

Геометрия

Комбинаторика

Симметрические многочлены

Определение. Многочлен от n переменных называется *симметрическим,* если он не меняется при любых перестановках его переменных.

Примеры симметрических многочленов:

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k\,; \quad x_1x_2\ldots x_n\,; \quad (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2\ldots(x_{n-1}-x_n)^2\,.$$

Определение. *Элементарными симметрическими многочленами* называются многочлены σ_k:

$$\sigma_k = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}\,.$$

1. Выразите через элементарные симметрические многочлены:
(а) $(a+b)(b+c)(a+c)$; **(б)** $(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2$;
(в) $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$.

Основная теорема о симметрических многочленах. Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить как многочлен от элементарных симметрических многочленов.

Определение. Говорят, что упорядоченный набор $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ мажорирует набор $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$, если существует такое индекс i, для которого верно $\alpha_i > \beta_i$ и $\alpha_j = \beta_j$ для $j < i$.

Таким образом мы можем упорядочить множество строк длины n. Такой порядок называется *лексикографическим.*

2. Пусть дан симметрический многочлен от n переменных $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Рассмотрим все его мономы. Назовем моном $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ *старшим,* если упорядоченный набор показателей $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ мажорирует упорядоченные наборы показателей остальных мономов относительно лексикографического порядка.
(а) Докажите, что старший моном произведения двух многочленов равен произведению старших мономов сомножителей.
(б) Докажите, что для любого монома $q = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n$, существуют такие неотрицательные числа $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$, что старший моном многочлена $\sigma_1^{\beta_1}\sigma_2^{\beta_2}\ldots\sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с q, причем числа определены однозначно.
(в) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

3. Дан многочлен $P_n(x)$ степени n с рациональными коэффициентами. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_n$ — его корни (возможно, комплексные). Также дан симметрический многочлен $Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что число $Q(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ рационально.

4. **Важная задача.** Рассмотрим уравнение $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Пусть a, b, c — его корни (возможно, комплексные, не обязательно различные).

(а) Докажите, что $(a-b)^2(b-c)^2(a-c)^2 = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2$.

(б) Найдите необходимое и достаточное условие на коэффициенты p, q, r, при котором числа a, b, c вещественные.

(в) Найти необходимое и достаточное условие на коэффициенты p, q, r, при котором числа a, b, c вещественные и неотрицательные.

5. Многочлен $x^{1000} + y^{1000}$ выразили через элементарные симметрические как $P(x + y, xy)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена P.

6. **(а)** Иван Александрович загадал три числа, после чего сообщил Виктору Дмитриевичу их сумму, сумму квадратов и сумму кубов. Сможет ли Виктор Дмитриевич восстановить исходные числа?

(б) А Андрею Константиновичу Иван Александрович сообщил сумму чисел, сумму квадратов и сумму четвёртых степеней. Сможет ли Андрей Константинович восстановить исходные числа?

(в) А если Иван Александрович загадает n чисел и сообщит их сумму, сумму их квадратов, сумму кубов, ..., сумму n-х степеней?

pqr-метод

Определение. Тройку действительных чисел (p, q, r) будем называть *допустимой,* если корни a, b, c ассоциированного с ними уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ действительные и неотрицательные (см. задачу 4c из предыдущего листика).

1. **(а) Лемма о r.** Пусть для заданных $p = p_0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно r такое, что тройка (p_0, q_0, r) допустима. Докажите, что
   - для минимального r такого, что тройка (p_0, q_0, r) допустима, в соответствующей тройке a, b, c либо есть два равных числа, либо одно из чисел равно 0;
   - для максимального r такого, что тройка (p_0, q_0, r) допустима, в соответствующей тройке a, b, c есть два равных числа.

   (б) Лемма о q. Пусть для заданных $p = p_0$ и $r = r_0$ существует хотя бы одно q такое, что тройка (p_0, q, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального q такого, что тройка (p_0, q, r_0) допустима, в соответствующей тройке a, b, c есть два равных числа.

   (в) Лемма о p. Пусть для заданных $r = r_0 > 0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно p такое, что тройка (p, q_0, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального p такого, что тройка (p, q_0, r_0) допустима, в соответствующей тройке a, b, c есть два равных числа. Останется ли утверждение верным, если $r_0 = 0$?

С помощью этих лемм мы получаем мощный аппарат для решения неравенств, называемый *pqr-методом*[1]. Действительно, пусть у нас есть неравенство, записываемое в виде $P(a, b, c) \geqslant 0$, где P — симметрический многочлен. Выражая его в терминах элементарных симметрических многочленов p, q, r, мы получим новое неравенство, сводимое к тривиальному частному случаю.

Пример. Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$ при $a, b, c \geqslant 0$.

Решение. Перепишем исходное неравенство в терминах p, q, r: $p^2 - 2q \geqslant q$. Зафиксируем, к примеру, значения $p = p_0$ и $r = r_0$. Теперь надо доказать неравенство $3q \leqslant p_0^2$. Заметим, что если мы докажем неравенство для максимального q, то оно будет верно для всех q. По лемме о q, его максимальное значение достигается, когда какие-нибудь из переменных a, b, c равны. Без ограничения общности, $a = b = x, c = z$. Поскольку неравенство $3q \leqslant p_0^2$ равносильно исходному, то после подстановки в исходное неравенство получим $2x^2 + z^2 \geqslant x^2 + 2xz \Leftrightarrow (x - z)^2 \geqslant 0$, что очевидно верно.

2. Для неотрицательных чисел a, b, c верно, что $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ca)\,.$$

[1] Этот метод также известен под именем uvw. Отличие заключается лишь в переобозначении $p = 3u$, $q = 3v^2$, $r = w^3$.

3. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{9 - ab} + \frac{1}{9 - ac} + \frac{1}{9 - bc} \leqslant \frac{3}{8}\,.$$

4. *(USA TST, 2001)* Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$ab + bc + ac - abc \leqslant 2\,.$$

5. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что

$$a^3(a - b)(a - c) + b^3(b - a)(b - c) + c^3(c - a)(c - b) \geqslant 0\,.$$

6. Для неотрицательных чисел a, b, c верно, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Докажите, что

$$2(a + b + c - 2)^2 + (ab + bc + ac)(2 + 3a + 3b + 3c) \geqslant 35\,.$$

7. Известно, что $a, b, c \geqslant 1$ и $a + b + c = 9$. Докажите, что

$$\sqrt{ab + bc + ac} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\,.$$

8. Известно, что a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 6\left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b}\right)\,.$$

Корни из единицы

Напоминание. Все комплексные числа, кроме 0, представимы в *тригонометрической форме:* $z = r \cdot \big(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\big)$. Вещественные числа φ и $r > 0$ называются *аргументом* и *модулем* комплексного числа z соответственно. Величина φ определяется с точностью до прибавления $2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Модуль числа z равен расстоянию между точками 0 и z на комплексной плоскости, аргумент равен направленному углу между положительным направлением вещественной оси и вектором с началом в 0 и концом в z.

Числа в тригонометрической форме очень удобно умножать:

$$r_1\big(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1)\big) \cdot r_2\big(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2)\big) = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Иначе говоря, *при перемножении модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Определение. *Корнями n-й степени из единицы* называются числа w: $w^n = 1$. Очевидно, что эти корни имеют вид $w_k = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi k}{n})$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Определение. Корень w_k n-й степени из единицы называется *примитивным,* если НОД$(k, n) = 1$.

1. Докажите, что корень w n-й степени из единицы примитивный тогда и только тогда, когда все числа $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$ различны.

2. Найдите:
   (а) $\sigma_1 = w_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1}$;
   (б) $w_0^m + w_1^m + \ldots + w_{n-1}^m$ *(как ответ зависит от m?)*;
   (в) $\sigma_2 = w_0 w_1 + w_0 w_2 + \ldots + w_{n-2} w_{n-1}$;
   (г) $\sum\limits_{\substack{0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < \\ < i_p \leqslant 2p-1}} w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_p}$, где p — простое и $w_{p+i} = w_i$.

3. *Фильтрующее свойство корней.* Пусть $P(x) = \sum\limits_j a_j x^j$ — некоторый многочлен, и w_k — примитивный корень n-й степени. Докажите, что

$$\frac{P(x) + P(w_k x) + P(w_k^2 x) + \ldots + P(w_k^{n-1} x)}{n} = \sum_{n \mid j} a_j x^j.$$

4. **(а)** Пусть $\alpha = \cos(\frac{2\pi}{n}) + \mathrm{i} \cdot \sin(\frac{2\pi}{n})$. Докажите, что

$$n = (1-\alpha) \cdot (1-\alpha^2) \cdot (1-\alpha^3) \cdot \ldots \cdot (1-\alpha^{n-1}).$$

(б) Для каких других корней n-й степени из единицы это тождество выполняется?

(в) Для нечетных n докажите, что

$$\sqrt{n} = \left|(1-\alpha)\cdot(1-\alpha^2)\cdot(1-\alpha^3)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha^{\frac{n-1}{2}})\right|.$$

(г) Выпишите аналогичное равенство для четного n.

5. Даны многочлены $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ такие, что $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)$ делится на $1+x+x^2+x^3+x^4$. Докажите, что $P(x)$ делится на $x-1$.

Корни из единицы. Добавка

1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ — нечетное, $\alpha = \cos(\frac{2\pi}{n}) + \mathrm{i} \cdot \sin(\frac{2\pi}{n})$. Рассмотрим сумму

$$S_n = 1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^9 + \ldots + \alpha^{(n-1)^2}.$$

Докажите, что $|S_n| = \sqrt{n}$.

2. Докажите, что $\cos(\frac{2\pi}{2k+1})$ является корнем некоторого многочлена степени k с целыми коэффициентами.

3. Докажите, что если для корней простой степени p и целых чисел α_i, $i = 1, \ldots, p-1$, выполнено, что $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_{p-1} w_{p-1} = 0$, то все $\alpha_i = 0$.

4. Пусть $p > 2$ — некоторое простое число. Назовем p-элементное подмножество множества чисел $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ *эффектным,* если сумма его элементов делится на p. Найдите число эффектных подмножеств.

Окружности Лемуана

В этой серии обозначения, введеные в каждой задаче, распространяются на все последующие.

Определение. Точку пересечения симедиан треугольника называют *точкой Лемуана.*

1. Дан остроугольный треугольник ABC, L — его точка Лемуана. Окружность (BLC) пересекает прямые AB и AC в точках A_b и A_c. Точки B_a, B_c и C_a, C_b определяются аналогично. Докажите, что треугольники AA_bA_c, BB_aB_c и CC_aC_b имеют общую точку пересечения медиан.

2. **Вторая окружность Лемуана.** Точки A_1 и A_2 взяты на сторонах AB и AC так, что B, A_1, A_2 и C лежат на одной окружности и A_1, A_2, L — на одной прямой. Аналогично определим точки B_1, B_2 (B_1 на BA, B_2 на BC) и C_1, C_2 (C_1 на CA, C_2 на CB). Докажите, что
   (а) A_1, A_2, B_1 и C_1 лежат на одной окружности;
   (б) A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на одной окружности *(подсказка: используйте рад. оси).*

3. **Первая окружность Лемуана.** Пусть O — центр (ABC). Точки A' и A'' взяты на AB и AC так, что $A'A'' \parallel BC$ и A', A'', L — на одной прямой. Аналогично определим точки B', B'' и C', C''. Докажите, что
   (а) A', A'', B', B'', C' и C'' лежат на одной окружности;
   (б) центр окружности из прошлого пункта лежит на OL.

4. **Третья окружность Лемуана.** Докажите, что точки A_b, A_c, B_a, B_c и C_a, C_b лежат на одной окружности.

5. Обозначим через S центр третьей окружности Лемуана. Докажите, что S лежит на OL и справедливо соотношение $LS = \frac{1}{2}LO$.

Окружность Нойберга-Минера

В задачах ниже дан четырехугольник $ABCD$ и M — его точка Микеля. Пусть $E = AB \cap CD$ и $F = BC \cap AD$. Касательные к окружностям (BEC), (AED), (FAB) и (FDC), проведенные в точке M, пересекают прямые BC, AD, AB и DC в точках Y, X, Z и T.

1. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный тогда и только тогда, когда A, M, X и Z на одной окружности.

2. Докажите, что (FXY) и (EZT) касаются.

3. **Прямая Нойберга-Минера.** Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный тогда и только тогда, когда X, Y, Z и T лежат на одной прямой.

4. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписанный в окружность с центром в O, G — точка пересечения диагоналей $ABCD$. Докажите, что прямая Нойберга-Минера перпендикулярна OG.

5. **Окружность Нойберга-Минера.** Пусть точки P, Q, R и S лежат на прямых AB, BC, CD и DA (вне соответсвующих отрезков) и верны равенства:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AD^2}{BC^2}\,,\ \frac{QB}{QC} = \frac{AB^2}{CD^2}\,,\ \frac{RC}{RD} = \frac{BC^2}{AD^2}\,,\ \frac{SA}{SD} = \frac{AB^2}{CD^2}\,.$$

Докажите, что P, Q, R и S лежат на одной окружности.

Посчитай меня комплексно

1. **Теорема Эйлера о четырехугольнике.** Обозначим через a, b, c и d длины сторон выпуклого четырехугольника, e и f — длины его диагоналей, а g — длина отрезка между серединами диагоналей. Докажите, что
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4g^2\,.$$

2. На сторонах выпуклого четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что прямые, соединяющие центры противоположных квадратов, перпендикулярны.

3. Дан треугольник ABC, вписанный в окружность ω и описанный около окружности с центром в точке I. Прямые AI, BI и CI пересекают ω в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно соответствующих сторон треугольника. Докажите, что:
(а) Точка I — ортоцентр треугольника A_2, B_2 и C_2.
(б) Окружность $(A_2B_2C_2)$ проходит через ортоцентр ABC.

4. Дан вписанный четырехугольник.
(а) Докажите, что середины отрезков, соединяющих одну из его вершин с ортоцентром треугольника, образованного тремя другими, совпадают.
(б) И эта точка вместе с точкой пересечения диагоналей и точками пересечения продолжений противоположных сторон лежит на одной окружности.

5. **Теорема Брианшона.** Шестиугольник описан около окружности. Докажите, что три его главные диагонали конкурентны.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF, пересекающиеся в точке H. Пусть O — центр описанной окружности ω. Касательные к окружности ω, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке T. Точки K и L симметричны точке O относительно AB и AC соответственно. Окружности (DFK) и (DEL) пересекаются в точке P, отличной от D. Докажите, что точки P, D, T лежат на одной прямой.

Поворотная гомотетия

Теорема о существовании и единственности. Существует и единственна поворотная гомотетия, переводящая отрезок $\overrightarrow{AB}$ в не параллельный ему отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Теорема о двойственной поворотной гомотетии. Центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок $\overrightarrow{AA_1}$ в отрезок $\overrightarrow{BB_1}$.

Теорема о поворотной гомотетии. Пусть окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в точке A, переводящую ω_1 в ω_2. Тогда образ произвольной точки P окружности ω_1 — такая точка Q, что B, P, Q — одна прямая.

Лемма о воробьях. Пусть точки X_t и Y_t движутся с постоянными скоростями (не обязательно равными) по двум фиксированным прямым, пересекающимся в точке O. Через X_t и Y_t обозначим их положение в момент времени t. Тогда (X_tOY_t) будет проходить через фиксированную точку.

В задачах ниже *нельзя* использовать подобие.

1. Дано два правильных пятиугольника с общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника занумерованы против часовой стрелки числами от 1 до 5, причем номер общей вершины — 1. Докажите, что 4 прямые, проходящие через вершины с одинаковыми номерами, пересекаются в одной точке.

2. По двум прямым, пересекающимся в точке Z, с постоянной скоростью движутся точки X и Y. Точка K делит отрезок XY в постоянном отношении. Докажите, что K движется по прямой.

3. Многоугольник $A_1A_2A_3\ldots A_n$ подобен $B_1B_2\ldots B_n$ (вершина A_1 соответствует B_1, вершина A_2 — B_2, …, вершина A_n — B_n). Точки C_1, C_2, …, C_n лежат на отрезках A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n соответственно и делят их в равных отношениях. Докажите, что многоугольник $C_1C_2\ldots C_n$ подобен $A_1A_2A_3\ldots A_n$.

4. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Перпендикуляр, опущенный из точки H на биссектрису угла $\angle ACB$, пересекает стороны CA и CB в точках P и Q. Окружности, описанные около треугольников ABC и CPQ, пересекаются второй раз в T. Докажите, что прямая TH проходит через середину AB.

5. Даны два одинаково ориентированных квадрата $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 пересекают серединные перпендикуляры к отрезкам A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_1B_1 в точках P, Q, R, S соответственно. Докажите, что $PR \perp QS$.

Поворотная гомотетия и комплексные числа

1. Точки K, M, L, N отмечены на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно так, что K лежит между M и B, а L лежит между N и C. Если

$$\frac{BK}{KM} = \frac{CL}{LN},$$

докажите, что ортоцентры треугольники ABC, AKL и AMN лежат на одной прямой.

2. Пусть P — произвольная точка на дуге BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащая точку A. Пусть I_1 и I_2 — инцентры треугольников PAB и PAC соответственно. Докажите, что:

(а) Окружности, описанные около треугольников PI_1I_2, проходят через фиксированную точку.

(б) Окружности с диаметром I_1I_2 проходят через фиксированную точку.

(в) Середины отрезков I_1I_2 лежат на фиксированной окружности.

3. Внутри треугольника ABC отмечены изогонально сопряженные точки P и Q. Обозначим через O_1, O_2, O_3, O_1', O_2', O_3', O, O' — центры описанных окружностей треугольников PBC, PCA, PAB, QBC, QCA, QAB, $O_1O_2O_3$ и $O_1'O_2'O_3'$ соответственно. Докажите, что $OO' \parallel PQ$.

Разрезания на параллелограммы

1. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя разрезать на параллелограммы.

2. В правильном шестиугольнике со стороной n нарисована сетка из правильных треугольников со стороной 1. Шестиугольник разрезан вдоль линий сетки на $3n^2$ ромбов со стороной 1 трёх направлений: ▱, ⏥, ◊. Докажите, что ромбов каждого направления поровну.

3. Выпуклый многоугольник разбит на параллелограммы. Вершину многоугольника, к которой примыкает только один параллелограмм, назовём *хорошей.* Докажите, что хороших вершин

(а) не менее одной; **(б)** не меньше трёх.

4. **(а)** Докажите, что если выпуклый многоугольник можно разбить на несколько параллелограммов, то он имеет центр симметрии.

(б) Верно ли обратное утверждение, то есть что любой выпуклый центрально симметричный многоугольник можно разрезать на параллелограммы?

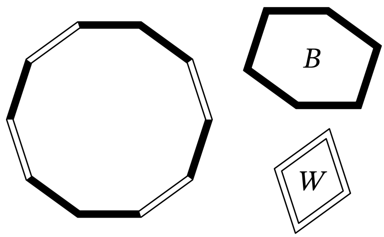
(в) Выпуклый многоугольник можно разрезать на выпуклые центрально-симметричные многоугольники. Докажите, что у него есть центр симметрии.

5. **(а)** Докажите, что площадь выпуклого центрально симметричного $2n$-угольника на координатной плоскости с вершинами в целых точках не меньше $\frac{n(n-1)}{2}$.

(б) Докажите, что площадь любого выпуклого $2n$-угольника с вершинами в точках с целыми координатами не меньше $\frac{n(n-1)}{2}$.

6. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка D симметрична A относительно BC. Можно ли разбить треугольник ABC на несколько многоугольников, каждый многоугольник параллельно перенести так, чтобы из них составился треугольник BCD?

7. Даны натуральные числа $w, b \geqslant 2$, $n = w + b$. Стороны правильного $2n$-угольника случайно раскрашены в два цвета так, что любые две противоположные стороны покрашены в один цвет и всего $2w$ белых сторон и $2b$ чёрных. Булгаков параллельно перенёс все белые отрезки и собрал из них выпуклый многоугольник W; Чехов параллельно перенёс все чёрные отрезки и собрал из них выпуклый многоугольник B. Докажите, что разность площадей многоугольников W и B не зависит от раскраски $2n$-угольника.


B
W

Разрезания на параллелограммы, как будто бы вам одного листка было мало

1. Правильный 100-угольник разрезан на параллелограммы.

(а) Докажите, что среди них не менее 25 прямоугольников.

(б) Найдите их общую площадь, если длина стороны 100-угольника равна 1.

2. Выпуклый центрально-симметричный $2n$-угольник разрезан на $\frac{n(n-1)}{2}$ параллелограммов так, никакая вершина ни одного из параллелограммов не лежит на стороне другого параллелограмма и не лежит на стороне исходного многоугольника. Для каждого из n направлений сторон $2n$-угольника назовём *цепью* последовательность всех параллелограммов, у которых одна из сторон как раз этого направления.

Докажите или опровергните: для любого разрезания можно нарисовать на плоскости n попарно пересекающихся отрезков и сопоставить цепям — отрезки, а параллелограммам — точки пересечения пар отрезков так, чтобы для каждой цепи параллелограммы в ней шли в том же порядке, что и соответствующие точки на соответствующих отрезках.

Триангуляции

1. Докажите, что при $n \geqslant 4$ в любом разрезании выпуклого n-угольника непересекающимися диагоналями на треугольники найдутся два треугольника, две стороны каждого из которых служат сторонами исходного n-угольника *(«уши триангуляции»).*

2. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в исходном многоугольнике есть две равные стороны.

3. Каждой триангуляции сопоставим «двойственный» граф, вершинами которого являются треугольники триангуляции, а рёбрами соединены треугольники, имеющие общую сторону. Докажите, что граф является двойственным к некоторой триангуляции тогда и только тогда, когда граф является деревом, степень каждой вершины которого не больше 3.

4. Сколько существует способов разрезать выпуклый n-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы никакой треугольник не имел в качестве всех трёх своих сторон три диагонали исходного n-угольника?

5. Выпуклый 2022-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Все треугольники раскрашены в чёрный и в белый цвета так, что любые два треугольника с общей стороной разного цвета. Какое наименьшее количество чёрных треугольников могло получиться?

6. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.

7. Дан выпуклый многоугольник, никакие четыре вершины которого не лежат на одной окружности. Назовём окружность *граничной,* если она проходит через три подряд идущие вершины многоугольника и содержит многоугольник внутри. Назовём окружность *внутренней,* если она проходит через три попарно несоседние вершины многоугольника и содержит многоугольник внутри. Докажите, что граничных окружностей на две больше, чем внутренних.

8. Дан выпуклый n-угольник. Назовем окружность *полувписанной,* если она полностью лежит в этом n-угольнике и касается трёх его сторон. Известно, что никакие четыре прямые, содержащие стороны n-угольника, не касаются одной окружности. Докажите, что полувписанных окружностей ровно $n-2$.

Числа Каталана

Последовательность из знаков «(» и «)» длины $2n$ называется *правильной,* если выполнены два условия:

- в ней поровну символов «(» и «)»;
- на любом префиксе этой последовательности символов «(» не меньше, чем «)».

Количество всевозможных правильных скобочных последовательностей длины $2n$ обозначается символом C_n и называется n-м *числом Каталана.*

1. Докажите, что в правильной скобочной последовательности можно единственным способом разбить скобки на пары так, чтобы
- в любой паре были разные скобки и при этом скобка «(» стояла левее скобки «)»;
- две любые пары скобок не были «зацеплены». То есть запрещено такое:

$$\ldots (_1 \ldots (_2 \ldots)_1 \ldots)_2 \ldots .$$

2. Найдите количество способов разбить целые числа от 1 до $2n$ на пары так, чтобы для любой четвёрки чисел $p < q < r < s$ в разбиение не могут одновременно входить пары
(а) $\{p, r\}$ и $\{q, s\}$; **(б)** $\{p, s\}$ и $\{q, r\}$.

3. **(а)** Частица вылетает из точки $(0, 0)$ и за одну секунду проходит либо единицу расстояния вправо, либо единицу вверх. Докажите, что количество способов добраться до точки (n, n), не поднимаясь строго выше прямой $y = x$, равно C_n.
(б) Докажите, что количество способов, которыми частица может добраться до точки (n, n), поднявшись выше прямой $y = x$, совпадает с количеством способов, которыми частица может добраться до точки $(n - 1, n + 1)$.
(в) Выведите явную формулу числа Каталана из предыдущего пункта.

4. Докажите, что числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$\mathrm{C}_{n+1} = \mathrm{C}_0\mathrm{C}_n + \mathrm{C}_1\mathrm{C}_{n-1} + \mathrm{C}_2\mathrm{C}_{n-2} + \ldots + \mathrm{C}_n\mathrm{C}_0 \quad \text{при } n \geqslant 0, \quad \mathrm{C}_0 = 1\,.$$

5. Сколькими способами можно разрезать выпуклый n-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники? Разрезания, отличающиеся поворотом, считаются различными.

6. **(а)** Дана последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$, состоящая из $n + 1$ «1» и n «-1». Докажите, что существет ровно один индекс i, для которого все суммы a_i, $a_i + a_{i+1}$, ..., $a_i + \ldots + a_k$, ... положительны. (Нумерация индексов идёт по модулю $2n + 1$.)
(б) Выведите явную формулу числа Каталана из предыдущего пункта.

7. *Упорядоченным корневым деревом* назовём дерево с выделенной вершиной, подвешенной за эту вершину, потомки каждой вершины которого пронумерованы.

(а) Найдите количество упорядоченных корневых деревьев с n вершинами.

(б) Найдите количество *бинарных* деревьев с n листьями — упорядоченных корневых деревьев, у каждой вершины которого 0 либо 2 потомка.

Числа Каталана. Добавка

1. Найдите количество способов выписать в ряд числа от 1 до n каждое по одному разу так, чтобы ни для какой тройки чисел $a < b < c$ эти числа не встречались в порядке **(а)** b, c, a; **(б)** a, b, c.

2. Частица и античастица зарождаются в момент времени 0 в точке $(0, 0)$. Каждая из них за секунду проходит либо единицу расстояния вправо, либо единицу расстояния вверх. В момент времени $n+1$ они впервые встретились и аннигилировали. Сколькими способами это могло произойти?

3. Дано натуральное число n. Определите количество всех возможных последовательностей вида $1, a_1, a_2, \ldots, a_n, 1$, в которых все $a_i > 1$ — натуральные числа, таких, что каждый некрайний член последовательности является делителем суммы своих соседей.

Глава 2

9-2 (9-2)

Симметрические многочлены

Определение. Многочлен от n переменных называется *симметрическим,* если он не меняется при любых перестановках его переменных.

Примеры симметрических многочленов:

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k\,; \quad x_1 x_2 \ldots x_n\,; \quad (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2\,.$$

Определение. *Элементарными симметрическими многочленами* называются многочлены σ_k:

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}\,.$$

1. Выразите через элементарные симметрические многочлены:
(а) $(a+b)(b+c)(a+c)$; **(б)** $(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2$;
(в) $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$.

Основная теорема о симметрических многочленах. Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить как многочлен от элементарных симметрических многочленов.

Определение. Говорят, что упорядоченный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ мажорирует набор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, если существует такое индекс i, для которого верно $\alpha_i > \beta_i$ и $\alpha_j = \beta_j$ для $j < i$.

Таким образом мы можем упорядочить множество строк длины n. Такой порядок называется *лексикографическим.*

2. Пусть дан симметрический многочлен от n переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим все его мономы. Назовем моном $ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ *старшим,* если упорядоченный набор показателей $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ мажорирует упорядоченные наборы показателей остальных мономов относительно лексикографического порядка.
(а) Докажите, что старший моном произведения двух многочленов равен произведению старших мономов сомножителей.
(б) Докажите, что для любого монома $q = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$, существуют такие неотрицательные числа β_1, β_2, …, β_n, что старший моном многочлена $\sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2} \ldots \sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с q, причем числа определены однозначно.
(в) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

3. Дан многочлен $P_n(x)$ степени n с рациональными коэффициентами. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — его корни (возможно, комплексные). Также дан симметрический многочлен $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что число $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ рационально.

4. **Важная задача.** Рассмотрим уравнение $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Пусть a, b, c — его корни (возможно, комплексные, не обязательно различные).

(а) Докажите, что $(a-b)^2(b-c)^2(a-c)^2 = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2$.

(б) Найдите необходимое и достаточное условие на коэффициенты p, q, r, при котором числа a, b, c вещественные.

(в) Найти необходимое и достаточное условие на коэффициенты p, q, r, при котором числа a, b, c вещественные и неотрицательные.

5. Многочлен $x^{1000} + y^{1000}$ выразили через элементарные симметрические как $P(x+y, xy)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена P.

6. Многочлен

$$P_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$$

называется *Ньютоновской суммой.* Докажите, что выполнены *тождества Ньютона*:

$$\sigma_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\sigma_{k-i}P_i\,.$$

pqr-метод

Определение. Тройку действительных чисел (p, q, r) будем называть *допустимой,* если корни a, b, c ассоциированного с ними уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ действительные и неотрицательные (см. задачу 4c из предыдущего листика).

1. **(а) Лемма о *r*.** Пусть для заданных $p = p_0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно r такое, что тройка (p_0, q_0, r) допустима. Докажите, что
- для минимального r такого, что тройка (p_0, q_0, r) допустима, в соответствующей тройке a, b, c либо есть два равных числа, либо одно из чисел равно 0;
- для максимального r такого, что тройка (p_0, q_0, r) допустима, в соответствующей тройке a, b, c есть два равных числа.

(б) Лемма о *q*. Пусть для заданных $p = p_0$ и $r = r_0$ существует хотя бы одно q такое, что тройка (p_0, q, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального q такого, что тройка (p_0, q, r_0) допустима, в соответствующей тройке a, b, c есть два равных числа.

(в) Лемма о *p*. Пусть для заданных $r = r_0 > 0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно p такое, что тройка (p, q_0, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального p такого, что тройка (p, q_0, r_0) допустима, в соответствующей тройке a, b, c есть два равных числа. Останется ли утверждение верным, если $r_0 = 0$?

С помощью этих лемм мы получаем мощный аппарат для решения неравенств, называемый *pqr-методом*[1]. Действительно, пусть у нас есть неравенство, записываемое в виде $P(a, b, c) \geqslant 0$, где P — симметрический многочлен. Выражая его в терминах элементарных симметрических многочленов p, q, r, мы получим новое неравенство, сводимое к тривиальному частному случаю.

Пример. Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$ при $a, b, c \geqslant 0$.

Решение. Перепишем исходное неравенство в терминах p, q, r: $p^2 - 2q \geqslant q$. Зафиксируем, к примеру, значения $p = p_0$ и $r = r_0$. Теперь надо доказать неравенство $3q \leqslant p_0^2$. Заметим, что если мы докажем неравенство для максимального q, то оно будет верно для всех q. По лемме о q, его максимальное значение достигается, когда какие-нибудь из переменных a, b, c равны. Без ограничения общности, $a = b = x, c = z$. Поскольку неравенство $3q \leqslant p_0^2$ равносильно исходному, то после подстановки в исходное неравенство получим $2x^2 + z^2 \geqslant x^2 + 2xz \Leftrightarrow (x - z)^2 \geqslant 0$, что очевидно верно.

2. Для неотрицательных чисел a, b, c верно, что $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ca)\,.$$

[1]Этот метод также известен под именем uvw. Отличие заключается лишь в переобозначении $p = 3u$, $q = 3v^2$, $r = w^3$.

3. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-ac} + \frac{1}{9-bc} \leqslant \frac{3}{8}\,.$$

4. *(USA TST, 2001)* Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$ab + bc + ac - abc \leqslant 2\,.$$

5. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что

$$a^3(a-b)(a-c) + b^3(b-a)(b-c) + c^3(c-a)(c-b) \geqslant 0\,.$$

6. Для неотрицательных чисел a, b, c верно, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Докажите, что

$$2(a+b+c-2)^2 + (ab+bc+ac)(2+3a+3b+3c) \geqslant 35\,.$$

pqr-добавка

1. Известно, что $a, b, c \geqslant 1$ и $a + b + c = 9$. Докажите, что

$$\sqrt{ab + bc + ac} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\,.$$

2. Известно, что a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 6\left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b}\right).$$

Корни из единицы

Напоминание. Все комплексные числа, кроме 0, представимы в *тригонометрической форме:* $z = r \cdot \big(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\big)$. Вещественные числа φ и $r > 0$ называются *аргументом* и *модулем* комплексного числа z соответственно. Величина φ определяется с точностью до прибавления $2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Модуль числа z равен расстоянию между точками 0 и z на комплексной плоскости, аргумент равен направленному углу между положительным направлением вещественной оси и вектором с началом в 0 и концом в z.

Числа в тригонометрической форме очень удобно умножать:

$$r_1\big(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1)\big) \cdot r_2\big(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2)\big) = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Иначе говоря, *при перемножении модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Определение. *Корнями n-й степени из единицы* называются числа w: $w^n = 1$. Очевидно, что эти корни имеют вид $w_k = \cos\big(\frac{2\pi k}{n}\big) + \mathrm{i}\sin\big(\frac{2\pi k}{n}\big)$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Определение. Корень w_k n-й степени из единицы называется *примитивным,* если НОД$(k, n) = 1$.

1. Докажите, что корень w n-й степени из единицы примитивный тогда и только тогда, когда все числа $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$ различны.

2. Найдите:
   (а) $\sigma_1 = w_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1}$;
   (б) $w_0^m + w_1^m + \ldots + w_{n-1}^m$ *(как ответ зависит от m?)*;
   (в) $\sigma_2 = w_0 w_1 + w_0 w_2 + \ldots + w_{n-2} w_{n-1}$;
   (г) $\sum\limits_{\substack{0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < \\ < i_p \leqslant 2p-1}} w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_p}$, где p — простое и $w_{p+i} = w_i$.

3. *Фильтрующее свойство корней.* Пусть $P(x) = \sum\limits_j a_j x^j$ — некоторый многочлен, и w_k — примитивный корень n-й степени. Докажите, что

$$\frac{P(x) + P(w_k x) + P(w_k^2 x) + \ldots + P(w_k^{n-1} x)}{n} = \sum_{n|j} a_j x^j.$$

4. **(а)** Пусть $\alpha = \cos\big(\frac{2\pi}{n}\big) + \mathrm{i} \cdot \sin\big(\frac{2\pi}{n}\big)$. Докажите, что

$$n = (1-\alpha) \cdot (1-\alpha^2) \cdot (1-\alpha^3) \cdot \ldots \cdot (1-\alpha^{n-1}).$$

(б) Для каких других корней n-й степени из единицы это тождество выполняется?

(в) Для нечетных n докажите, что

$$\sqrt{n} = \left|(1-\alpha)\cdot(1-\alpha^2)\cdot(1-\alpha^3)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha^{\frac{n-1}{2}})\right|.$$

(г) Выпишите аналогичное равенство для четного n.

5. Даны многочлены $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ такие, что $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)$ делится на $1+x+x^2+x^3+x^4$. Докажите, что $P(x)$ делится на $x-1$.

Окружности Лемуана

В этой серии обозначения, введеные в каждой задаче, распространяются на все последующие.

Определение. Точку пересечения симедиан треугольника называют *точкой Лемуана.*

1. Дан остроугольный треугольник ABC, L — его точка Лемуана. Окружность (BLC) пересекает прямые AB и AC в точках A_b и A_c. Точки B_a, B_c и C_a, C_b определяются аналогично. Докажите, что треугольники AA_bA_c, BB_aB_c и CC_aC_b имеют общую точку пересечения медиан.

2. **Вторая окружность Лемуана.** Точки A_1 и A_2 взяты на сторонах AB и AC так, что B, A_1, A_2 и C лежат на одной окружности и A_1, A_2, L — на одной прямой. Аналогично определим точки B_1, B_2 (B_1 на BA, B_2 на BC) и C_1, C_2 (C_1 на CA, C_2 на CB). Докажите, что
   (а) A_1, A_2, B_1 и C_1 лежат на одной окружности;
   (б) A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на одной окружности *(подсказка: используйте рад. оси).*

3. **Первая окружность Лемуана.** Пусть O — центр (ABC). Точки A' и A'' взяты на AB и AC так, что $A'A'' \parallel BC$ и A', A'', L — на одной прямой. Аналогично определим точки B', B'' и C', C''. Докажите, что
   (а) A', A'', B', B'', C' и C'' лежат на одной окружности;
   (б) центр окружности из прошлого пункта лежит на OL.

4. **Третья окружность Лемуана.** Докажите, что точки A_b, A_c, B_a, B_c и C_a, C_b лежат на одной окружности.

5. Обозначим через S центр третьей окружности Лемуана. Докажите, что S лежит на OL и справедливо соотношение $LS = \frac{1}{2}LO$.

Окружность Нойберга-Минера

В задачах ниже дан четырехугольник $ABCD$ и M — его точка Микеля. Пусть $E = AB \cap CD$ и $F = BC \cap AD$. Касательные к окружностям (BEC), (AED), (FAB) и (FDC), проведенные в точке M, пересекают прямые BC, AD, AB и DC в точках Y, X, Z и T.

1. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный тогда и только тогда, когда A, M, X и Z на одной окружности.

2. Докажите, что (FXY) и (EZT) касаются.

3. **Прямая Нойберга-Минера.** Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный тогда и только тогда, когда X, Y, Z и T лежат на одной прямой.

4. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписанный в окружность с центром в O, G — точка пересечения диагоналей $ABCD$. Докажите, что прямая Нойберга-Минера перпендикулярна OG.

5. **Окружность Нойберга-Минера.** Пусть точки P, Q, R и S лежат на прямых AB, BC, CD и DA (вне соответсвующих отрезков) и верны равенства:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AD^2}{BC^2}, \ \frac{QB}{QC} = \frac{AB^2}{CD^2}, \ \frac{RC}{RD} = \frac{BC^2}{AD^2}, \ \frac{SA}{SD} = \frac{AB^2}{CD^2}.$$

   Докажите, что P, Q, R и S лежат на одной окружности.

Посчитай меня комплексно

1. **Теорема Эйлера о четырехугольнике.** Обозначим через a, b, c и d длины сторон выпуклого четырехугольника, e и f — длины его диагоналей, а g — длина отрезка между серединами диагоналей. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4g^2\,.$$

2. На сторонах выпуклого четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что прямые, соединяющие центры противоположных квадратов, перпендикулярны.

3. Дан треугольник ABC, вписанный в окружность ω и описанный около окружности с центром в точке I. Прямые AI, BI и CI пересекают ω в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно соответствующих сторон треугольника. Докажите, что:
(а) Точка I — ортоцентр треугольника A_2, B_2 и C_2.
(б) Окружность $(A_2B_2C_2)$ проходит через ортоцентр ABC.

4. Дан вписанный четырехугольник.
(а) Докажите, что середины отрезков, соединяющих одну из его вершин с ортоцентром треугольника, образованного тремя другими, совпадают.
(б) И эта точка вместе с точкой пересечения диагоналей и точками пересечения продолжений противоположных сторон лежит на одной окружности.

5. **Теорема Брианшона.** Шестиугольник описан около окружности. Докажите, что три его главные диагонали конкурентны.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF, пересекающиеся в точке H. Пусть O — центр описанной окружности ω. Касательные к окружности ω, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке T. Точки K и L симметричны точке O относительно AB и AC соответственно. Окружности (DFK) и (DEL) пересекаются в точке P, отличной от D. Докажите, что точки P, D, T лежат на одной прямой.

Поворотная гомотетия

Теорема о существовании и единственности. Существует и единственна поворотная гомотетия, переводящая отрезок $\overrightarrow{AB}$ в не параллельный ему отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Теорема о двойственной поворотной гомотетии. Центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок $\overrightarrow{AA_1}$ в отрезок $\overrightarrow{BB_1}$.

Теорема о поворотной гомотетии. Пусть окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в точке A, переводящую ω_1 в ω_2. Тогда образ произвольной точки P окружности ω_1 — такая точка Q, что B, P, Q — одна прямая.

Лемма о воробьях. Пусть точки X_t и Y_t движутся с постоянными скоростями (не обязательно равными) по двум фиксированным прямым, пересекающимся в точке O. Через X_t и Y_t обозначим их положение в момент времени t. Тогда (X_tOY_t) будет проходить через фиксированную точку.

В задачах ниже *нельзя* использовать подобие.

1. Дано два правильных пятиугольника с общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника занумерованы против часовой стрелки числами от 1 до 5, причем номер общей вершины — 1. Докажите, что 4 прямые, проходящие через вершины с одинаковыми номерами, пересекаются в одной точке.

2. По двум прямым, пересекающимся в точке Z, с постоянной скоростью движутся точки X и Y. Точка K делит отрезок XY в постоянном отношении. Докажите, что K движется по прямой.

3. Многоугольник $A_1A_2A_3\ldots A_n$ подобен $B_1B_2\ldots B_n$ (вершина A_1 соответствует B_1, вершина A_2 — B_2, …, вершина A_n — B_n). Точки C_1, C_2, …, C_n лежат на отрезках A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n соответственно и делят их в равных отношениях. Докажите, что многоугольник $C_1C_2\ldots C_n$ подобен $A_1A_2A_3\ldots A_n$.

4. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Перпендикуляр, опущенный из точки H на биссектрису угла $\angle ACB$, пересекает стороны CA и CB в точках P и Q. Окружности, описанные около треугольников ABC и CPQ, пересекаются второй раз в T. Докажите, что прямая TH проходит через середину AB.

5. Даны два одинаково ориентированных квадрата $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 пересекают серединные перпендикуляры к отрезкам A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_1B_1 в точках P, Q, R, S соответственно. Докажите, что $PR \perp QS$.

Поворотная гомотетия и комплексные числа

1. Точки K, M, L, N отмечены на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно так, что K лежит между M и B, а L лежит между N и C. Если

$$\frac{BK}{KM} = \frac{CL}{LN},$$

докажите, что ортоцентры треугольники ABC, AKL и AMN лежат на одной прямой.

2. Пусть P — произвольная точка на дуге BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащая точку A. Пусть I_1 и I_2 — инцентры треугольников PAB и PAC соответственно. Докажите, что:

(а) Окружности, описанные около треугольников PI_1I_2, проходят через фиксированную точку.

(б) Окружности с диаметром I_1I_2 проходят через фиксированную точку.

(в) Середины отрезков I_1I_2 лежат на фиксированной окружности.

3. Внутри треугольника ABC отмечены изогонально сопряженные точки P и Q. Обозначим через O_1, O_2, O_3, O_1', O_2', O_3', O, O' — центры описанных окружностей треугольников PBC, PCA, PAB, QBC, QCA, QAB, $O_1O_2O_3$ и $O_1'O_2'O_3'$ соответственно. Докажите, что $OO' \parallel PQ$.

Разрезания на параллелограммы

1. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя разрезать на параллелограммы.

2. В правильном шестиугольнике со стороной n нарисована сетка из правильных треугольников со стороной 1. Шестиугольник разрезан вдоль линий сетки на $3n^2$ ромбов со стороной 1 трёх направлений: ▱, ⏥, ◊. Докажите, что ромбов каждого направления поровну.

3. **(а)** Докажите, что если выпуклый многоугольник можно разбить на несколько параллелограммов, то его противоположные стороны параллельны и равны.
(б) Докажите, что если в выпуклом многоугольнике противоположные стороны параллельны и равны, то его можно разрезать на параллелограммы.
(в) Докажите, что если выпуклый многоугольник можно разрезать на выпуклые центрально-симметричные многоугольники, то у него тоже есть центр симметрии.

4. Выпуклый многоугольник разбит на параллелограммы. Вершину многоугольника, к которой примыкает только один параллелограмм, назовём *хорошей*. Докажите, что хороших вершин
(а) не менее одной; **(б)** не меньше трёх.

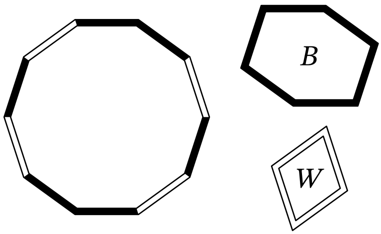
5. **(а)** Докажите, что площадь выпуклого центрально симметричного $2n$-угольника на координатной плоскости с вершинами в целых точках не меньше $\frac{n(n-1)}{2}$.
(б) Докажите, что площадь любого выпуклого $2n$-угольника с вершинами в точках с целыми координатами не меньше $\frac{n(n-1)}{2}$.

6. Правильный 100-угольник разрезан на параллелограммы.
(а) Докажите, что среди них не менее 25 прямоугольников.
(б) Найдите их общую площадь, если длина стороны 100-угольника равна 1.

7. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка D симметрична A относительно BC. Можно ли разбить треугольник ABC на несколько многоугольников, каждый многоугольник параллельно перенести так, чтобы из них составился треугольник BCD?

Разрезания на параллелограммы, как будто бы вам одного листка было мало

1. Даны натуральные числа $w, b \geqslant 2$, $n = w + b$. Стороны правильного $2n$-угольника случайно раскрашены в два цвета так, что любые две противоположные стороны покрашены в один цвет и всего $2w$ белых сторон и $2b$ чёрных. Все белые отрезки параллельно перенесли и собрали из них выпуклый многоугольник W; все чёрные отрезки параллельно перенесли и собрали из них выпуклый многоугольник B. Докажите, что разность площадей многоугольников W и B не зависит от раскраски $2n$-угольника.



2. Выпуклый центрально-симметричный $2n$-угольник разрезан на $\frac{n(n-1)}{2}$ параллелограммов так, никакая вершина ни одного из параллелограммов не лежит на стороне другого параллелограмма и не лежит на стороне исходного многоугольника. Для каждого из n направлений сторон $2n$-угольника назовём *цепью* последовательность всех параллелограммов, у которых одна из сторон как раз этого направления.

Докажите или опровергните: для любого разрезания можно нарисовать на плоскости n попарно пересекающихся отрезков и сопоставить цепям — отрезки, а параллелограммам — точки пересечения пар отрезков так, чтобы для каждой цепи параллелограммы в ней шли в том же порядке, что и соответствующие точки на соответствующих отрезках.

Триангуляции

1. Докажите, что при $n \geqslant 4$ в любом разрезании выпуклого n-угольника непересекающимися диагоналями на треугольники найдутся два треугольника, две стороны каждого из которых служат сторонами исходного n-угольника *(«уши триангуляции»)*.

2. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в исходном многоугольнике есть две равные стороны.

3. Каждой триангуляции сопоставим «двойственный» граф, вершинами которого являются треугольники триангуляции, а рёбрами соединены треугольники, имеющие общую сторону. Докажите, что граф является двойственным к некоторой триангуляции тогда и только тогда, когда граф является деревом, степень каждой вершины которого не больше 3.

4. Сколько существует способов разрезать выпуклый n-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы никакой треугольник не имел в качестве всех трёх своих сторон три диагонали исходного n-угольника?

5. Выпуклый 2022-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Все треугольники раскрашены в чёрный и в белый цвета так, что любые два треугольника с общей стороной разного цвета. Какое наименьшее количество чёрных треугольников могло получиться?

6. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.

7. Дан выпуклый многоугольник, никакие четыре вершины которого не лежат на одной окружности. Назовём окружность *граничной,* если она проходит через три подряд идущие вершины многоугольника и содержит многоугольник внутри. Назовём окружность *внутренней,* если она проходит через три попарно несоседние вершины многоугольника и содержит многоугольник внутри. Докажите, что граничных окружностей на две больше, чем внутренних.

8. Дан выпуклый n-угольник. Назовем окружность *полувписанной,* если она полностью лежит в этом n-угольнике и касается трёх его сторон. Известно, что никакие четыре прямые, содержащие стороны n-угольника, не касаются одной окружности. Докажите, что полувписанных окружностей ровно $n - 2$.

Числа Каталана

Последовательность из знаков «(» и «)» длины $2n$ называется *правильной,* если выполнены два условия:

- в ней поровну символов «(» и «)»;
- на любом префиксе этой последовательности символов «(» не меньше, чем «)».

Количество всевозможных правильных скобочных последовательностей длины $2n$ обозначается символом C_n и называется n-м *числом Каталана.*

1. Докажите, что в правильной скобочной последовательности можно единственным способом разбить скобки на пары так, чтобы
- в любой паре были разные скобки и при этом скобка «(» стояла левее скобки «)»;
- две любые пары скобок не были «зацеплены». То есть запрещено такое:

$$\ldots (_1 \ldots (_2 \ldots)_1 \ldots)_2 \ldots .$$

2. Найдите количество способов разбить целые числа от 1 до $2n$ на пары так, чтобы для любой четвёрки чисел $p < q < r < s$ в разбиение не могут одновременно входить пары
(а) $\{p, r\}$ и $\{q, s\}$; **(б)** $\{p, s\}$ и $\{q, r\}$.

3. **(а)** Частица вылетает из точки $(0, 0)$ и за одну секунду проходит либо единицу расстояния вправо, либо единицу вверх. Докажите, что количество способов добраться до точки (n, n), не поднимаясь строго выше прямой $y = x$, равно C_n.
(б) Докажите, что количество способов, которыми частица может добраться до точки (n, n), поднявшись выше прямой $y = x$, совпадает с количеством способов, которыми частица может добраться до точки $(n - 1, n + 1)$.
(в) Выведите явную формулу числа Каталана из предыдущего пункта.

4. Докажите, что числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \ldots + C_nC_0 \quad \text{при } n \geqslant 0, \quad C_0 = 1 .$$

5. Сколькими способами можно разрезать выпуклый n-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники? Разрезания, отличающиеся поворотом, считаются различными.

6. **(а)** Дана последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$, состоящая из $n + 1$ «1» и n «-1». Докажите, что существет ровно один индекс i, для которого все суммы a_i, $a_i + a_{i+1}$, …, $a_i + \ldots + a_k$, … положительны. (Нумерация индексов идёт по модулю $2n + 1$.)
(б) Выведите явную формулу числа Каталана из предыдущего пункта.

7. *Упорядоченным корневым деревом* назовём дерево с выделенной вершиной, подвешенной за эту вершину, потомки каждой вершины которого пронумерованы.

(а) Найдите количество упорядоченных корневых деревьев с n вершинами.

(б) Найдите количество *бинарных* деревьев с n листьями — упорядоченных корневых деревьев, у каждой вершины которого 0 либо 2 потомка.

Числа Каталана. Добавка

1. Найдите количество способов выписать в ряд числа от 1 до n каждое по одному разу так, чтобы ни для какой тройки чисел $a < b < c$ эти числа не встречались в порядке **(а)** b, c, a; **(б)** a, b, c.

2. Частица и античастица зарождаются в момент времени 0 в точке $(0, 0)$. Каждая из них за секунду проходит либо единицу расстояния вправо, либо единицу расстояния вверх. В момент времени $n+1$ они впервые встретились и аннигилировали. Сколькими способами это могло произойти?

3. Дано натуральное число n. Определите количество всех возможных последовательностей вида $1, a_1, a_2, \dots, a_n, 1$, в которых все $a_i > 1$ — натуральные числа, таких, что каждый некрайний член последовательности является делителем суммы своих соседей.

Глава 3

9-3 (9-3)

Симметрические многочлены

Определение. Многочлен от n переменных называется *симметрическим,* если он не меняется при любых перестановках его переменных.

Примеры симметрических многочленов:

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k\,; \quad x_1 x_2 \ldots x_n\,; \quad (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2\,.$$

Определение. *Элементарными симметрическими многочленами* называются многочлены σ_k:

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}\,.$$

1. Выразите через элементарные симметрические многочлены:
(а) $(a+b)(b+c)(a+c)$; **(б)** $(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2$;
(в) $a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b$.

Основная теорема о симметрических многочленах. Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить как многочлен от элементарных симметрических многочленов.

Определение. Говорят, что упорядоченный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ мажорирует набор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, если существует такое индекс i, для которого верно $\alpha_i > \beta_i$ и $\alpha_j = \beta_j$ для $j < i$.

Таким образом мы можем упорядочить множество строк длины n. Такой порядок называется *лексикографическим.*

2. Пусть дан симметрический многочлен от n переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим все его мономы. Назовем моном $a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ *старшим,* если упорядоченный набор показателей $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ мажорирует упорядоченные наборы показателей остальных мономов относительно лексикографического порядка.
(а) Докажите, что старший моном произведения двух многочленов равен произведению старших мономов сомножителей.
(б) Докажите, что для любого монома $q = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$, существуют такие неотрицательные числа β_1, β_2, …, β_n, что старший моном многочлена $\sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2} \ldots \sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с q, причем числа определены однозначно.
(в) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

3. Дан многочлен $P_n(x)$ степени n с рациональными коэффициентами. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — его корни (возможно, комплексные). Также дан симметрический многочлен $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что число $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ рационально.

4. **Важная задача.** Рассмотрим уравнение $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Пусть a, b, c — его корни (возможно, комплексные, не обязательно различные).

(а) Докажите, что $(a-b)^2(b-c)^2(a-c)^2 = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2$.

(б) Найдите необходимое и достаточное условие на коэффициенты p, q, r, при котором числа a, b, c вещественные.

(в) Найти необходимое и достаточное условие на коэффициенты p, q, r, при котором числа a, b, c вещественные и неотрицательные.

5. Многочлен $x^{1000} + y^{1000}$ выразили через элементарные симметрические как $P(x + y, xy)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена P.

6. Многочлен

$$P_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$$

называется *Ньютоновской суммой.* Докажите, что выполнены *тождества Ньютона*:

$$\sigma_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\sigma_{k-i}P_i\,.$$

pqr-метод

Определение. Тройку действительных чисел (p, q, r) будем называть *допустимой,* если корни a, b, c ассоциированного с ними уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ действительные и неотрицательные (см. задачу 4c из предыдущего листика).

1. **(а) Лемма о *r*.** Пусть для заданных $p = p_0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно r такое, что тройка (p_0, q_0, r) допустима. Докажите, что
   - для минимального r такого, что тройка (p_0, q_0, r) допустима, в соответствующей тройке a, b, c либо есть два равных числа, либо одно из чисел равно 0;
   - для максимального r такого, что тройка (p_0, q_0, r) допустима, в соответствующей тройке a, b, c есть два равных числа.

   (б) Лемма о *q*. Пусть для заданных $p = p_0$ и $r = r_0$ существует хотя бы одно q такое, что тройка (p_0, q, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального q такого, что тройка (p_0, q, r_0) допустима, в соответствующей тройке a, b, c есть два равных числа.

   (в) Лемма о *p*. Пусть для заданных $r = r_0 > 0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно p такое, что тройка (p, q_0, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального p такого, что тройка (p, q_0, r_0) допустима, в соответствующей тройке a, b, c есть два равных числа. Останется ли утверждение верным, если $r_0 = 0$?

С помощью этих лемм мы получаем мощный аппарат для решения неравенств, называемый *pqr-методом*[1]. Действительно, пусть у нас есть неравенство, записываемое в виде $P(a, b, c) \geqslant 0$, где P — симметрический многочлен. Выражая его в терминах элементарных симметрических многочленов p, q, r, мы получим новое неравенство, сводимое к тривиальному частному случаю.

Пример. Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$ при $a, b, c \geqslant 0$.

Решение. Перепишем исходное неравенство в терминах p, q, r: $p^2 - 2q \geqslant q$. Зафиксируем, к примеру, значения $p = p_0$ и $r = r_0$. Теперь надо доказать неравенство $3q \leqslant p_0^2$. Заметим, что если мы докажем неравенство для максимального q, то оно будет верно для всех q. По лемме о q, его максимальное значение достигается, когда какие-нибудь из переменных a, b, c равны. Без ограничения общности, $a = b = x, c = z$. Поскольку неравенство $3q \leqslant p_0^2$ равносильно исходному, то после подстановки в исходное неравенство получим $2x^2 + z^2 \geqslant x^2 + 2xz \Leftrightarrow (x - z)^2 \geqslant 0$, что очевидно верно.

2. Для неотрицательных чисел a, b, c верно, что $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ca).$$

[1] Этот метод также известен под именем uvw. Отличие заключается лишь в переобозначении $p = 3u$, $q = 3v^2$, $r = w^3$.

3. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{9 - ab} + \frac{1}{9 - ac} + \frac{1}{9 - bc} \leqslant \frac{3}{8}\,.$$

4. *(USA TST, 2001)* Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$ab + bc + ac - abc \leqslant 2\,.$$

5. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что

$$a^3(a - b)(a - c) + b^3(b - a)(b - c) + c^3(c - a)(c - b) \geqslant 0\,.$$

6. Для неотрицательных чисел a, b, c верно, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Докажите, что

$$2(a + b + c - 2)^2 + (ab + bc + ac)(2 + 3a + 3b + 3c) \geqslant 35\,.$$

Корни из единицы

Напоминание. Все комплексные числа, кроме 0, представимы в *тригонометрической форме:* $z = r \cdot (\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$. Вещественные числа φ и $r > 0$ называются *аргументом* и *модулем* комплексного числа z соответственно. Величина φ определяется с точностью до прибавления $2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Модуль числа z равен расстоянию между точками 0 и z на комплексной плоскости, аргумент равен направленному углу между положительным направлением вещественной оси и вектором с началом в 0 и концом в z.

Числа в тригонометрической форме очень удобно умножать:

$$r_1(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1)) \cdot r_2(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Иначе говоря, *при перемножении модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Определение. *Корнями n-й степени из единицы* называются числа w: $w^n = 1$. Очевидно, что эти корни имеют вид $w_k = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi k}{n})$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Определение. Корень w_k n-й степени из единицы называется *примитивным,* если НОД$(k, n) = 1$.

1. Докажите, что корень w n-й степени из единицы примитивный тогда и только тогда, когда все числа $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$ различны.

2. Найдите:
   (а) $\sigma_1 = w_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1}$;
   (б) $w_0^m + w_1^m + \ldots + w_{n-1}^m$ *(как ответ зависит от m?)*;
   (в) $\sigma_2 = w_0 w_1 + w_0 w_2 + \ldots + w_{n-2} w_{n-1}$;
   (г) $\sum\limits_{\substack{0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < \\ < i_p \leqslant 2p-1}} w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_p}$, где p — простое и $w_{p+i} = w_i$.

3. *Фильтрующее свойство корней.* Пусть $P(x) = \sum\limits_j a_j x^j$ — некоторый многочлен, и w_k — примитивный корень n-й степени. Докажите, что

$$\frac{P(x) + P(w_k x) + P(w_k^2 x) + \ldots + P(w_k^{n-1} x)}{n} = \sum_{n|j} a_j x^j.$$

4. **(а)** Пусть $\alpha = \cos(\frac{2\pi}{n}) + \mathrm{i} \cdot \sin(\frac{2\pi}{n})$. Докажите, что

$$n = (1-\alpha) \cdot (1-\alpha^2) \cdot (1-\alpha^3) \cdot \ldots \cdot (1-\alpha^{n-1}).$$

(б) Для каких других корней n-й степени из единицы это тождество выполняется?

(в) Для нечетных n докажите, что

$$\sqrt{n} = \left|(1-\alpha)\cdot(1-\alpha^2)\cdot(1-\alpha^3)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha^{\frac{n-1}{2}})\right|.$$

(г) Выпишите аналогичное равенство для четного n.

5. Даны многочлены $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ такие, что $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)$ делится на $1+x+x^2+x^3+x^4$. Докажите, что $P(x)$ делится на $x-1$.

Окружности Лемуана

В этой серии обозначения, введеные в каждой задаче, распространяются на все последующие.

Определение. Точку пересечения симедиан треугольника называют *точкой Лемуана.*

1. Дан остроугольный треугольник ABC, L — его точка Лемуана. Окружность (BLC) пересекает прямые AB и AC в точках A_b и A_c. Точки B_a, B_c и C_a, C_b определяются аналогично. Докажите, что треугольники AA_bA_c, BB_aB_c и CC_aC_b имеют общую точку пересечения медиан.

2. **Вторая окружность Лемуана.** Точки A_1 и A_2 взяты на сторонах AB и AC так, что B, A_1, A_2 и C лежат на одной окружности и A_1, A_2, L — на одной прямой. Аналогично определим точки B_1, B_2 (B_1 на BA, B_2 на BC) и C_1, C_2 (C_1 на CA, C_2 на CB). Докажите, что

(а) A_1, A_2, B_1 и C_1 лежат на одной окружности;

(б) A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на одной окружности *(подсказка: используйте рад. оси)*.

3. **Первая окружность Лемуана.** Пусть O — центр (ABC). Точки A' и A'' взяты на AB и AC так, что $A'A'' \parallel BC$ и A', A'', L — на одной прямой. Аналогично определим точки B', B'' и C', C''. Докажите, что

(а) A', A'', B', B'', C' и C'' лежат на одной окружности;

(б) центр окружности из прошлого пункта лежит на OL.

4. **Третья окружность Лемуана.** Докажите, что точки A_b, A_c, B_a, B_c и C_a, C_b лежат на одной окружности.

5. Обозначим через S центр третьей окружности Лемуана. Докажите, что S лежит на OL и справедливо соотношение $LS = \frac{1}{2}LO$.

Окружность Нойберга-Минера

В задачах ниже дан четырехугольник $ABCD$ и M — его точка Микеля. Пусть $E = AB \cap CD$ и $F = BC \cap AD$. Касательные к окружностям (BEC), (AED), (FAB) и (FDC), проведенные в точке M, пересекают прямые BC, AD, AB и DC в точках Y, X, Z и T.

1. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный тогда и только тогда, когда A, M, X и Z на одной окружности.

2. Докажите, что (FXY) и (EZT) касаются.

3. **Прямая Нойберга-Минера.** Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — вписанный тогда и только тогда, когда X, Y, Z и T лежат на одной прямой.

4. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписанный в окружность с центром в O, G — точка пересечения диагоналей $ABCD$. Докажите, что прямая Нойберга-Минера перпендикулярна OG.

5. **Окружность Нойберга-Минера.** Пусть точки P, Q, R и S лежат на прямых AB, BC, CD и DA (вне соответсвующих отрезков) и верны равенства:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AD^2}{BC^2}, \quad \frac{QB}{QC} = \frac{AB^2}{CD^2}, \quad \frac{RC}{RD} = \frac{BC^2}{AD^2}, \quad \frac{SA}{SD} = \frac{AB^2}{CD^2}.$$

Докажите, что P, Q, R и S лежат на одной окружности.

Посчитай меня комплексно

1. **Теорема Эйлера о четырехугольнике.** Обозначим через a, b, c и d длины сторон выпуклого четырехугольника, e и f — длины его диагоналей, а g — длина отрезка между серединами диагоналей. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4g^2\,.$$

2. На сторонах выпуклого четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что прямые, соединяющие центры противоположных квадратов, перпендикулярны.

3. Дан треугольник ABC, вписанный в окружность ω и описанный около окружности с центром в точке I. Прямые AI, BI и CI пересекают ω в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно соответствующих сторон треугольника. Докажите, что:
   (а) Точка I — ортоцентр треугольника A_2, B_2 и C_2.
   (б) Окружность $(A_2B_2C_2)$ проходит через ортоцентр ABC.

4. Дан вписанный четырехугольник.
   (а) Докажите, что середины отрезков, соединяющих одну из его вершин с ортоцентром треугольника, образованного тремя другими, совпадают.
   (б) И эта точка вместе с точкой пересечения диагоналей и точками пересечения продолжений противоположных сторон лежит на одной окружности.

5. **Теорема Брианшона.** Шестиугольник описан около окружности. Докажите, что три его главные диагонали конкурентны.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF, пересекающиеся в точке H. Пусть O — центр описанной окружности ω. Касательные к окружности ω, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке T. Точки K и L симметричны точке O относительно AB и AC соответственно. Окружности (DFK) и (DEL) пересекаются в точке P, отличной от D. Докажите, что точки P, D, T лежат на одной прямой.

Поворотная гомотетия

Теорема о существовании и единственности. Существует и единственна поворотная гомотетия, переводящая отрезок $\overrightarrow{AB}$ в не параллельный ему отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Теорема о двойственной поворотной гомотетии. Центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок $\overrightarrow{AA_1}$ в отрезок $\overrightarrow{BB_1}$.

Теорема о поворотной гомотетии. Пусть окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в точке A, переводящую ω_1 в ω_2. Тогда образ произвольной точки P окружности ω_1 — такая точка Q, что B, P, Q — одна прямая.

Лемма о воробьях. Пусть точки X_t и Y_t движутся с постоянными скоростями (не обязательно равными) по двум фиксированным прямым, пересекающимся в точке O. Через X_t и Y_t обозначим их положение в момент времени t. Тогда (X_tOY_t) будет проходить через фиксированную точку.

В задачах ниже *нельзя* использовать подобие.

1. Дано два правильных пятиугольника с общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника занумерованы против часовой стрелки числами от 1 до 5, причем номер общей вершины — 1. Докажите, что 4 прямые, проходящие через вершины с одинаковыми номерами, пересекаются в одной точке.

2. По двум прямым, пересекающимся в точке Z, с постоянной скоростью движутся точки X и Y. Точка K делит отрезок XY в постоянном отношении. Докажите, что K движется по прямой.

3. Многоугольник $A_1A_2A_3\ldots A_n$ подобен $B_1B_2\ldots B_n$ (вершина A_1 соответствует B_1, вершина A_2 — B_2, ..., вершина A_n — B_n). Точки C_1, C_2, ..., C_n лежат на отрезках A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n соответственно и делят их в равных отношениях. Докажите, что многоугольник $C_1C_2\ldots C_n$ подобен $A_1A_2A_3\ldots A_n$.

4. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Перпендикуляр, опущенный из точки H на биссектрису угла $\angle ACB$, пересекает стороны CA и CB в точках P и Q. Окружности, описанные около треугольников ABC и CPQ, пересекаются второй раз в T. Докажите, что прямая TH проходит через середину AB.

5. Даны два одинаково ориентированных квадрата $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 пересекают серединные перпендикуляры к отрезкам A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_1B_1 в точках P, Q, R, S соответственно. Докажите, что $PR \perp QS$.

Поворотная гомотетия и комплексные числа

1. Точки K, M, L, N отмечены на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно так, что K лежит между M и B, а L лежит между N и C. Если
$$\frac{BK}{KM} = \frac{CL}{LN},$$
докажите, что ортоцентры треугольники ABC, AKL и AMN лежат на одной прямой.

2. Пусть P — произвольная точка на дуге BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащая точку A. Пусть I_1 и I_2 — инцентры треугольников PAB и PAC соответственно. Докажите, что:
(а) Окружности, описанные около треугольников PI_1I_2, проходят через фиксированную точку.
(б) Окружности с диаметром I_1I_2 проходят через фиксированную точку.
(в) Середины отрезков I_1I_2 лежат на фиксированной окружности.

3. Внутри треугольника ABC отмечены изогонально сопряженные точки P и Q. Обозначим через O_1, O_2, O_3, O_1', O_2', O_3', O, O' — центры описанных окружностей треугольников PBC, PCA, PAB, QBC, QCA, QAB, $O_1O_2O_3$ и $O_1'O_2'O_3'$ соответственно. Докажите, что $OO' \parallel PQ$.

Разрезания на параллелограммы

1. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя разрезать на параллелограммы.

2. В правильном шестиугольнике со стороной n нарисована сетка из правильных треугольников со стороной 1. Шестиугольник разрезан вдоль линий сетки на $3n^2$ ромбов со стороной 1 трёх направлений: ▱, ▱, ◊. Докажите, что ромбов каждого направления поровну.

3. **(а)** Докажите, что если выпуклый многоугольник можно разбить на несколько параллелограммов, то его противоположные стороны параллельны и равны.
(б) Докажите, что если в выпуклом многоугольнике противоположные стороны параллельны и равны, то его можно разрезать на параллелограммы.
(в) Докажите, что если выпуклый многоугольник можно разрезать на выпуклые центрально-симметричные многоугольники, то у него тоже есть центр симметрии.

4. Выпуклый многоугольник разбит на параллелограммы. Вершину многоугольника, к которой примыкает только один параллелограмм, назовём *хорошей*. Докажите, что хороших вершин
(а) не менее одной; **(б)** не меньше трёх.

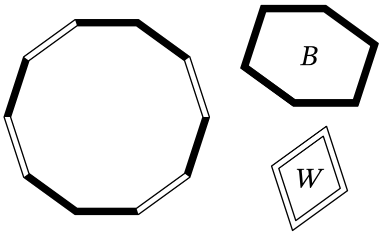
5. **(а)** Докажите, что площадь выпуклого центрально симметричного $2n$-угольника на координатной плоскости с вершинами в целых точках не меньше $\frac{n(n-1)}{2}$.
(б) Докажите, что площадь любого выпуклого $2n$-угольника с вершинами в точках с целыми координатами не меньше $\frac{n(n-1)}{2}$.

6. Правильный 100-угольник разрезан на параллелограммы.
(а) Докажите, что среди них не менее 25 прямоугольников.
(б) Найдите их общую площадь, если длина стороны 100-угольника равна 1.

7. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка D симметрична A относительно BC. Можно ли разбить треугольник ABC на несколько многоугольников, каждый многоугольник параллельно перенести так, чтобы из них составился треугольник BCD?

Разрезания на параллелограммы, как будто бы вам одного листка было мало

1. Даны натуральные числа $w, b \geqslant 2$, $n = w + b$. Стороны правильного $2n$-угольника случайно раскрашены в два цвета так, что любые две противоположные стороны покрашены в один цвет и всего $2w$ белых сторон и $2b$ чёрных. Все белые отрезки параллельно перенесли и собрали из них выпуклый многоугольник W; все чёрные отрезки параллельно перенесли и собрали из них выпуклый многоугольник B. Докажите, что разность площадей многоугольников W и B не зависит от раскраски $2n$-угольника.



2. Выпуклый центрально-симметричный $2n$-угольник разрезан на $\frac{n(n-1)}{2}$ параллелограммов так, никакая вершина ни одного из параллелограммов не лежит на стороне другого параллелограмма и не лежит на стороне исходного многоугольника. Для каждого из n направлений сторон $2n$-угольника назовём *цепью* последовательность всех параллелограммов, у которых одна из сторон как раз этого направления.

Докажите или опровергните: для любого разрезания можно нарисовать на плоскости n попарно пересекающихся отрезков и сопоставить цепям — отрезки, а параллелограммам — точки пересечения пар отрезков так, чтобы для каждой цепи параллелограммы в ней шли в том же порядке, что и соответствующие точки на соответствующих отрезках.

Триангуляции

1. Докажите, что при $n \geqslant 4$ в любом разрезании выпуклого n-угольника непересекающимися диагоналями на треугольники найдутся два треугольника, две стороны каждого из которых служат сторонами исходного n-угольника *(«уши триангуляции»)*.

2. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в исходном многоугольнике есть две равные стороны.

3. Каждой триангуляции сопоставим «двойственный» граф, вершинами которого являются треугольники триангуляции, а рёбрами соединены треугольники, имеющие общую сторону. Докажите, что граф является двойственным к некоторой триангуляции тогда и только тогда, когда граф является деревом, степень каждой вершины которого не больше 3.

4. Сколько существует способов разрезать выпуклый n-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы никакой треугольник не имел в качестве всех трёх своих сторон три диагонали исходного n-угольника?

5. Выпуклый 2022-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Все треугольники раскрашены в чёрный и в белый цвета так, что любые два треугольника с общей стороной разного цвета. Какое наименьшее количество чёрных треугольников могло получиться?

6. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.

7. Дан выпуклый многоугольник, никакие четыре вершины которого не лежат на одной окружности. Назовём окружность *граничной,* если она проходит через три подряд идущие вершины многоугольника и содержит многоугольник внутри. Назовём окружность *внутренней,* если она проходит через три попарно несоседние вершины многоугольника и содержит многоугольник внутри. Докажите, что граничных окружностей на две больше, чем внутренних.

8. Дан выпуклый n-угольник. Назовем окружность *полувписанной,* если она полностью лежит в этом n-угольнике и касается трёх его сторон. Известно, что никакие четыре прямые, содержащие стороны n-угольника, не касаются одной окружности. Докажите, что полувписанных окружностей ровно $n-2$.

Числа Каталана

Последовательность из знаков «(» и «)» длины $2n$ называется *правильной,* если выполнены два условия:

- в ней поровну символов «(» и «)»;
- на любом префиксе этой последовательности символов «(» не меньше, чем «)».

Количество всевозможных правильных скобочных последовательностей длины $2n$ обозначается символом C_n и называется n-м *числом Каталана.*

1. Докажите, что в правильной скобочной последовательности можно единственным способом разбить скобки на пары так, чтобы
- в любой паре были разные скобки и при этом скобка «(» стояла левее скобки «)»;
- две любые пары скобок не были «зацеплены». То есть запрещено такое:

$$\ldots (_1 \ldots (_2 \ldots)_1 \ldots)_2 \ldots .$$

2. Найдите количество способов разбить целые числа от 1 до $2n$ на пары так, чтобы для любой четвёрки чисел $p < q < r < s$ в разбиение не могут одновременно входить пары
(а) $\{p,r\}$ и $\{q,s\}$; **(б)** $\{p,s\}$ и $\{q,r\}$.

3. **(а)** Частица вылетает из точки $(0,0)$ и за одну секунду проходит либо единицу расстояния вправо, либо единицу вверх. Докажите, что количество способов добраться до точки (n,n), не поднимаясь строго выше прямой $y = x$, равно C_n.
(б) Докажите, что количество способов, которыми частица может добраться до точки (n,n), поднявшись выше прямой $y = x$, совпадает с количеством способов, которыми частица может добраться до точки $(n-1, n+1)$.
(в) Выведите явную формулу числа Каталана из предыдущего пункта.

4. Докажите, что числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$\mathrm{C}_{n+1} = \mathrm{C}_0\mathrm{C}_n + \mathrm{C}_1\mathrm{C}_{n-1} + \mathrm{C}_2\mathrm{C}_{n-2} + \ldots + \mathrm{C}_n\mathrm{C}_0 \quad \text{при } n \geqslant 0, \quad \mathrm{C}_0 = 1\,.$$

5. Сколькими способами можно разрезать выпуклый n-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники? Разрезания, отличающиеся поворотом, считаются различными.

6. **(а)** Дана последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$, состоящая из $n+1$ «1» и n «-1». Докажите, что существет ровно один индекс i, для которого все суммы a_i, $a_i + a_{i+1}$, …, $a_i + \ldots + a_k$, … положительны. (Нумерация индексов идёт по модулю $2n+1$.)
(б) Выведите явную формулу числа Каталана из предыдущего пункта.

7. *Упорядоченным корневым деревом* назовём дерево с выделенной вершиной, подвешенной за эту вершину, потомки каждой вершины которого пронумерованы.

(а) Найдите количество упорядоченных корневых деревьев с n вершинами.

(б) Найдите количество *бинарных* деревьев с n листьями — упорядоченных корневых деревьев, у каждой вершины которого 0 либо 2 потомка.

Числа Каталана. Добавка

1. Найдите количество способов выписать в ряд числа от 1 до n каждое по одному разу так, чтобы ни для какой тройки чисел $a < b < c$ эти числа не встречались в порядке **(а)** b, c, a; **(б)** a, b, c.

2. Частица и античастица зарождаются в момент времени 0 в точке $(0, 0)$. Каждая из них за секунду проходит либо единицу расстояния вправо, либо единицу расстояния вверх. В момент времени $n+1$ они впервые встретились и аннигилировали. Сколькими способами это могло произойти?

3. Дано натуральное число n. Определите количество всех возможных последовательностей вида $1, a_1, a_2, \dots, a_n, 1$, в которых все $a_i > 1$ — натуральные числа, таких, что каждый некрайний член последовательности является делителем суммы своих соседей.

Приложение A

Анонсы спецкурсов

Теорема Руффини-Абеля

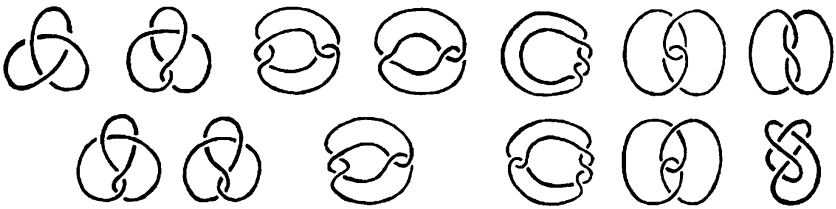
Курс посвящен решению уравнений — третьей, четвертой и пятой степеней. Будет доказано, что уравнение пятой степени не решается в радикалах.

Инварианты узлов и зацеплений

Теория узлов и зацеплений — бурно развивающийся раздел математики, возникший на стыке топологии, комбинаторики и программирования. Мы изучим наглядные задачи об *эквивалентности (изотопности)* узлов и зацеплений, т. е. о возможности получить их друг из друга непрерывной деформацией, в процессе которой не возникает самопересечений.

Основные идеи показываются на простейших частных случаях («олимпиадных» примерах), свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Поэтому для изучения курса не нужны предварительные знания. При этом каждое следующее занятие будет рассчитано на тех, кто решил большинство простых задач на понимание предыдущих.

Зачет будет ставиться на основании решения этих задач. Будут предложены необязательные задачи для исследования.



Если Вы перед курсом *покажете, что некоторые узлы из первого ряда на картинке эквивалентны,* то курс будет для Вас доступен.

Последовательности Сомоса

Первый нетривиальный пример последовательности Сомоса — это последовательность Сомос-4. Она задаётся рекуррентным соотношением

$$s_{n+2}s_{n-2} = s_{n+1}s_{n-1} + s_n^2$$

и начальными условиями $s_0 = s_1 = s_2 = s_3 = 1$. Мы будем разбираться с такими нетривиальными свойствами, как целочисленность подобных последовательностей и их периодичность по любому модулю.

Многочлены, кривые и геометрия

Мы познакомимся с многочленами от двух переменных и кривыми, которые задаются этими многочленами.

Дадим красивое доказательство теорем Паппа и Паскаля с помощью многочленов (без вычислений!) и доказательство теоремы Брианшона с помощью радикальных осей.

Среди вопросов, которые будут затрагиваться: почему радикальная ось — это прямая, можно ли задать на плоскости многочленом одну ветвь гиперболы, в скольких точках могут пересекаться две плоские алгебраические кривые и др.

Геометрическая экскурсия: от Фейербаха до кубик

Мы начнем наше путешествие по миру евклидовой геометрии с простой олимпиадной задачи с турнира Baltic Way. Решение этой задачи выведет нас на оригинальное доказательство известной теоремы Фейербаха. Заодно «почти бесплатно» мы получим любопытные свойства точки Фейербаха.

Эти свойства натолкнут нас на мысль об обобщении теоремы Фейербаха. Мы сформулируем и докажем классическими методами теоремы Айера, Гринберга, Акопяна — Заславского — Фонтене.

Если останется время, то мы поговорим об элементах теории кубических кривых и обсудим то, насколько значительно упрощается доказательство теорем с привлечением такой техники.

Приходите! Скучно точно не будет :)

P. S. Сложная задачка для затравки, которая станет очевидной (после спецкурса):

ЮМТ-2020. Гранд-лига. Финал. В треугольнике ABC выбираются точки P и Q. Прямые AQ, BQ и CQ пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Оказалось, что прямые PA_1,PB_1 и PC_1 перпендикулярны сторонам BC, AC и AB соответственно. Докажите, что на прямой PQ лежит центр описанной окружности треугольника ABC.

Линейно-алгебраический метод в комбинаторике

Что общего у следующих вопросов:

- Какое наибольшее количество точек можно расположить на плоскости так, чтобы все попарные расстояния были нечётными?
- На какое наименьшее количество полных двудольных графов можно разбить полный граф на n вершинах?
- Какое наибольшее количество подмножеств нечётного размера n-элементного множества можно выбрать так, чтобы пересечение любых двух подмножеств имело чётный размер?

Оказывается, что все эти задачи можно решить похожим образом, используя линейно-алгебраический метод.

На спецкурсе мы познакомимся с базовыми принципами линейной алгебры и их применением в ряде комбинаторных задач, как в приведённых выше, так и других.