$$\int\limits_{\text{9 июня 2023}}^{\text{18 июня 2023}} \left(\begin{array}{c} \text{Московские сборы} \\ \text{секция математики} \end{array} \right) \mathrm{d}t$$

Немного о структуре

Материалы разбиты по группам, в пределах каждой группы отсортированы по темам. Отдельно приведены анонсы спецкурсов.

Материалы, общие для нескольких групп, дублируются.

Оглавление

Глава 1

10-1 (10-1)

Нормы и расширения

Определение. Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$ — приведенный неприводимый многочлен степени n с целыми коэффициентами. Пусть также $\alpha \coloneqq \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — его (возможно, комплексные) корни (они различны, т. к. f неприводим). Тогда множество чисел

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} : a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}[x] / (f(x))$$

называется *расширением кольца целых чисел.*

Множество $\mathbb{Z}[\alpha]$ является кольцом, т. е. его элементы можно складывать, вычитать и умножать, и эти операции удовлетворяют всем естественным свойствам, привычным нам по опыту работы с целыми числами.

Если $a \coloneqq a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ — произвольный элемент кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$, то число $N(a) \coloneqq \coloneqq \prod_{k=1}^{n}(a_0 + a_1\alpha_k + \dots + a_{n-1}\alpha_k^{n-1})$ называется *нормой* числа a.

Утверждение. Норма любого элемента кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$ является вещественным числом. Норма мультипликативна: $N(ab) = N(a)N(b)$ для любых элементов $a, b \in \mathbb{Z}[\alpha]$.

Полезные примеры:

- Кольцо гауссовых целых чисел $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{x + \mathrm{i}y : x, y \in \mathbb{Z}\}$, где $\mathrm{i}^2 = -1$. Норма числа $u = x + \mathrm{i}y$ равна $N(u) = x^2 + y^2$.
- Кольцо чисел Эйзенштейна $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \{x + y\varepsilon : x, y \in \mathbb{Z}\}$, где $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Норма числа $u = x + y\varepsilon$ равна $N(u) = x^2 - xy + y^2$.
- Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d} : x, y \in \mathbb{Z}\}$ (здесь d — натуральное число, отличное от точного квадрата). Норма числа $u = x + y\sqrt{d}$ равна $N(u) = x^2 - dy^2$.

Мысль. Часто в условии задачи фигурируют нормы элементов из некоторых расширений кольца целых чисел. В таком случае оказывается полезным вместо нормы элемента рассмотреть сам элемент (например, вместо числа $x^2 + y^2$ рассмотреть число $x + \mathrm{i}y$). При этом полезно использовать мультипликативность нормы.

1. **(а)** Докажите, что для любого целого числа k существует бесконечно много троек (a, b, c) целых чисел, удовлетворяющих уравнению $(a^2 - k)(b^2 - k) = c^2 - k$.
(б) Даны целые числа p и q. Докажите, что для любого целого числа n существует пара целых чисел (a, b), для которых выполнено равенство $\dfrac{a^2 + pa + q}{b^2 + pb + q} = n^2 + pn + q$.

2. Докажите, что для любого натурального числа n существует пара натуральных чисел (a, b), таких что $\dfrac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1} = n^2 + n + 1$.

3. Докажите, что любое рациональное число представимо в виде $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, где a, b, c и d — некоторые целые числа.

4. Пусть $p > 2$ — простое число. Найдите остаток числа $\prod_{k=1}^{p-1}(k^2+1)$ по модулю p.

5. **(а)** Докажите, что для любого ненулевого элемента a кольца $\mathbb{Z}_p[\sqrt{d}]$, где p — простое число, а d — целое число, такое, что $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$, существует обратный элемент a^{-1}, такой что $a \cdot a^{-1} \equiv_p 1$.

(б) Докажите, что в условиях предыдущего пункта справедлив аналог малой теоремы Ферма: $a^{p^2-1} \equiv_p 1$ для всех $a \in \mathbb{Z}_p[\sqrt{d}]$, $a \not\equiv_p 0$.

(в) Пусть p — нечетный простой делитель числа $\frac{(2+\sqrt{3})^{2^n}+(2-\sqrt{3})^{2^n}}{2}$. Докажите, что p^2-1 кратно 2^{n+3}.

6. Простое число p и натуральное число a таковы, что числа p и ap представимы в виде $x^2 - 2017y^2$ с целыми x и y. Докажите, что число a тоже представимо в таком виде.

7. Пусть k — фиксированное натуральное число и S — конечное множество нечетных простых чисел. Докажите, что существует не более одного способа расставить элементы множества S по кругу (с точностью до поворотов и отражений) так, чтобы произведение любых двух соседних элементов имело бы вид $x^2 + x + k$ для некоторого целого числа x.

Нормы и расширения — классика

Заметим, что в кольце $\mathbb{Z}[\alpha]$ аналогами чисел ± 1, т. е. чисел, на которые делится любое число, являются элементы a такие, что $N(a) = \pm 1$. Такие элементы называются *обратимыми.*

Полезные примеры:

- Кольцо гауссовых целых чисел $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{x + \mathrm{i}y\colon\ x, y \in \mathbb{Z}\}$, где $\mathrm{i}^2 = -1$. Норма числа $u = x + \mathrm{i}y$ равна $N(u) = x^2 + y^2$. Обратимые элементы — ± 1, $\pm\mathrm{i}$.
- Кольцо чисел Эйзенштейна $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \{x + y\varepsilon\colon\ x, y \in \mathbb{Z}\}$, где $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Норма числа $u = x + y\varepsilon$ равна $N(u) = x^2 - xy + y^2$. Обратимые элементы — ± 1, $\pm\varepsilon$, $\pm(1 + \varepsilon)$.
- Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d}\colon\ x, y \in \mathbb{Z}\}$ (здесь d — натуральное число, отличное от точного квадрата). Норма числа $u = x + y\sqrt{d}$ равна $N(u) = x^2 - dy^2$. Обратимые элементы — решения *уравнения Пелля* $x^2 - dy^2 = \pm 1$.

Утверждение. Кольца $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ и $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ являются факториальными (т. е. их элементы допускают единственное разложение на простые с точностью до умножения на обратимые элементы).

Доказательство. На самом деле оба кольца являются даже *евклидовыми*, т. е. в них есть операция деления с остатком: для любых двух элементов a, b, таких, что $b \neq 0$, существуют такие элементы q и r, что $a = bq + r$ и $N(r) < N(b)$. Для доказательства рассмотрим на комплексной плоскости *решетку* $L \coloneqq \{\lambda b\}$, где λ — произвольный элемент нашего кольца (т. е. $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ или $\mathbb{Z}[\varepsilon]$). Тогда фундаментальная область такой решетки является параллелограммом (квадратом для гауссовых чисел и ромбом с углом 60° для чисел Эйзенштейна), и в одном из таких параллелограммов окажется точка a. Рассмотрим ближайшую к a вершину параллелограмма. Эта вершина соответствует некоторому элементу qb, а разность $a - bq$ — это число r. Несложно посчитать, что $N(r) < N(b)$ (поскольку расстояние от точки внутри указанных фундаментальных областей до ближайшей вершины строго меньше длины стороны).

Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ также факториально, а кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ при $d \geqslant 3$ — нет.

Пример. Решить уравнение Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$ в натуральных числах.

Решение. Будет рассматривать случай, когда x, y, z взаимно просты в совокупности; тогда $(x, y) = 1$. Заметим, что числа x и y должны иметь разную четность; без ограничения общности будем считать, что x нечетно, а y четно. Рассмотрим гауссово целое число $u \coloneqq x + \mathrm{i}y$. Тогда уравнение Пифагора примет вид $u \cdot \overline{u} = z^2$. Заметим, что числа u и $\overline{u}$ взаимно просты. Действительно, если $(u, \overline{u}) = d \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, то $d \mid u + \overline{u} = 2x$ и $d \mid u - \overline{u} = 2y$, поэтому $N(d) \mid 4x^2$ и $N(d) \mid 4y^2$, а так как $(x, y) = 1$, то $N(d) \mid 4$. С другой стороны, $N(d) \mid N(u) = x^2 + y^2$, а это нечетное число, поэтому $N(d) = 1$, то есть $d = \pm 1, \pm\mathrm{i}$. Значит, гауссовы числа u и $\overline{u}$ являются точными квадратами (с точностью до обратимого): $u = (m + \mathrm{i}n)^2$ или $\mathrm{i}(m - \mathrm{i}n)^2$.

Отсюда $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ и $z = m^2 + n^2$ (во втором случае x окажется четным). Чтобы x было нечетным, необходимо брать числа m и n разной четности ($m > n$ и $(m, n) = 1$).

1. **(а)** Докажите, что любое простое число вида $4k + 1$ представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.
   (б) Докажите, что каждое простое число p вида $6k+1$ представимо в виде a^2-ab+b^2 для некоторых целых a и b.

2. **(а)** Решите уравнение $x^2 + 2 = y^3$ в натуральных числах.
   (б) Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 = z^3$ не имеет решений в натуральных числах.

Теорема (Лагранж). *Любое натуральное число представимо в виде суммы квадратов четырех неотрицательных целых чисел.*

3. Докажите, что для любого нечетного простого числа p существуют такие целые числа x и y, такие, что число $x^2 + y^2 + 1$ делится на p.

4. Рассмотрим *пространство кватернионов*

$$\mathbb{H} \coloneqq \{a\mathrm{i} + b\mathrm{j} + c\mathrm{k} + d :\ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1\}$$

   (формально $\mathbb{H} = \mathbb{R}[x, y, z] \,/\, \langle x^2 + 1, y^2 + 1, z^2 + 1, xyz + 1\rangle$). Определим также *числа Гурвица*

$$\mathcal{H} \coloneqq \mathbb{Z}\Big[\frac{1 + \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k}}{2}, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\Big] = \Big\{\frac{a\mathrm{i} + b\mathrm{j} + c\mathrm{k} + d}{2} :\ a \equiv_2 b \equiv_2 c \equiv_2 d\Big\}.$$

   Нормой кватерниона $q = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k} + t$ назовем число $N(q) \coloneqq x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.
   (а) Докажите, что $N :\ \mathcal{H} \to \mathbb{Z}$.
   (б) Докажите, что если числа m и n представимы в виде суммы четырех квадратов, то число mn также представимо в виде суммы четырех квадратов.

5. Докажите, что кольцо $\mathcal{H}$ чисел Гурвица факториально. *Указание*: подумайте, зачем в определении чисел Гурвица нужно деление на 2.

6. Докажите теорему Лагранжа.

Уравнение Пелля — теория

Определение. *Уравнением Пелля* называется диофантово уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где d — не точный квадрат. *Уравнением типа Пелля* называется диофантово уравнение $x^2 - dy^2 = r$, где d — не точный квадрат. *Минимальным решением уравнения типа Пелля* называется натуральное решение (x_1, y_1), в котором число x_1 минимально.

Наша цель — описать все решения уравнения Пелля. Кстати, вопрос существования решения (хотя бы одного) у произвольного уравнения типа Пелля до сих пор открыт. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, состоящее из всех чисел вида $x + y\sqrt{d}$, где x, y — целые, а d — натуральное, не являющееся полным квадратом. Для каждого числа $x + y\sqrt{d}$ определим *норму* $N(x + y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2$. Решить уравнение Пелля означает найти все числа с нормой 1 в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

1. **(а)** Докажите *теорему Дирихле:* для любого вещественного иррационального числа ξ и натурального N существует такое целое число a и натуральное число b, что $b \leqslant N$ и $|b\xi - a| \leqslant 1/N$.
   (б) Докажите, что существует такое целое число n, что уравнение $x^2 - dy^2 = n$ имеет бесконечно много решений в целых числах. (*Указание:* возьмите $\xi = \sqrt{d}$ и оцените норму $a^2 - db^2$ с помощью теоремы Дирихле.)
   (в) Докажите, что если $x_1 \equiv_n x_2$ и $y_1 \equiv_n y_2$, где $n = N(x_2 + y_2\sqrt{d})$, то число $x_1 + y_1\sqrt{d}$ делится на число $x_2 + y_2\sqrt{d}$ в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
   (г) Докажите, что у уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$ существует решение в натуральных числах.
   (д) Пусть (a, b) — минимальное решение уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$. Докажите, что если $z = a + b\sqrt{d}$, то все натуральные решения (x_n, y_n) уравнения Пелля имеют вид $z^n = x_n + y_n\sqrt{d}$, причем других решений нет. Иначе говоря, операция $(x, y) \mapsto (ax + dby, ay + bx)$ переводит решение в следующее за ним решение. Геометрически это есть ни что иное как сдвиг гиперболы $x^2 - dy^2 = 1$. (*Указание:* обратите внимание, что сдвигаться по гиперболе можно в обе стороны.)

2. Найдите все решения в целых числах у следующих уравнений:
   (а) $x^2 - 5y^2 = 1$;
   (б) $x^2 - xy - y^2 = 1$;
   (в) $x^2 - 5y^2 = 7$;
   (г) $x^2 - 3y^2 = 13$.

3. При каких простых p уравнение $x^2 - py^2 = -1$ имеет решения?

4. Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1999$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

Уравнение Пелля — практика

Мысль. Уравнение Пелля возникает на практике в следующих ситуациях. Во-первых, это мощный инструмент для разных конструктивов. Во-вторых, это хороший способ разложить на множители число x^2+1 (хоть и не при всех x). В-третьих, иногда могут оказаться полезными конструкции, связанные с поиском решения уравнения Пелля: формулы $(a+b\sqrt{d})^n = x_n + y_n\sqrt{d}$, рекуррентный процесс $(x, y) \mapsto (ax + dby, ay + bx)$ и т. д.

1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, таких, что $n^2 + 1 \mid n!$.

2. Найти все целые a, при которых уравнение $x^2+axy+y^2 = 1$ имеет бесконечно много целых решений.

3. Пусть $p(n)$ — наибольший простой делитель числа $n^2 + 1$.
(а) Докажите, что существует бесконечно много троек (a, b, c) натуральных чисел, таких что $p(a) = p(b) = p(c)$.
(б) Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что у числа $n^2 + 1$ найдутся два положительных делителя, разность которых равна n.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел a, b, c, образующих арифметическую прогрессию, таких, что числа $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ являются точными квадратами.

Лемма Саваямы

В первых семи задачах даны вписанный в окружность Ω четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке P; и окружность ω, касающаяся Ω в точке X, а отрезков AP и BP — в точках S и T соответственно.

Лемма Саваямы. Прямая ST проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

1. Пусть прямая ST пересекает биссектрису угла ABC в точке I'.
  (а) Докажите, что точки B, X, T, I' лежат на одной окружности.
  (б) Докажите, что окружность (XSI') касается прямой BI'.
  (в) Докажите лемму Саваямы.

2. Докажите, что окружность (BXT) проходит через центр вписанной окружности треугольника ABP и центр C-вневписанной окружности треугольника BCP.

3. Докажите, что биссектриса угла CXD проходит через центр вписанной окружности треугольника CDP.

4. Пусть лучи CB и DA пересекаются в точке E. Докажите, что прямая через центры вписанных окружностей треугольников ABP, ABE и прямая через центры вписанных окружностей треугольников CDP, CDE пересекаются на окружности Ω.

5. **Теорема Тебо.** Пусть окружность ω' касается окружности Ω и отрезков BP и CP. Докажите, что линия центров окружностей ω и ω' проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

6. Пусть J_1 и J_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABP и CDP, а M — середина отрезка J_1J_2. Докажите, что длина касательной из M к ω равна MJ_1.

7. Пусть окружность ω_1 касается окружности Ω и отрезков CP и DP. Докажите, что одна из общих внешних касательных к ω и ω_1 параллельна BC, а другая AD.

8. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω с центром I. Две окружности, проходящие через вершины A и C, касаются ω в точках P и Q. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC, ADC и точки P, Q лежат на одной окружности.

9. Окружности Ω_1 и Ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке P, четырехугольник $ABCD$ вписан в Ω_1 так, что P лежит на дуге AB, не содержащей C. Лучи DA, CB касаются Ω_2 в точках E и F соответственно. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок EF в точке N. Прямая FP пересекает дугу AB, не содержащую P, в точке M. Докажите, что M — центр описанной окружности треугольника BCN.

10. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) вписана в окружность ω. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности ω, не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности ω.

11. В окружность Ω вписан пятиугольник $ABCDE$. Отрезки BE и CE пересекают AD в точках P и Q соответственно. Окружности ω_1 и ω_2 касаются Ω, при этом ω_1 касается отрезков AP в точке S и BP, а ω_2 касается отрезков DQ в точке T и CQ.
(а) Докажите, что точки пересечения общих внешних касательных к ω_1 и ω_2, к вписанным окружностям треугольников APE и DQE, а также к вписанным окружностям треугольников AQE и DPE совпадают.
(б) Окружность γ касается дуги AED в точке X и отрезков AB и CD. Докажите, что точки E, S, T и X лежат на одной окружности.

Теорема Дезарга об инволюции

Инволюцией называется отображение $f: M \to M$ из произвольного множества M в себя, при всех $x \in M$ удовлетворяющее $f(f(x)) = x$.

Проективная инволюция — это такое отображение f из прямой/пучка прямых/коники в себя, что f — инволюция, и f сохраняет двойные отношения.

Теорема Дезарга об инволюции. Даны четыре точки A, B, C, D общего положения и прямая ℓ, не проходящая через них. Тогда существует такая проективная инволюция $f: \ell \to \ell$, что если P и Q — точки пересечения прямой ℓ и произвольной кривой второго порядка, проходящей через точки A, B, C, D, то $f(P) = Q$.

Следствие. Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω. Прямая ℓ пересекает прямые AB, CD, BC, AD, AC, BD в точках X, X', Y, Y', Z, Z' соответственно и пересекает окружность Ω в точках T и T'. Тогда существует инволюция $f: \ell \to \ell$, меняющая местами пары точек $X \leftrightarrow X'$, $Y \leftrightarrow Y'$, $Z \leftrightarrow Z'$, $T \leftrightarrow T'$.

1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Прямая ℓ пересекает прямые AB, CD, BC, DA, AC, BD в точках X, X', Y, Y', Z, Z' соответственно. Известно, что на прямой ℓ эти шесть точек лежат в порядке $X{-}Y{-}Z{-}X'{-}Y'{-}Z'$. Докажите, что три окружности, построенные на отрезках XX', YY', ZZ' как на диаметрах, имеют две общие точки.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω. Окружность ω касается прямых AB и CD в точках X и Y и пересекает дугу AD окружности Ω в точках K и L. Прямая XY пересекает AC и BD в точках Z и T.
   (а) Докажите, что точки K, L, Z и T лежат на одной окружности;
   (б) Докажите, что эта окружность касается прямых AC и BD.

3. Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω, а E — точка пересечения его диагоналей. Прямая, проходящая через E, пересекает прямые BC и AD в точках K и L, а окружность ω в точках M и N, причём M лежит на отрезке EK. Докажите, что $KM = LN$ тогда и только тогда, когда $EK = EL$.

4. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отмечены ортоцентр H и середина M_A стороны BC. Лучи AM_A и M_AH пересекают окружность (ABC) в точках X_A и Y_A соответственно. Аналогично определены точки X_B, X_C, Y_B, Y_C. Докажите, что прямые X_AY_A, X_BY_B, X_CY_C пересекаются в одной точке, лежащей на прямой Эйлера треугольника ABC.

5. На плоскости фиксированы две пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2, а также две точки A и B, причем $A \in \ell_1$ и $A, B \notin \ell_2$. На прямой ℓ_2 выбираются переменные точки X и Y так, что прямая ℓ_1 — (внутренняя) биссектриса треугольника XAY. Докажите, что центры окружностей, описанных около всевозможных треугольников XBY, лежат на одной прямой.

Двойственная теорема Дезарга об инволюции. Даны четыре прямые a, b, c, d общего положения и точка L, не лежащая на них. Обозначим через (L) пучок прямых через точку L. Тогда существует такая проективная инволюция $f : (L) \to (L)$, что если p и q — касательные из L к произвольной кривой второго порядка, касающейся прямых a, b, c, d, то $f(p) = q$.

Следствие. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности ω. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, прямые BC и DA — в точке Q. Вне окружности ω и не на прямых AB, BC, CD, DA выбрана точка X. Тогда существует проективная инволюция $f : (X) \to (X)$, меняющая местами пары прямых $XA \leftrightarrow XC$, $XB \leftrightarrow XD$, $XP \leftrightarrow XQ$ и касательные из X к окружности ω.

6. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке I. Вне четырёхугольника взята точка S так, что никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой и $\angle ISB = \angle ISD$. Докажите, что $\angle ISA = \angle ISC$.

7. Пусть P — произвольная точка, отличная от вершин треугольника ABC, а l — произвольная прямая, проходящая через P. Пусть A', B', C' — точки пересечения прямых, симметричных PA, PB, PC относительно l, с BC, CA, AB соответственно. Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой.

8. На меньших дугах BC, CA, AB описанной окружности остроугольного треугольника ABC взяты точки D, E, F соответственно. Оказалось, что вписанная окружность ω треугольника ABC касается отрезков EF, FD, DE. Обозначим точки касания окружности ω с отрезками BC и EF через K и L соответственно. Прямые AL и DK вторично пересекают окружность (ABC) в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые BC, EF, DX, AY пересекаются в одной точке либо параллельны.

9. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Окружности ω_A, ω_B с центрами I, J вписаны в треугольники ACD, BCD. Вторая общая внешняя касательная к ω_A, ω_B касается ω_A в точке K, а ω_B в точке L. Докажите, что прямые AK, BL и IJ пересекаются в одной точке.

10. Общие касательные к описанной и A-вневписанной окружностям треугольника ABC пересекают прямую BC в точках X и Y. Докажите, что $\angle XAB = \angle CAY$.

11. На меньшей дуге BC описанной окружности треугольника ABC отмечена произвольная точка M. Касательные из точки M к вписанной окружности треугольника ABC пересекают прямую BC в точках X и Y. Докажите, что окружность (MXY) проходит через точку T_A касания A-полувписанной окружности с окружностью (ABC).

Теорема Дезарга об инволюции. Добавка

1. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Окружности ω_1, ω_2 вписаны в треугольники BAO, CAO. Общие внешние касательные к ω_1, ω_2 пересекают прямую BC в точках P и Q. Докажите, что $\angle PAB = \angle QAC$.

2. Пусть окружность ω описана около треугольника ABC и пусть прямая ℓ не пересекает ω. Пусть P — основание перпендикуляра из центра ω на ℓ. Прямые BC, CA, AB пересекают ℓ в точках X, Y, Z, отличных от P. Докажите, что описанные окружности треугольников AXP, BYP и CZP имеют общую точку, отличную от P, или все вместе касаются в точке P.

Sharky-devil lemma

Пусть окружность ω с центром I вписана в треугольник ABC и касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Пусть также P — основание перпендикуляра из D на EF, а Q — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников ABC и AEF. Наконец, пусть окружность Ω описана около треугольника ABC, а W_a — середина «малой дуги» BC окружности Ω.

1. **Sharky-devil lemma.**
   (а) Докажите, что точки I, P и Q лежат на одной прямой.
   (б) Докажите, что прямая QD проходит через W_a.

2. Пусть M — середина отрезка BF, а N — середина отрезка CE. Окружность, описанная около треугольника AMN, пересекает Ω в точках A и K. Докажите, что точки K, D и W_a лежат на одной прямой.

3. Прямая DP пересекает AC в точке T. Докажите, что Q, T, D и C лежат на одной окружности.

4. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что $\angle HPD = \angle DPI$.

5. Обозначим за $\Omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ окружности, описанные около треугольников ABC, BDF, AFE и CED соответственно. Пусть ω и ω_1 пересекаются в B и X_1, ω и ω_2 пересекаются в A и X_2, ω и ω_3 пересекаются в C и X_3. Докажите, что прямые X_1E, X_2D и X_3F пересекаются в одной точке.

6. Луч AP пересекает Ω в точке G. Докажите, что D является центром вписанной окружности треугольника GMQ, где M — середина отрезка BC.

7. Пусть J — центр A-вневписанной окружности, Q_a на малой дуге AC окружности Ω такова, что $\angle AQ_aJ = 90°$. Пусть также K на BC такова, что $KI = KJ$. Докажите, что прямая AK делит отрезок QQ_a пополам.

8. Пусть A' диаметрально противоположна A на Ω. Окружность $(A'EF)$ пересекает Ω в точке G, а окружности (AMG) и $(A'EF)$ пересекаются второй раз в точке $H \neq G$, где M — середина EF. Прямые GH и EF пересекаются в точке T. Докажите, что $DT \perp EF$.

Соответствия

1. Докажите, что количество разбиений числа n в сумму различных слагаемых равно количеству разбиений числа n в сумму нечётных слагаемых.

2. Пусть A — угловая клетка шахматной доски, B — соседняя с ней по диагонали клетка. Докажите, что число способов обойти всю доску хромой ладьей (ходит на одну клетку по вертикали или горизонтали), начиная с клетки A, больше, чем число способов обойти всю доску хромой ладьей, начиная с клетки B. (Ладья должна побывать на каждой клетке ровно один раз.)

3. Петя подсчитал количество всех возможных m-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы T, O, W и N, причём в каждом слове букв T и O поровну. Вася подсчитал количество всех возможных $2m$-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы T и O, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше?

4. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным,* если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и *нечётным* иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

5. Боковая поверхность параллелепипеда с основанием $a \times b$ и высотой c ($a, b, c \in \mathbb{N}$) оклеена без наложений и пропусков прямоугольниками по клеточкам, причём каждый прямоугольник имеет чётную площадь и может перегибаться по ребру (хоть по всем четырём). Докажите, что если c нечётно, то число способов оклейки чётно.

6. Дано натуральное число n. Что больше: число способов разрезать квадрат $3n \times 3n$ на клетчатые прямоугольники 1×3 или число способов разрезать клетчатый квадрат $2n \times 2n$ на доминошки 1×2?

7. Пусть n и k — натуральные числа одной четности, причем $k \geqslant n$. Имеется $2n$ лампочек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, 2n$, каждая из которых может быть либо включена, либо выключена. Вначале все лампочки выключены. Рассматриваются упорядоченные последовательности шагов: на каждом шаге ровно одна из лампочек меняет свое состояние на противоположное. Обозначим через M число последовательностей из k шагов, после которых все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все остальные выключены. Обозначим через N число последовательностей из k шагов, после после которых все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все остальные выключены и при этом ни разу не меняли своего состояния. Найдите отношение M/N.

Графы

1. В некоторых клетках доски $2n \times 2n$ стоят черные и белые фишки. С доски сначала снимаются все черные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-нибудь белой. Затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо черных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2.

2. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов закрыть поверхность куба $3 \times 3 \times 3$?

3. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов.

4. На плоскости проведено $3n$ прямых трёх направлений, по n прямых каждого направления (прямые одного направления параллельны). Никакие три не пересекаются в одной точке. Какое наибольшее количество треугольников с проведёнными сторонами можно выбрать, чтобы никакие два треугольника не имели общую вершину?

5. В некотором государстве было 2023 города, соединённых дорогами так, что из каждого города можно было добраться до любого другого. Известно, что при запрещённом проезде по любой из дорог по-прежнему из каждого города можно было добраться до любого другого. Министр транспорта и министр внутренних дел по очереди вводят на дорогах, пока есть возможность, одностороннее движение (на одной дороге за ход), причём министр, после хода которого из какого-либо города стало невозможно добраться до какого-либо другого, немедленно уходит в отставку. Первым ходит министр транспорта. Может ли кто-либо из министров добиться отставки другого независимо от его игры?

6. Какое минимальное количество двухэлементных подмножеств данного n-элементного множества можно отметить так, чтобы в любом трехэлементном подмножестве этого n-элементного множества содержалось хотя бы одно отмеченное двухэлементное?

7. В стране несколько городов, один из которых — *Москва.* Некоторые пары городов соединены двусторонними дорогами. Мэр хочет объединить Москву ещё с n городами в *большую Москву* так, чтобы (1) между любыми двумя городами большой Москвы можно было проехать по дорогам, не попадая в города вне неё, и (2) было ровно k городов вне большой Москвы, соединённых хотя бы одной дорогой с большой Москвой. Докажите, что есть не более C_{n+k}^{k} способов совершить такое объединение.

Графы-2

1. Граф на n вершинах имеет диаметр 2 (от любой вершины до любой можно пройти не более чем по двум ребрам), и в нём нет вершины, соединённой со всеми. Каково минимально возможное число рёбер?

2. Докажите, что из сильно связного ориентированного графа на n вершинах можно выкинуть несколько рёбер, оставив не более $2n - 3$, таким образом, что граф не потеряет сильной связности.

3. В межгалактической империи 10^{2015} планет, любые две из которых соединены двусторонней прямой космической линией. Этими линиями владеют 2015 транспортных компаний. Император хочет закрыть k компаний так, чтобы, пользуясь только рейсами оставшихся, можно было бы с любой планеты добраться до любой другой. При каком наибольшем k он гарантированно сможет осуществить свой план?

4. Известно, что в дереве ровно $2n$ висячих вершин. Докажите, что можно провести n рёбер так, чтобы после удаления любого ребра граф останется связным.

5. Даны $N \geqslant 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего номера к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовем *однотонной,* если нет двух таких точек A и B, что от A до B можно добраться и по красным стрелкам, и по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.

6. Каждое ребро некоторого графа G окрашено в один из двух цветов. Для каждого из цветов все компоненты связности графа, образованного только ребрами этого цвета, содержат не более $n > 1$ вершин. Докажите, что все вершины графа G можно окрасить в n цветов правильным образом.

7. Докажите, что в связном графе со средней степенью $4k$ можно выделить k-связный подграф (граф называется *k-связным,* если в нём хотя бы $k + 1$ вершина и после удаления любых k вершин граф остаётся связным).

Глава 2

10-2 (10-2)

Нормы и расширения

Определение. Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$ — приведенный неприводимый многочлен степени n с целыми коэффициентами. Пусть также $\alpha \coloneqq \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — его (возможно, комплексные) корни (они различны, т. к. f неприводим). Тогда множество чисел

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} :\ a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}[x] \,/\, (f(x))$$

называется *расширением кольца целых чисел.*

Множество $\mathbb{Z}[\alpha]$ является кольцом, т. е. его элементы можно складывать, вычитать и умножать, и эти операции удовлетворяют всем естественным свойствам, привычным нам по опыту работы с целыми числами.

Если $a \coloneqq a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ — произвольный элемент кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$, то число $N(a) \coloneqq$ $\coloneqq \prod\limits_{k=1}^{n}(a_0 + a_1\alpha_k + \ldots + a_{n-1}\alpha_k^{n-1})$ называется *нормой* числа a.

Утверждение. Норма любого элемента кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$ является вещественным числом. Норма мультипликативна: $N(ab) = N(a)N(b)$ для любых элементов $a, b \in \mathbb{Z}[\alpha]$.

Полезные примеры:

- Кольцо гауссовых целых чисел $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{x + \mathrm{i}y :\ x, y \in \mathbb{Z}\}$, где $\mathrm{i}^2 = -1$. Норма числа $u = x + \mathrm{i}y$ равна $N(u) = x^2 + y^2$.
- Кольцо чисел Эйзенштейна $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \{x + y\varepsilon :\ x, y \in \mathbb{Z}\}$, где $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Норма числа $u = x + y\varepsilon$ равна $N(u) = x^2 - xy + y^2$.
- Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d} :\ x, y \in \mathbb{Z}\}$ (здесь d — натуральное число, отличное от точного квадрата). Норма числа $u = x + y\sqrt{d}$ равна $N(u) = x^2 - dy^2$.

Мысль. Часто в условии задачи фигурируют нормы элементов из некоторых расширений кольца целых чисел. В таком случае оказывается полезным вместо нормы элемента рассмотреть сам элемент (например, вместо числа $x^2 + y^2$ рассмотреть число $x + \mathrm{i}y$). При этом полезно использовать мультипликативность нормы.

1. Докажите, что для любого целого числа k существует бесконечно много троек (a, b, c) целых чисел, удовлетворяющих уравнению $(a^2 - k)(b^2 - k) = c^2 - k$.

2. **(а)** Докажите, что для любого натурального числа n существует пара натуральных чисел (a, b), таких что $\dfrac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1} = n^2 + n + 1$.

(б) Даны целые числа p и q. Докажите, что для любого целого числа n существует пара целых чисел (a, b), для которых выполнено равенство $\dfrac{a^2 + pa + q}{b^2 + pb + q} = n^2 + pn + q$.

3. Докажите, что любое рациональное число представимо в виде $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, где a, b, c и d — некоторые целые числа.

4. Пусть $p>2$ — простое число. Найдите остаток числа $\prod_{k=1}^{p-1}(k^2+1)$ по модулю p.

5. **(а)** Докажите, что для любого ненулевого элемента a кольца $\mathbb{Z}_p[\sqrt{d}]$, где p — простое число, а d — целое число, такое, что $\left(\frac{d}{p}\right)=-1$, существует обратный элемент a^{-1}, такой что $a\cdot a^{-1}\equiv_p 1$.
(б) Докажите, что в условиях предыдущего пункта справедлив аналог малой теоремы Ферма: $a^{p^2-1}\equiv_p 1$ для всех $a\in\mathbb{Z}_p[\sqrt{d}]$, $a\not\equiv_p 0$.
(в) Пусть p — нечетный простой делитель числа $\frac{(2+\sqrt{3})^{2^n}+(2-\sqrt{3})^{2^n}}{2}$. Докажите, что p^2-1 кратно 2^{n+3}.

6. Простое число p и натуральное число a таковы, что числа p и ap представимы в виде $x^2-2017y^2$ с целыми x и y. Докажите, что число a тоже представимо в таком виде.

7. Пусть k — фиксированное натуральное число и S — конечное множество нечетных простых чисел. Докажите, что существует не более одного способа расставить элементы множества S по кругу (с точностью до поворотов и отражений) так, чтобы произведение любых двух соседних элементов имело бы вид x^2+x+k для некоторого целого числа x.

Нормы и расширения — классика

Заметим, что в кольце $\mathbb{Z}[\alpha]$ аналогами чисел ± 1, т. е. чисел, на которые делится любое число, являются элементы a такие, что $N(a) = \pm 1$. Такие элементы называются *обратимыми.*

Полезные примеры:

- Кольцо гауссовых целых чисел $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{x + \mathrm{i}y\colon\ x, y \in \mathbb{Z}\}$, где $\mathrm{i}^2 = -1$. Норма числа $u = x + \mathrm{i}y$ равна $N(u) = x^2 + y^2$. Обратимые элементы — ± 1, $\pm\mathrm{i}$.
- Кольцо чисел Эйзенштейна $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \{x + y\varepsilon\colon\ x, y \in \mathbb{Z}\}$, где $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Норма числа $u = x + y\varepsilon$ равна $N(u) = x^2 - xy + y^2$. Обратимые элементы — ± 1, $\pm\varepsilon$, $\pm(1+\varepsilon)$.
- Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d}\colon\ x, y \in \mathbb{Z}\}$ (здесь d — натуральное число, отличное от точного квадрата). Норма числа $u = x + y\sqrt{d}$ равна $N(u) = x^2 - dy^2$. Обратимые элементы — решения *уравнения Пелля* $x^2 - dy^2 = \pm 1$.

Утверждение. Кольца $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ и $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ являются факториальными (т. е. их элементы допускают единственное разложение на простые с точностью до умножения на обратимые элементы).

Доказательство. На самом деле оба кольца являются даже *евклидовыми*, т. е. в них есть операция деления с остатком: для любых двух элементов a, b, таких, что $b \neq 0$, существуют такие элементы q и r, что $a = bq + r$ и $N(r) < N(b)$. Для доказательства рассмотрим на комплексной плоскости *решетку* $L \coloneqq \{\lambda b\}$, где λ — произвольный элемент нашего кольца (т. е. $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ или $\mathbb{Z}[\varepsilon]$). Тогда фундаментальная область такой решетки является параллелограммом (квадратом для гауссовых чисел и ромбом с углом 60° для чисел Эйзенштейна), и в одном из таких параллелограммов окажется точка a. Рассмотрим ближайшую к a вершину параллелограмма. Эта вершина соответствует некоторому элементу qb, а разность $a - bq$ — это число r. Несложно посчитать, что $N(r) < N(b)$ (поскольку расстояние от точки внутри указанных фундаментальных областей до ближайшей вершины строго меньше длины стороны).

Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ также факториально, а кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ при $d \geqslant 3$ — нет.

Пример. Решить уравнение Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$ в натуральных числах.

Решение. Будет рассматривать случай, когда x, y, z взаимно просты в совокупности; тогда $(x, y) = 1$. Заметим, что числа x и y должны иметь разную четность; без ограничения общности будем считать, что x нечетно, а y четно. Рассмотрим гауссово целое число $u \coloneqq x + \mathrm{i}y$. Тогда уравнение Пифагора примет вид $u \cdot \overline{u} = z^2$. Заметим, что числа u и $\overline{u}$ взаимно просты. Действительно, если $(u, \overline{u}) = d \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, то $d \mid u + \overline{u} = 2x$ и $d \mid u - \overline{u} = 2y$, поэтому $N(d) \mid 4x^2$ и $N(d) \mid 4y^2$, а так как $(x, y) = 1$, то $N(d) \mid 4$. С другой стороны, $N(d) \mid N(u) = x^2 + y^2$, а это нечетное число, поэтому $N(d) = 1$, то есть $d = \pm 1, \pm\mathrm{i}$. Значит, гауссовы числа u и $\overline{u}$ являются точными квадратами (с точностью до обратимого): $u = (m + \mathrm{i}n)^2$ или $\mathrm{i}(m - \mathrm{i}n)^2$.

Отсюда $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ и $z = m^2 + n^2$ (во втором случае x окажется четным). Чтобы x было нечетным, необходимо брать числа m и n разной четности ($m > n$ и $(m, n) = 1$).

1. **(а)** Докажите, что любое простое число вида $4k + 1$ представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.
   (б) Докажите, что каждое простое число p вида $6k+1$ представимо в виде a^2-ab+b^2 для некоторых целых a и b.

2. **(а)** Решите уравнение $x^2 + 2 = y^3$ в натуральных числах.
   (б) Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 = z^3$ не имеет решений в натуральных числах.

Теорема (Лагранж). *Любое натуральное число представимо в виде суммы квадратов четырех неотрицательных целых чисел.*

3. Докажите, что для любого нечетного простого числа p существуют такие целые числа x и y, такие, что число $x^2 + y^2 + 1$ делится на p.

4. Рассмотрим *пространство кватернионов*

$$\mathbb{H} \coloneqq \{a\mathrm{i} + b\mathrm{j} + c\mathrm{k} + d :\ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1\}$$

   (формально $\mathbb{H} = \mathbb{R}[x, y, z] \,/\, \langle x^2 + 1, y^2 + 1, z^2 + 1, xyz + 1\rangle$). Определим также *числа Гурвица*

$$\mathcal{H} \coloneqq \mathbb{Z}\Big[\frac{1 + \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k}}{2}, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\Big] = \Big\{\frac{a\mathrm{i} + b\mathrm{j} + c\mathrm{k} + d}{2} :\ a \equiv_2 b \equiv_2 c \equiv_2 d\Big\}.$$

   Нормой кватерниона $q = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k} + t$ назовем число $N(q) \coloneqq x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.
   (а) Докажите, что $N :\ \mathcal{H} \to \mathbb{Z}$.
   (б) Докажите, что если числа m и n представимы в виде суммы четырех квадратов, то число mn также представимо в виде суммы четырех квадратов.

5. Докажите, что кольцо $\mathcal{H}$ чисел Гурвица факториально. *Указание*: подумайте, зачем в определении чисел Гурвица нужно деление на 2.

6. Докажите теорему Лагранжа.

Уравнение Пелля — теория

Определение. *Уравнением Пелля* называется диофантово уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где d — не точный квадрат. *Уравнением типа Пелля* называется диофантово уравнение $x^2 - dy^2 = r$, где d — не точный квадрат. *Минимальным решением уравнения типа Пелля* называется натуральное решение (x_1, y_1), в котором число x_1 минимально.

Наша цель — описать все решения уравнения Пелля. Кстати, вопрос существования решения (хотя бы одного) у произвольного уравнения типа Пелля до сих пор открыт. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, состоящее из всех чисел вида $x + y\sqrt{d}$, где x, y — целые, а d — натуральное, не являющееся полным квадратом. Для каждого числа $x + y\sqrt{d}$ определим *норму* $N(x + y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2$. Решить уравнение Пелля означает найти все числа с нормой 1 в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

1. **(а)** Докажите *теорему Дирихле:* для любого вещественного иррационального числа ξ и натурального N существует такое целое число a и натуральное число b, что $b \leqslant N$ и $|b\xi - a| \leqslant 1/N$.
   (б) Докажите, что существует такое целое число n, что уравнение $x^2 - dy^2 = n$ имеет бесконечно много решений в целых числах. (*Указание:* возьмите $\xi = \sqrt{d}$ и оцените норму $a^2 - db^2$ с помощью теоремы Дирихле.)
   (в) Докажите, что у уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$ существует решение в натуральных числах. (*Указание*: подумайте, какое естественное условие можно наложить на числа $x_1 + y_1\sqrt{d}$ и $x_2 + y_2\sqrt{d}$ с нормой n, чтобы их частное лежало бы в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.)
   (г) Пусть (a, b) — минимальное решение уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$. Докажите, что если $z = a + b\sqrt{d}$, то все натуральные решения (x_n, y_n) уравнения Пелля имеют вид $z^n = x_n + y_n\sqrt{d}$, причем других решений нет. Иначе говоря, операция $(x, y) \mapsto (ax + dby, ay + bx)$ переводит решение в следующее за ним решение. Геометрически это есть ни что иное как сдвиг гиперболы $x^2 - dy^2 = 1$. (*Указание:* обратите внимание, что сдвигаться по гиперболе можно в обе стороны.)

2. Найдите все решения в целых числах у следующих уравнений:
   (а) $x^2 - 5y^2 = 1$;
   (б) $x^2 - xy - y^2 = 1$;
   (в) $x^2 - 5y^2 = 7$;
   (г) $x^2 - 3y^2 = 13$.

3. При каких простых p уравнение $x^2 - py^2 = -1$ имеет решения?

4. Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1999$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

Уравнение Пелля — практика

Мысль. Уравнение Пелля возникает на практике в следующих ситуациях. Во-первых, это мощный инструмент для разных конструктивов. Во-вторых, это хороший способ разложить на множители число x^2+1 (хоть и не при всех x). В-третьих, иногда могут оказаться полезными конструкции, связанные с поиском решения уравнения Пелля: формулы $(a+b\sqrt{d})^n = x_n + y_n\sqrt{d}$, рекуррентный процесс $(x, y) \mapsto (ax+dby, ay+bx)$ и т. д.

1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, таких, что $n^2+1 \mid n!$.

2. Найти все целые a, при которых уравнение $x^2+axy+y^2=1$ имеет бесконечно много целых решений.

3. Пусть $p(n)$ — наибольший простой делитель числа n^2+1.
   (а) Докажите, что существует бесконечно много троек (a, b, c) натуральных чисел, таких что $p(a) = p(b) = p(c)$.
   (б) Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что у числа n^2+1 найдутся два положительных делителя, разность которых равна n.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел a, b, c, образующих арифметическую прогрессию, таких, что числа $ab+1$, $bc+1$ и $ca+1$ являются точными квадратами.

Точки Шалтая и Болтая

Точкой Шалтая треугольника ABC назовём такую точку P, что

$$\angle BAP = \angle CBP \quad \text{и} \quad \angle CAP = \angle BCP\,.$$

Точкой Болтая треугольника ABC назовём такую точку Q, что

$$\angle BAQ = \angle ACQ \quad \text{и} \quad \angle CAQ = \angle ABQ\,.$$

Обозначения в первых двух разделах. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H. Ω — описанная окружность треугольника ABC с центром в точке O. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает Ω в точке S. M — середина стороны BC. T — точка пересечения прямых BC и B_1C_1. L — точка пересечения Ω и симедианы, проведённой из угла A.

Точка Шалтая

1. Докажите, что точки S, H, M лежат на одной прямой.

2. Докажите, что точки A, S, T лежат на одной прямой.

3. **(а)** Докажите, что точки B, H, C и проекция ортоцентра на медиану лежат на одной окружности.
(б) Докажите, что точка Шалтая — это и есть проекция ортоцентра на медиану.

4. **(а)** Докажите, что точки S, A_1, L лежат на одной прямой.
(б) Докажите, что на этой же прямой лежит середина отрезка, соединяющего M с точкой пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C.

Точка Болтая

5. Докажите, что Q лежит на симедиане AL.

6. Докажите, что Q — это проекция O на AL.

7. Прямые OQ и BC пересекаются в точке E. Докажите, что AE — касательная к Ω.

8. Докажите, что A_1Q делит пополам среднюю линию, параллельную стороне BC.

9. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

Вместе

10. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекают медиану AM в точках D и E соответственно. Прямые BD и CE пересекаются в точке F. Докажите, что $\angle AFO = 90°$.

11. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BHC пересекается с окружностью, построенной на AB как на диаметре, в точке Y. Докажите, что прямая AY делит отрезок CH пополам.

12. Две окружности, проходящие через точки B и H, касаются прямой AC в точках P и Q. Докажите, что прямые PA_1 и QC_1 пересекаются на окружности (BA_1C_1).

13. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проведённая в точке A, пересекает прямую BC в точке M. Прямая, проходящая через A параллельно BC, пересекает прямую B_1C_1 в точке N. Докажите, что прямая MN перпендикулярна медиане треугольника ABC, проведённой из вершины A.

14. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Описанные окружности треугольников ABC и AB_1C_1 пересекаются в точке S. Пусть A', B', C' — точки, симметричные ортоцентру треугольника ABC относительно сторон BC, AC и AB соответственно. Докажите, что прямая, соединяющая центры вписанных окружностей треугольников $SA'B'$ и $SA'C'$, параллельна BC.

Еще точки Шалтая и Болтая

1. Точка P внутри треугольника $\triangle ABC$ такова, что $\angle PAC = \angle PBA$, $\angle PCA = \angle PBC$. Докажите, что одна из общих касательных ко вписанным окружностям треугольников $\triangle APB$, $\triangle CPB$ параллельна AC.

2. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. M_{ac} — середина диагонали AC. H_d, H_b — ортоцентры треугольников $\triangle ABC$, $\triangle ADC$. P_d, P_b — проекции H_d и H_b на BM_{ac} и DM_{ac} соответственно. Аналогично определим P_a, P_c для диагонали BD. Докажите, что P_a, P_b, P_c, P_d лежат на одной окружности.

3. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Точки E и F на прямых AC и AB таковы, что $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$. Пусть точка L — центр описанной окружности треугольника DEF. Докажите, что L лежит на фиксированной прямой, перпендикулярной прямой, соединяющей точки Шалтая и Болтая.

4. Пусть точка M_A — это середина отрезка, соединяющего точки Шалтая и Болтая при вершине A. Аналогично определяются точки M_B и M_C. Докажите, что точки M_A, M_B, M_C лежат на одной прямой.

Лемма Саваямы

В первых семи задачах даны вписанный в окружность Ω четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке P; и окружность ω, касающаяся Ω в точке X, а отрезков AP и BP — в точках S и T соответственно.

Лемма Саваямы. Прямая ST проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

1. Пусть прямая ST пересекает биссектрису угла ABC в точке I'.
   (а) Докажите, что точки B, X, T, I' лежат на одной окружности.
   (б) Докажите, что окружность (XSI') касается прямой BI'.
   (в) Докажите лемму Саваямы.

2. **(а)** Докажите, что окружность (BXT) проходит через центр вписанной окружности треугольника ABP и центр C-вневписанной окружности треугольника BCP.
   (б) Докажите, что окружность (DXT) проходит через центр C-вневписанной окружности треугольника ACD и центр вписанной окружности треугольника CDP.

3. Докажите, что биссектриса угла CXD проходит через центр вписанной окружности треугольника CDP.

4. Пусть лучи CB и DA пересекаются в точке E. Докажите, что прямая через центры вписанных окружностей треугольников ABP, ABE и прямая через центры вписанных окружностей треугольников CDP, CDE пересекаются на окружности Ω.

5. **Теорема Тебо.** Пусть окружность ω' касается окружности Ω и отрезков BP и CP. Докажите, что линия центров окружностей ω и ω' проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

6. **(а)** Докажите, что окружности ω и ω' касаются тогда и только тогда, когда P — основание биссектрисы треугольника ABC.
   (б) Докажите, что окружности ω и ω' равны тогда и только тогда, когда P — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC.

7. Пусть окружность ω_1 касается окружности Ω и отрезков CP и DP. Докажите, что одна из общих внешних касательных к ω и ω_1 параллельна BC, а другая AD.

8. Вневписанная окружность треугольника ABC, соответствующая вершине C, касается продолжения стороны AC в точке P. Рассмотрим окружность ω, касающуюся AC в точке P и прямой, проходящей через B параллельно AC. Докажите, что ω касается описанной окружности треугольника ABC.

9. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) вписана в окружность ω. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности ω, не содержащих

точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности ω.

10. Окружности Ω_1 и Ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке P, четырехугольник $ABCD$ вписан в Ω_1 так, что P лежит на дуге AB, не содержащей C. Лучи DA, CB касаются Ω_2 в точках E и F соответственно. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок EF в точке N. Прямая FP пересекает дугу AB, не содержащую P, в точке M. Докажите, что M — центр описанной окружности треугольника BCN.

Sharky-devil lemma

Пусть окружность ω с центром I вписана в треугольник ABC и касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Пусть также P — основание перпендикуляра из D на EF, а Q — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников ABC и AEF. Наконец, пусть окружность Ω описана около треугольника ABC, а W_a — середина «малой дуги» BC окружности Ω.

1. **Sharky-devil lemma.**
   (а) Докажите, что точки I, P и Q лежат на одной прямой.
   (б) Докажите, что прямая QD проходит через W_a.

2. Пусть M — середина отрезка BF, а N — середина отрезка CE. Окружность, описанная около треугольника AMN, пересекает Ω в точках A и K. Докажите, что точки K, D и W_a лежат на одной прямой.

3. Прямая DP пересекает AC в точке T. Докажите, что Q, T, D и C лежат на одной окружности.

4. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что $\angle HPD = \angle DPI$.

5. Обозначим за Ω, ω_1, ω_2, ω_3 окружности, описанные около треугольников ABC, BDF, AFE и CED соответственно. Пусть ω и ω_1 пересекаются в B и X_1, ω и ω_2 пересекаются в A и X_2, ω и ω_3 пересекаются в C и X_3. Докажите, что прямые X_1E, X_2D и X_3F пересекаются в одной точке.

6. Луч AP пересекает Ω в точке G. Докажите, что D является центром вписанной окружности треугольника GMQ, где M — середина отрезка BC.

7. Пусть J — центр A-вневписанной окружности, Q_a на малой дуге AC окружности Ω такова, что $\angle AQ_aJ = 90°$. Пусть также K на BC такова, что $KI = KJ$. Докажите, что прямая AK делит отрезок QQ_a пополам.

Соответствия

1. Вадим посчитал число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^k$, а Витя посчитал число всех нулей в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^{k+1}$. Чьё число больше?

2. Докажите, что количество разбиений числа n в сумму различных слагаемых равно количеству разбиений числа n в сумму нечётных слагаемых.

3. Пусть A — угловая клетка шахматной доски, B — соседняя с ней по диагонали клетка. Докажите, что число способов обойти всю доску хромой ладьей (ходит на одну клетку по вертикали или горизонтали), начиная с клетки A, больше, чем число способов обойти всю доску хромой ладьей, начиная с клетки B. (Ладья должна побывать на каждой клетке ровно один раз.)

4. Петя подсчитал количество всех возможных m-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы T, O, W и N, причём в каждом слове букв T и O поровну. Вася подсчитал количество всех возможных $2m$-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы T и O, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше?

5. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным,* если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и *нечётным* иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

6. Боковая поверхность параллелепипеда с основанием $a \times b$ и высотой c ($a, b, c \in \mathbb{N}$) оклеена без наложений и пропусков прямоугольниками по клеточкам, причём каждый прямоугольник имеет чётную площадь и может перегибаться по ребру (хоть по всем четырём). Докажите, что если c нечётно, то число способов оклейки чётно.

7. Дано натуральное число n. Что больше: число способов разрезать квадрат $3n \times 3n$ на клетчатые прямоугольники 1×3 или число способов разрезать клетчатый квадрат $2n \times 2n$ на доминошки 1×2?

Графы

1. В некоторых клетках доски $2n \times 2n$ стоят черные и белые фишки. С доски сначала снимаются все черные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-нибудь белой. Затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо черных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2.

2. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов закрыть поверхность куба $3 \times 3 \times 3$?

3. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов.

4. На плоскости проведено $3n$ прямых трёх направлений, по n прямых каждого направления (прямые одного направления параллельны). Никакие три не пересекаются в одной точке. Какое наибольшее количество треугольников с проведёнными сторонами можно выбрать, чтобы никакие два треугольника не имели общую вершину?

5. В некотором государстве было 2023 города, соединённых дорогами так, что из каждого города можно было добраться до любого другого. Известно, что при запрещённом проезде по любой из дорог по-прежнему из каждого города можно было добраться до любого другого. Министр транспорта и министр внутренних дел по очереди вводят на дорогах, пока есть возможность, одностороннее движение (на одной дороге за ход), причём министр, после хода которого из какого-либо города стало невозможно добраться до какого-либо другого, немедленно уходит в отставку. Первым ходит министр транспорта. Может ли кто-либо из министров добиться отставки другого независимо от его игры?

6. Какое минимальное количество двухэлементных подмножеств данного n-элементного множества можно отметить так, чтобы в любом трехэлементном подмножестве этого n-элементного множества содержалось хотя бы одно отмеченное двухэлементное?

7. В стране несколько городов, один из которых — *Москва.* Некоторые пары городов соединены двусторонними дорогами. Мэр хочет объединить Москву ещё с n городами в *большую Москву* так, чтобы (1) между любыми двумя городами большой Москвы можно было проехать по дорогам, не попадая в города вне неё, и (2) было ров-

но k городов вне большой Москвы, соединённых хотя бы одной дорогой с большой Москвой. Докажите, что есть не более C_{n+k}^{k} способов совершить такое объединение.

Графы-2

1. Дан связный граф с $n \geqslant 10$ вершинами и $2n-1$ рёбрами. Докажите, что в нём можно найти простой цикл и удалить в нём все рёбра так, чтобы граф остался связным.

2. Граф на n вершинах имеет диаметр 2 (от любой вершины до любой можно пройти не более чем по двум ребрам), и в нём нет вершины, соединённой со всеми. Каково минимально возможное число рёбер?

3. Докажите, что из сильно связного ориентированного графа на n вершинах можно выкинуть несколько рёбер, оставив не более $2n-3$, таким образом, что граф не потеряет сильной связности.

4. В межгалактической империи 10^{2015} планет, любые две из которых соединены двусторонней прямой космической линией. Этими линиями владеют 2015 транспортных компаний. Император хочет закрыть k компаний так, чтобы, пользуясь только рейсами оставшихся, можно было бы с любой планеты добраться до любой другой. При каком наибольшем k он гарантированно сможет осуществить свой план?

5. Известно, что в дереве ровно $2n$ висячих вершин. Докажите, что можно провести n рёбер так, чтобы после удаления любого ребра граф останется связным.

6. Даны $N \geqslant 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего номера к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовем *однотонной,* если нет двух таких точек A и B, что от A до B можно добраться и по красным стрелкам, и по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.

7. Каждое ребро некоторого графа G окрашено в один из двух цветов. Для каждого из цветов все компоненты связности графа, образованного только ребрами этого цвета, содержат не более $n > 1$ вершин. Докажите, что все вершины графа G можно окрасить в n цветов правильным образом.

Глава 3

10-3 (10-3)

Нормы и расширения

Определение. Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$ — приведенный неприводимый многочлен степени n с целыми коэффициентами. Пусть также $\alpha \coloneqq \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — его (возможно, комплексные) корни (они различны, т. к. f неприводим). Тогда множество чисел

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} :\ a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}[x] \,/\, (f(x))$$

называется *расширением кольца целых чисел.*

Множество $\mathbb{Z}[\alpha]$ является кольцом, т. е. его элементы можно складывать, вычитать и умножать, и эти операции удовлетворяют всем естественным свойствам, привычным нам по опыту работы с целыми числами.

Если $a \coloneqq a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ — произвольный элемент кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$, то число $N(a) \coloneqq$ $\coloneqq \prod_{k=1}^{n}(a_0 + a_1\alpha_k + \ldots + a_{n-1}\alpha_k^{n-1})$ называется *нормой* числа a.

Утверждение. Норма любого элемента кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$ является вещественным числом. Норма мультипликативна: $N(ab) = N(a)N(b)$ для любых элементов $a, b \in \mathbb{Z}[\alpha]$.

Полезные примеры:

- Кольцо гауссовых целых чисел $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{x + \mathrm{i}y :\ x, y \in \mathbb{Z}\}$, где $\mathrm{i}^2 = -1$. Норма числа $u = x + \mathrm{i}y$ равна $N(u) = x^2 + y^2$.
- Кольцо чисел Эйзенштейна $\mathbb{Z}[\varepsilon] = \{x + y\varepsilon :\ x, y \in \mathbb{Z}\}$, где $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Норма числа $u = x + y\varepsilon$ равна $N(u) = x^2 - xy + y^2$.
- Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d} :\ x, y \in \mathbb{Z}\}$ (здесь d — натуральное число, отличное от точного квадрата). Норма числа $u = x + y\sqrt{d}$ равна $N(u) = x^2 - dy^2$.

Мысль. Часто в условии задачи фигурируют нормы элементов из некоторых расширений кольца целых чисел. В таком случае оказывается полезным вместо нормы элемента рассмотреть сам элемент (например, вместо числа $x^2 + y^2$ рассмотреть число $x + \mathrm{i}y$). При этом полезно использовать мультипликативность нормы.

1. Докажите, что для любого целого числа k существует бесконечно много троек (a, b, c) целых чисел, удовлетворяющих уравнению $(a^2 - k)(b^2 - k) = c^2 - k$.

2. **(а)** Докажите, что для любого натурального числа n существует пара натуральных чисел (a, b), таких что $\dfrac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1} = n^2 + n + 1$.
(б) Даны целые числа p и q. Докажите, что для любого целого числа n существует пара целых чисел (a, b), для которых выполнено равенство $\dfrac{a^2 + pa + q}{b^2 + pb + q} = n^2 + pn + q$.

3. Докажите, что любое рациональное число представимо в виде $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, где a, b, c и d — некоторые целые числа.

4. Пусть $p > 2$ — простое число. Найдите остаток числа $\prod_{k=1}^{p-1}(k^2+1)$ по модулю p.

5. **(а)** Докажите, что для любого ненулевого элемента a кольца $\mathbb{Z}_p[\sqrt{d}]$, где p — простое число, а d — целое число, такое, что $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$, существует обратный элемент a^{-1}, такой что $a \cdot a^{-1} \equiv_p 1$.
(б) Докажите, что в условиях предыдущего пункта справедлив аналог малой теоремы Ферма: $a^{p^2-1} \equiv_p 1$ для всех $a \in \mathbb{Z}_p[\sqrt{d}]$, $a \not\equiv_p 0$.
(в) Пусть p — нечетный простой делитель числа $\frac{(2+\sqrt{3})^{2^n}+(2-\sqrt{3})^{2^n}}{2}$. Докажите, что p^2-1 кратно 2^{n+3}.

6. Простое число p и натуральное число a таковы, что числа p и ap представимы в виде $x^2 - 2017y^2$ с целыми x и y. Докажите, что число a тоже представимо в таком виде.

7. Пусть k — фиксированное натуральное число и S — конечное множество нечетных простых чисел. Докажите, что существует не более одного способа расставить элементы множества S по кругу (с точностью до поворотов и отражений) так, чтобы произведение любых двух соседних элементов имело бы вид $x^2 + x + k$ для некоторого целого числа x.

Уравнение Пелля — теория

Определение. *Уравнением Пелля* называется диофантово уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где d — не точный квадрат. *Уравнением типа Пелля* называется диофантово уравнение $x^2 - dy^2 = r$, где d — не точный квадрат. *Минимальным решением уравнения типа Пелля* называется натуральное решение (x_1, y_1), в котором число x_1 минимально.

Наша цель — описать все решения уравнения Пелля. Кстати, вопрос существования решения (хотя бы одного) у произвольного уравнения типа Пелля до сих пор открыт. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, состоящее из всех чисел вида $x + y\sqrt{d}$, где x, y — целые, а d — натуральное, не являющееся полным квадратом. Для каждого числа $x + y\sqrt{d}$ определим *норму* $N(x + y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2$. Решить уравнение Пелля означает найти все числа с нормой 1 в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

План доказательства.

1. *Теорема Дирихле*: для любого вещественного иррационального числа ξ и натурального N существует такое целое число a и натуральное число b, что $b \leqslant N$ и $|b\xi - a| \leqslant 1/N$.
2. Оценим с помощью теоремы Дирихле норму числа $a - b\sqrt{d}$: $|a^2 - db^2| \leqslant 2\sqrt{d} + 1$.
3. Отсюда следует, что существует такое целое число n, что у уравнения $x^2 - dy^2 = n$ бесконечно много решений.
4. Выберем два решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2) этого уравнения, такие что $x_1 \equiv_n x_2$ и $y_1 \equiv_n y_2$. Тогда их частное даст решение уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$.
5. Пусть (a, b) — минимальное решение уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$. Тогда если $z = a + b\sqrt{d}$, то все натуральные решения (x_n, y_n) уравнения Пелля имеют вид $z^n = x_n + y_n\sqrt{d}$, причем других решений нет. Иначе говоря, операция $(x, y) \mapsto (ax + dby, ay + bx)$ переводит решение в следующее за ним решение. Геометрически это есть ни что иное как сдвиг гиперболы $x^2 - dy^2 = 1$.

Задачи.

1. Найдите все решения в целых числах у следующих уравнений:
(а) $x^2 - 5y^2 = 1$;
(б) $x^2 - xy - y^2 = 1$;
(в) $x^2 - 5y^2 = 7$;
(г) $x^2 - 3y^2 = 13$.

2. При каких простых p уравнение $x^2 - py^2 = -1$ имеет решения?

3. Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1999$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

Уравнение Пелля — практика

Мысль. Уравнение Пелля возникает на практике в следующих ситуациях. Во-первых, это мощный инструмент для разных конструктивов. Во-вторых, это хороший способ разложить на множители число x^2+1 (хоть и не при всех x). В-третьих, иногда могут оказаться полезными конструкции, связанные с поиском решения уравнения Пелля: формулы $(a+b\sqrt{d})^n = x_n + y_n\sqrt{d}$, рекуррентный процесс $(x, y) \mapsto (ax+dby, ay+bx)$ и т. д.

1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, таких, что $n^2+1 \mid n!$.

2. Найти все целые a, при которых уравнение $x^2+axy+y^2=1$ имеет бесконечно много целых решений.

3. Пусть $p(n)$ — наибольший простой делитель числа n^2+1.
(а) Докажите, что существует бесконечно много троек (a, b, c) натуральных чисел, таких что $p(a) = p(b) = p(c)$.
(б) Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что у числа n^2+1 найдутся два положительных делителя, разность которых равна n.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел a, b, c, образующих арифметическую прогрессию, таких, что числа $ab+1$, $bc+1$ и $ca+1$ являются точными квадратами.

Точка Шалтая

Точкой Шалтая треугольника ABC назовём такую точку P, что

$$\angle BAP = \angle CBP \quad \text{и} \quad \angle CAP = \angle BCP\,.$$

Обозначения в этом листике. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H. Ω — описанная окружность треугольника ABC с центром в точке O. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает Ω в точке S. M — середина стороны BC. T — точка пересечения прямых BC и B_1C_1. L — точка пересечения Ω и симедианы, проведённой из угла A.

1. Докажите, что точки S, H, M лежат на одной прямой.

2. Докажите, что точки A, S, T лежат на одной прямой.

3. Докажите, что через точку S проходят описанные окружности треугольников TBC_1, TCB_1, BMB_1, CMC_1.

4. Докажите, что прямые AM и TH перпендикулярны.

5. Докажите, что точки B, H, C и проекция ортоцентра на медиану лежат на одной окружности.

6. Докажите, что точка Шалтая — это и есть проекция ортоцентра на медиану.

7. Докажите, что P и L симметричны относительно стороны BC.

8. Докажите, что прямая TL вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке, симметричной H относительно стороны BC.

9. **(а)** Докажите, что точки S, A_1, L лежат на одной прямой.
(б) Докажите, что на этой же прямой лежит середина отрезка, соединяющего M с точкой пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C.

10. Описанная окружность треугольника ABM вторично пересекает окружность, построенную на BC как на диаметре, в точке X. Докажите, что точки B, P, X лежат на одной прямой.

11. Серединный перпендикуляр к SH пересекает прямую BC в точке Y. Докажите, что YS касается Ω.

12. Пусть A', B', C' — точки, симметричные H относительно сторон BC, AC и AB соответственно. Докажите, что прямая, соединяющая центры вписанных окружностей треугольников $SA'B'$ и $SA'C'$, параллельна BC.

13. K — такая точка на описанной окружности треугольника ABC, что $\angle SKH = 90°$. Докажите, что описанные окружности треугольников KSH и KA_1M касаются.

Точка Шалтая. Добавка

1. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BHC пересекается с окружностью, построенной на AB как на диаметре, в точке Y. Докажите, что прямая AY делит отрезок CH пополам.

2. Две окружности, проходящие через точки B и H, касаются прямой AC в точках P и Q. Докажите, что прямые PA_1 и QC_1 пересекаются на окружности (BA_1C_1).

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проведённая в точке A, пересекает прямую BC в точке M. Прямая, проходящая через A параллельно BC, пересекает прямую B_1C_1 в точке N. Докажите, что прямая MN перпендикулярна медиане треугольника ABC, проведённой из вершины A.

4. Биссектриса BD треугольника ABC пересекает его высоты AA_1 и CC_1 в точках A_2 и C_2. Докажите, что описанные окружности треугольников AA_2D и CC_2D пересекаются на медиане треугольника ABC.

Точка Болтая

Точкой Болтая треугольника ABC назовём такую точку Q, что

$$\angle BAQ = \angle ACQ \quad \text{и} \quad \angle CAQ = \angle ABQ\,.$$

В этом листике дан остроугольный треугольник ABC, O — центр его описанной окружности. AA_1 — высота. Симедиана — прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы, проведенной из той же вершины.

1. Докажите, что Q лежит на симедиане, проведённой из угла A.
2. Докажите, что Q — это проекция O на симедиану.
3. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекают медиану AM в точках D и E соответственно. Прямые BD и CE пересекаются в точке F. Докажите, что $\angle AFO = 90°$.
4. На стороне BC треугольника ABC выбирается произвольная точка X. Точки Y и Z на сторонах AB и BC соответственно таковы, что $XY \parallel AC$, $XZ \parallel AB$. Докажите, что описанные окружности треугольников AYZ проходят через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки X.
5. Докажите, что A_1Q делит пополам среднюю линию, параллельную стороне BC.
6. Пусть B_0 и C_0 — середины сторон AC и AB соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BA_1C_0 и CA_1B_0 проходят через точку Q.
7. Прямые OQ и BC пересекаются в точке E. Докажите, что AE — касательная к описанной окружности треугольника ABC.
8. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке D. На прямых BD и BC выбраны точки M и N такие, что $BMAN$ — параллелограмм. Докажите, что прямая MN проходит через точку Q.
9. Пусть $AB < AC$. Внешняя биссектриса угла A пересекает прямую BC в точке K. Докажите, что $\angle KQA + \angle OKB = 90°$.

Изогональное сопряжение

1. **(а)** Докажите, что точка пересечения высот и центр описанной окружности треугольника изогонально сопряжены.
   (б) Какие точки изогонально сопряжены самим себе?
   (в) Во что переходят точки описанной окружности при изогональном сопряжении?
   (г) Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

2. Опустим из точки P перпендикуляры на стороны треугольника (или их продолжения) и рассмотрим окружность, проходящую через основания перпендикуляров. Докажите, что эта окружность совпадает с окружностью, построенной таким же образом для точки Q, изогонально сопряженной точке P.

3. Пусть P — некоторая точка внутри треугольника ABC. Точки D, E, F симметричны P относительно прямых BC, CA и AB соответственно. Докажите, что центр описанной окружности (DEF) и P изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.

4. Докажите, что при изогональном сопряжении окружность, проходящая через вершины B и C, отличная от описанной, переходит в окружность, проходящую через B и C.

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

6. AA_0, BB_0, CC_0 — высоты треугольника ABC, H — ортоцентр, M — произвольная точка. A_1 – точка, симметричная M относительно BC; аналогично определим точки B_1, C_1. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

7. Про параллелограмм $ABCD$ известно, что $\angle DAC = 90°$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из A на DC, P — такая точка на прямой AC, что прямая PD касается описанной окружности треугольника ABD. Докажите, что $\angle PBA = \angle DBH$.

8. Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами $120°$. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно прямых BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.

9. Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P, лежащей внутри треугольника. Известно, что $PA_1 = PB_1 = PC_1$. Докажите, что перпендикуляры, восставленные в точках A_1, B_1 и C_1 к сторонам треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

10. Пусть окружность ω с центром I вписана в треугольник ABC и касается сторон BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Точки A_b, A_c изогонально сопряжены A'

относительно треугольников AIB, AIC соответственно. Докажите, что середина отрезка A_bA_c лежит на ω.

11. Касательные к описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, восстановленные в вершинах B и C, пересекаются в точке P. Точка Q — отражение основания высоты из вершины A относительно середины стороны BC. Перпендикуляр к прямой PQ, восстановленный в точке Q, пересекает прямые AB и AC в точках B' и C' соответственно. Докажите, что $\angle B'PB = \angle C'PC$.

Соответствия

1. Сколько существует разных способов разбить число 2023 на натуральные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются *приблизительно равными,* если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

2. Вадим посчитал число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^k$, а Витя посчитал число всех нулей в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^{k+1}$. Чьё число больше?

3. **(а)** Докажите, что количество разбиений числа n на слагаемые, равно количеству разбиений числа $2n$ ровно на n слагаемых.
(б) Докажите, что количество разбиений числа n в сумму различных слагаемых равно количеству разбиений числа n в сумму нечётных слагаемых.

4. Пусть A — угловая клетка шахматной доски, B — соседняя с ней по диагонали клетка. Докажите, что число способов обойти всю доску хромой ладьей (ходит на одну клетку по вертикали или горизонтали), начиная с клетки A, больше, чем число способов обойти всю доску хромой ладьей, начиная с клетки B. (Ладья должна побывать на каждой клетке ровно один раз.)

5. Петя подсчитал количество всех возможных m-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы T, O, W и N, причём в каждом слове букв T и O поровну. Вася подсчитал количество всех возможных $2m$-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы T и O, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше?

6. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным,* если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и *нечётным* иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

7. Дано натуральное число n. Что больше: число способов разрезать квадрат $3n \times 3n$ на клетчатые прямоугольники 1×3 или число способов разрезать клетчатый квадрат $2n \times 2n$ на доминошки 1×2?

Соответствия. Добавка

1. Боковая поверхность параллелепипеда с основанием $a \times b$ и высотой c ($a, b, c \in \mathbb{N}$) оклеена без наложений и пропусков прямоугольниками по клеточкам, причём каждый прямоугольник имеет чётную площадь и может перегибаться по ребру (хоть по всем четырём). Докажите, что если c нечётно, то число способов оклейки чётно.

2. На прямой сидит конечное число лягушек в различных целых точках. За ход ровно одна лягушка прыгает на 1 вправо, причём они по-прежнему должны быть в различных точках. Мы вычислили, сколькими способами лягушки могут сделать n ходов (для некоторого начального расположения лягушек). Докажите, что если бы мы разрешили тем же лягушкам прыгать влево, запретив прыгать вправо, то способов сделать n ходов было бы столько же.

3. Пусть n и k — натуральные числа одной четности, причем $k \geqslant n$. Имеется $2n$ лампочек, занумерованных числами 1, 2, ..., $2n$, каждая из которых может быть либо включена, либо выключена. Вначале все лампочки выключены. Рассматриваются упорядоченные последовательности шагов: на каждом шаге ровно одна из лампочек меняет свое состояние на противоположное. Обозначим через M число последовательностей из k шагов, после которых все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все остальные выключены. Обозначим через N число последовательностей из k шагов, после после которых все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все остальные выключены и при этом ни разу не меняли своего состояния. Найдите отношение M/N.

Графы

1. В ориентированном графе количество исходящих из каждой вершины рёбер не превосходит d. Докажите, что вершины графа можно покрасить в $2d+1$ цвет так, чтобы никакое ребро не соединяло вершины одного цвета.

2. В некоторых клетках доски $2n \times 2n$ стоят черные и белые фишки. С доски сначала снимаются все черные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-нибудь белой. Затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо черных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2.

3. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов закрыть поверхность куба $3 \times 3 \times 3$?

4. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов.

5. На плоскости проведено $3n$ прямых трёх направлений, по n прямых каждого направления (прямые одного направления параллельны). Никакие три не пересекаются в одной точке. Какое наибольшее количество треугольников с проведёнными сторонами можно выбрать, чтобы никакие два треугольника не имели общую вершину?

6. В некотором государстве было 2023 города, соединённых дорогами так, что из каждого города можно было добраться до любого другого. Известно, что при запрещённом проезде по любой из дорог по-прежнему из каждого города можно было добраться до любого другого. Министр транспорта и министр внутренних дел по очереди вводят на дорогах, пока есть возможность, одностороннее движение (на одной дороге за ход), причём министр, после хода которого из какого-либо города стало невозможно добраться до какого-либо другого, немедленно уходит в отставку. Первым ходит министр транспорта. Может ли кто-либо из министров добиться отставки другого независимо от его игры?

7. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось четное количество фишек.

8. Какое минимальное количество двухэлементных подмножеств данного n-элементного множества можно отметить так, чтобы в любом трехэлементном подмножестве этого n-элементного множества содержалось хотя бы одно отмеченное двухэлементное?

Графы-2

1. Дан связный граф с $n \geqslant 10$ вершинами и $2n-1$ рёбрами. Докажите, что в нём можно найти простой цикл и удалить в нём все рёбра так, чтобы граф остался связным.

2. Граф на n вершинах имеет диаметр 2 (от любой вершины до любой можно пройти не более чем по двум ребрам), и в нём нет вершины, соединённой со всеми. Каково минимально возможное число рёбер?

3. Докажите, что из сильно связного ориентированного графа на n вершинах можно выкинуть несколько рёбер, оставив не более $2n-3$, таким образом, что граф не потеряет сильной связности.

4. В межгалактической империи 10^{2015} планет, любые две из которых соединены двусторонней прямой космической линией. Этими линиями владеют 2015 транспортных компаний. Император хочет закрыть k компаний так, чтобы, пользуясь только рейсами оставшихся, можно было бы с любой планеты добраться до любой другой. При каком наибольшем k он гарантированно сможет осуществить свой план?

5. Известно, что в дереве ровно $2n$ висячих вершин. Докажите, что можно провести n рёбер так, чтобы после удаления любого ребра граф останется связным.

6. Даны $N \geqslant 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего номера к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовем *однотонной,* если нет двух таких точек A и B, что от A до B можно добраться и по красным стрелкам, и по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.

7. Каждое ребро некоторого графа G окрашено в один из двух цветов. Для каждого из цветов все компоненты связности графа, образованного только ребрами этого цвета, содержат не более $n > 1$ вершин. Докажите, что все вершины графа G можно окрасить в n цветов правильным образом.

Приложение A

Анонсы спецкурсов

Эллиптические кривые

Эллиптические кривые — удивительно красивый математический объект. Они сочетают в себе наглядность (задаются очень простыми уравнениями) и необыкновенную сложность. Многие проблемы, связанные с эллиптическими кривыми, не решены до сих пор (например, знаменитая гипотеза Бёрча-Свиннертон-Дайера, входящая в список задач тысячелетия). В теории чисел эллиптические кривые были, в частности, использованы Эндрю Уайлсом в доказательстве великой теоремы Ферма! Помимо этого, эллиптические кривые над конечными полями активно применяются в криптографических приложениях.

На спецкурсе мы дадим краткий обзор теории эллиптических кривых, изучим основные результаты (например, как могут быть устроены рациональные точки на таких кривых), а также обсудим место этой теории в современной математике.

Линейно-алгебраический метод в комбинаторике

Что общего у следующих вопросов:

- Какое наибольшее количество точек можно расположить на плоскости так, чтобы все попарные расстояния были нечётными?
- На какое наименьшее количество полных двудольных графов можно разбить полный граф на n вершинах?
- Правда ли, что если прямоугольник разрезан на квадраты, то соотношение сторон прямоугольника — рациональное число?
- Какое наибольшее количество подмножеств чётного размера n-элементного множества можно выбрать так, чтобы пересечение любых двух подмножеств имело нечётный размер?

Оказывается, что все эти задачи можно решить похожим образом, используя линейно-алгебраический метод.

На спецкурсе мы познакомимся с базовыми принципами линейной алгебры и их применением в ряде комбинаторных задач, как в приведённых выше, так и других.

Дистанционные графы в рациональных пространствах

Дистанционным графом называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребрами соединены точки, находящиеся на расстоянии 1.

Одна из интересных характеристик этого такого графа — его хроматическое число, а именно минимальное количество цветов, нужное для того, чтобы покрасить всю плоскость так, чтобы никакие две соседние вершины не были бы покрашены в один цвет. Точное значение этой величины не известно, но известно что оно находится между 5 и 7.

Оказывается, что если рассматривать точки плоскости с рациональными координатами, то ответ меняется кардинально — хроматическое число становится равно 2.

Мы поговорим о том, как меняются дистанционные графы, если их начать рассматривать в рациональных пространствах, и о том, как с ними работать.

Неевклидова плоскость и небеса в теории относительности

Многие факты школьной геометрии оказываются понятными в неевклидовом контексте. Будет рассказано о том, как естественно строится неевклидова геометрия, как придумывались модели Кэли-Клейна и Пуанкаре, как они связаны с небосводом, который мы наблюдаем, и какова комбинаторика неевклидовой плоскости.

Предполагается знакомство с понятиями производной, логарифма и экспоненты.

Вокруг круговых многочленов

При знакомстве с простейшими задачами теории чисел мы сразу же сталкиваемся с понятием *простого числа* (т. е. натурального числа, которое нельзя представить в виде произведения двух меньших натуральных чисел). В старших классах мы знакомимся с многочленами. Среди многочленов можно выделить многочлены, которые нельзя разложить в произведение многочленов меньшей степени. Такие многочлены называются *неприводимыми* и могут считаться аналогами простых чисел среди многочленов.

Однако при определении неприводимых многочленов большую роль играет вопрос о том, какими можно брать коэффициенты этих многочленов. Если разрешить коэффициентам быть произвольными комплексными числами, то описание неприводимых многочленов совсем просто — это в точности линейные многочлены (это не что иное как основная теорема алгебры). Если разрешить коэффициентам быть вещественными, то описание становится немного сложнее — это все линейные многочлены и квадратные трехчлены с отрицательным дискриминантом.

А как устроены неприводимые многочлены с целыми коэффициентами? Несмотря на простую формулировку вопроса, полный ответ на него вряд ли можно сформулировать (по крайней мере в достаточно простых терминах). Поэтому мы сосредоточим свое внимание на, казалось бы, совсем частном случае:

> *как устроено разложение многочлена $x^n - 1$ на неприводимые над $\mathbb{Z}$ множители?*

Вот примеры некоторых подобных разложений:

$$\begin{aligned}
x^6 - 1 &= (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1),\\
x^{15} - 1 &= (x-1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot\\
&\quad\cdot(x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1),\\
x^{25} - 1 &= (x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1).
\end{aligned}$$

Оказывается, неприводимые многочлены, возникающие в этих разложениях, обладают большим количеством интересных свойств, делающих эти многочлены полезными в различных вопросах теории чисел. Таким многочлены называются *круговыми,* и именно о них пойдет речь в нашем спецкурсе. В качестве примеров использования таких многочленов отметим следующие три задачи.

1. Докажите, что для любого натурального числа n существует бесконечно много простых чисел вида $kn + 1$.
2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, таких, что все простые делители числа $n^2 + n + 1$ меньше $\sqrt{n}$.

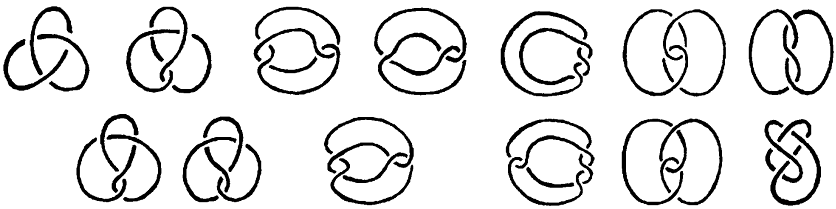
3. Пусть n — произвольное натуральное число. Докажите, что у числа $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ есть не менее 2^n натуральных делителей.

Инварианты узлов и зацеплений

Теория узлов и зацеплений — бурно развивающийся раздел математики, возникший на стыке топологии, комбинаторики и программирования. Мы изучим наглядные задачи об *эквивалентности (изотопности)* узлов и зацеплений, т. е. о возможности получить их друг из друга непрерывной деформацией, в процессе которой не возникает самопересечений.

Основные идеи показываются на простейших частных случаях («олимпиадных» примерах), свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Поэтому для изучения курса не нужны предварительные знания. При этом каждое следующее занятие будет рассчитано на тех, кто решил большинство простых задач на понимание предыдущих.

Зачет будет ставиться на основании решения этих задач. Будут предложены необязательные задачи для исследования.



Если Вы перед курсом *покажете, что некоторые узлы из первого ряда на картинке эквивалентны,* то курс будет для Вас доступен.