$$\int\limits_{\text{29 мая 2023}}^{\text{8 июня 2023}} \left(\begin{array}{c} \text{Московские сборы} \\ \text{секция математики} \end{array} \right) \mathrm{d}t$$

Немного о структуре

Материалы разбиты по группам, в пределах каждой группы отсортированы по темам. Отдельно приведены анонсы спецкурсов.

Материалы, общие для нескольких групп, дублируются.

Оглавление

Глава 1

Воздушные (7-1)

Ферма и Эйлер

Малая теорема Ферма (1). Пусть p — простое число, a не делится на p. Тогда

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Малая теорема Ферма (2). Пусть a — целое, а p — простое. Тогда

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

1. Докажите, что C_p^l делится на p, где p — простое число, а $l < p$ — натуральное. Выведите отсюда малую теорему Ферма с помощью индукции и бинома Ньютона.

2. **(а)** Докажите, что если a и p взаимно просты, то множество остатков чисел $1 \cdot a$, $2 \cdot a$, ..., $(p-1) \cdot a$ при делении на p совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, p-1\}$.
(б) Выведите отсюда малую теорему Ферма.

3. Сколько существует способов раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Раскраски, совмещающиеся поворотом, считаются одинаковыми.) Найдите формулу и выведите малую теорему Ферма.

4. **(а)** В графе, вершинам которого соответствуют различные ненулевые остатки от деления на p, проведём из каждого остатка r стрелку в остаток ra. Докажите, что этот граф разбивается на простые ориентированные циклы.
(б) Задумавшись о длинах образующихся ориентированных циклов, выведите малую теорему Ферма.

5. Верно ли, что если для натурального $k > 1$ и всех целых a выполнено $a^k \equiv a \pmod{k}$, то k — простое число?

Определение. Пусть n — натуральное число. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ определяется как количество чисел, не превосходящих n, взаимно простых с n.

Теорема Эйлера. Натуральные a и n взаимно просты. Тогда $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

6. Докажите теорему Эйлера, повторив рассуждения из задачи
(а) 2; **(б)** 4.

7. **(а)** Пусть p и q — различные простые числа. Найдите $\varphi(p^\alpha)$ и $\varphi(pq)$.

   (б) Докажите, что если a и b взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

   (в) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — разложение n на простые множители. Докажите, что $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

8. **Усиление теоремы Эйлера.** Пусть $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — разложение m на простые множители, $s = \text{НОК}\big(\varphi(p_1^{\alpha_1}), \varphi(p_2^{\alpha_2}), \ldots, \varphi(p_k^{\alpha_k})\big)$. Докажите, что для любого целого a, взаимно простого с m, верно $a^s \equiv 1 \pmod{m}$.

Добавка по функции Эйлера

9. Найдите, чему равны суммы

(а) $\sum\limits_{n \,\vdots\, d} \varphi(d)$; **(б)** $\sum\limits_{\substack{d \leqslant n \\ (n,d)=1}} d$.

Ферма и Эйлер. Задачи

1. Докажите, что число $99^{100} + 100^{99}$ составное.

2. Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что $\underbrace{111\ldots11}_{p-1} \vdots\ p$.

3. Докажите, что $2^{n!} - 1 \vdots\ n$ для любого нечётного натурального n.

4. При каких простых p число $5^{p^2} + 1$ делится на p?

5. Пусть p и q — различные простые числа. Какой остаток даёт число $p^q + q^p$ при делении на pq?

6. При каких натуральных n число $n^2 + n + 1$ делится на 101?

7. Бесконечно ли множество чисел вида вида $2^n - 1$, у которых более миллиона различных простых делителей?

8. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^{504} + b^{504} + c^{504} \vdots\ 2018$. Докажите, что и $abc \vdots\ 2018$.

9. **(а)** Докажите, что для любого простого числа p вида $4k + 3$ не существует целых чисел n таких, что $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$.
(б) Докажите, что для любого простого числа p вида $4k+1$ существует целое число n такое, что $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

10. Докажите, что для любого простого p найдётся делящееся на него число вида $6^n + 3^n + 2^n - 1$.

Ферма и Эйлер. Задачи. Добавка

1. Докажите, что простых чисел вида $4k+1$ бесконечно много.

2. Докажите, что $\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^2}}}}}}_{n} - \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n-1}$ делится на все числа от 1 до n.

3. Докажите, что для любого натурального n существует число с суммой цифр n, делящееся на n.

4. Натуральное число n таково, что $\varphi(n) \neq \varphi(m)$ при всех натуральных $m \neq n$. Докажите, что n делится на 43.

Китайская теорема об остатках

Теорема. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — попарно взаимно простые числа, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторый набор остатков по соответствующим модулям. Тогда существует такое A, что $A \equiv a_i \pmod{m_i}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Более того, все такие A сравнимы по модулю $m_1 m_2 \ldots m_n$.

1. Найдите наименьшее натуральное число, которое даёт остаток 1 при делении на 2, остаток 2 при делении на 3, …, остаток 9 при делении на 10.

2. Найдите все натуральные числа a, не превосходящие 200, удовлетворяющие системе сравнений:

(а) $\begin{cases} a \equiv 3 \pmod{8}; \\ a \equiv 7 \pmod{15}; \end{cases}$ **(б)** $\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{3}, \\ a \equiv 3 \pmod{5}, \\ a \equiv 4 \pmod{7}. \end{cases}$

3. **(а)** Пусть m_1, m_2 — взаимно простые числа; a_1, a_2 — некоторые остатки при делении на m_1, m_2 соответственно. Докажите, что среди чисел от 1 до $m_1 m_2$ существует ровно одно дающее остаток a_1 при делении на m_1 и остаток a_2 при делении на m_2.
(б) Докажите КТО по индукции.

4. **(а)** Натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Придумайте явную формулу для числа x через $m_1, m_2, \ldots, m_n$, чтобы были выполнены сравнения:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv 0 \pmod{m_2}, \\ \ldots \\ x \equiv 0 \pmod{m_n}. \end{cases}$$

Подсказка: теорема Эйлера вам в помощь.
(б) Придумайте явно число x (выразите через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $m_1, m_2, \ldots, m_n$), удовлетворяющее КТО.

5. Пусть p и q — различные нечётные простые числа. Сколько решений имеет сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod{pq}$ среди чисел от 0 до $pq - 1$?

6. Пусть $N = p_1 p_2 \ldots p_s$, где p_i — различные простые числа. Для каждого t, $1 \leqslant t \leqslant s$, найдите, сколько существует чисел от 1 до N, которые делятся на $p_1, p_2, \ldots, p_t$, но не делятся на $p_{t+1}, p_{t+2}, \ldots, p_s$.

7. Докажите, что найдутся 2023 последовательных натуральных числа, каждое из которых имеет по меньшей мере три различных простых делителя.

8. Докажите, что любые 35 подряд идущих целых чисел можно расставить в прямоугольнике 7×5 так, что разность чисел, стоящих в любых двух соседних по стороне клетках, делится или на 7, или на 5.

9. Дано конечное множество A натуральных чисел. Докажите, что существует натуральное число b такое, что для каждого $a \in A$ число ab будет степенью натурального числа.

10. Пусть n — натуральное число, а $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ — простые числа. Обозначим через P_m произведение первых m из них. Докажите, что существует натуральное число k такое, что для каждого i от 1 до n числа P_n и $k + P_i$ взаимно просты.

Китайская теорема об остатках. Задачи посложнее

1. Докажите, что для каждого натурального n существует n подряд идущих натуральных чисел, ни одно из которых не является натуральной степенью (отличной от первой) натурального числа.

2. Дано натуральное n и *различные* целые числа $a_1, a_2, \dots, a_k$ ($k \geqslant 2$) от 1 до n. Известно, что n делит $a_i(a_{i+1}-1)$ для всех $i = 1, 2, \dots, k-1$. Докажите, что n не делит $a_k(a_1-1)$.

3. **(а)** Докажите, что числа вида t^2+t+1 имеют бесконечно много простых делителей.
(б) Докажите, что существует t такое, что t^2+t+1 имеет хотя бы 2023 различных простых делителя.

4. При изготовлении елочной гирлянды электрик Петров сделал на куске провода отметки, делящие его на 113 одинаковых кусков, и ушёл погулять. В это время электрик Иванов разметил тот же провод на 137 одинаковых кусков и пошёл туда же. В это время вернувшийся с прогулки электрик Сидоров быстро разрезал провод по всем отметкам. Куски какого размера у него получились, и сколько получилось кусков каждого вида?

5. Дано натуральное число n. Известно, что существуют такие пять последовательных натуральных чисел, что ни одно из них не делится на n, но их произведение кратно n. Докажите, что существуют такие четыре последовательных натуральных числа, что ни одно из них не делится на n, но их произведение кратно n.

6. Пусть p и q — два простых числа, отличающихся не более чем в два раза. Докажите, что существуют два последовательных натуральных числа, у одного из которых наибольший простой делитель равен p, а у другого — q.

Уравнения в целых числах

1. Решите уравнения в целых числах.
(а) $x^2 + y^2 - 5xy + 4 = 0$;
(б) $1! + 2! + \ldots + n! = m^2$;
(в) $x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+9)^2 = y^2$;
(г) $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 2016$.

2. Не используя великую теорему Ферма, решите в натуральных числах уравнение:

$$a^{2b-1} + (a+1)^{2b-1} = (a+2)^{2b-1}\,.$$

3. Решите уравнение в натуральных числах: $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

4. Пусть a и b — целые числа. Докажите, что если $a^2 + 99ab + b^2$ делится на 101, то и $a^2 - b^2$ делится на 101.

5. Найдите все такие натуральные x, y и простые p, что выполняется

$$x^3 + 3xy(x+y) + 2y^3 = p\,.$$

6. Решите уравнение в натуральных числах: $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

7. Решите уравнения в натуральных числах:
(а) $3^m + 7 = 2^n$; **(б)** $3^x + 4^y = 5^z$.

8. Найдите все натуральные n такие, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n \;\vdots\; n$.

9. Докажите, что значение выражения $a^3 + b^3 + c^2$ может быть равно произвольному натуральному числу вида $3k+1$, если a, b, c целые.

Добавка к уравнениям в целых числах

1. При каких натуральных число $n^3 + 2n^2 + 11$ является точным кубом?
2. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных чётных чисел?
3. Найдите все натуральные числа n, у которых есть делитель d такой, что $n^2 + d^2$ делится на $d^2n + 1$.
4. Какие натуральные числа могут быть представлены в виде суммы нескольких (больше одного) последовательных натуральных чисел?
5. Попарно взаимно простые натуральные числа a, b, c таковы, что значение дроби
$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$
является целым числом. Чему оно может быть равно?
6. Найдите все пары натуральных чисел a, b такие, что $a^3 + 6ab + 1$ и $b^3 + 6ab + 1$ являются точными кубами.

Неравенства и дополнительные построения

1. **(а)** В треугольнике ABC на биссектрисе внешнего угла при вершине A выбрали точку M. Докажите, что $BM + MC \geqslant AB + AC$.
(б) На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D, а на продолжении отрезка BC за точку C — точка E так, что $BD = CE$. Докажите, что $AB + AC < AD + AE$.

2. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Докажите, что если $\angle AMB < 90°$, то $\angle BAM > \angle MAC$.

3. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D, а на катете BC — точка E. Докажите, что $AE + DE > AB$.

4. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$.
(а) Известно, что $\angle AMD = 90°$. Докажите, что $AB + CD \geqslant AD$.
(б) Известно, что $\angle AMD = 120°$. Докажите, что $AB + \frac{BC}{2} + CD \geqslant AD$.

5. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N соответственно. Докажите, что периметр четырехугольника $KLMN$
(а) меньше периметра квадрата; **(б)** не меньше, чем $2AC$.

6. В треугольнике ABC равны стороны AB и AC, а угол A равен $20°$. Докажите, что
(а) $AB < 3BC$; **(б)** $AB > 2BC$.

7. **(а)** На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. При каких положениях точек E и F на сторонах AC и BC соответственно периметр треугольника DEF будет минимальным?
(б) При каких положениях точек D, E, F на сторонах BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC периметр треугольника DEF будет минимальным?

Неравенства. Добавка

1. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O, причём $\angle AOC = 60^\circ$. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$.

2. Угол B треугольника ABC равен 120°. В треугольнике проведена биссектриса BL, из точки L опущены перпендикуляры LK и LM на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что $2KM < AC$.

3. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. На сторонах AB и AC выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle XMY = 90^\circ$. Докажите, что $BM - MX > CY - XY$.

4. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K. Оказалось, что $\angle ABK = 7^\circ$ и $\angle ABC = 77^\circ$. Докажите, что $2AK + AC > BC$.

5. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причём $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

Поворот

Поворотом вокруг точки O на угол α против часовой стрелки называется такое преобразование плоскости, при котором произвольная точка A переходит в такую точку A', что $OA = OA'$ и $\angle A'OA = \alpha$ (здесь угол отсчитывается от OA против часовой стрелки).

Утверждение. Пусть при повороте на угол α прямая ℓ перешла в прямую ℓ'. Тогда угол между прямыми ℓ и ℓ' равен α.

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC вовне построены правильные треугольники ABD и ACE. Докажите, что отрезки CD и BE равны. Чему равен угол между ними?

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и D равны α, а серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются на стороне AD. Найдите угол между диагоналями AC и BD.

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $\angle PAQ = \angle QAD$. Докажите, что $AP = DQ + BP$.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$, симметричный относительно своей диагонали AC. На его стороне AB построили равносторонний треугольник AEB во внешнюю сторону, а на стороне BC — равносторонний треугольник BCF во внутреннюю сторону. Докажите, что точки E, F и D лежат на одной прямой.

5. Дан квадрат $ABCD$ и точка P внутри него. Через точку A проводят прямую, перпендикулярную BP; через точку B проводят прямую, перпендикулярную CP; через точку C проводят прямую, перпендикулярную DP; через точку D проводят прямую, перпендикулярную AP. Докажите, что четыре проведённые прямые пересекаются в одной точке.

6. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что точка A и середины отрезков BD и EF являются вершинами правильного треугольника.

7. На сторонах AB и BC правильного 10-угольника отмечены точки X и Y соответственно так, что $AX = BY$. Найдите сумму углов, под которыми виден отрезок XY из всех вершин десятиугольника, кроме вершины B.

8. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X, что треугольники AXB и CXD равнобедренные с углом $120°$ при вершине X. Докажите, что найдётся такая точка Y, что треугольники BYC и AYD правильные.

Поворот. Со вкусом Торричелли

1. На стороне BC треугольника ABC с углом A, равным $120°$, вовне построили правильный треугольник BCD. Докажите, что D лежит на биссектрисе угла A.

2. Дан правильный треугольник ABC и точка X. Докажите, что $AX + BX \geqslant CX$.

3. Внутри равностороннего треугольника ABC выбрали точку X. Оказалось, что $\angle AXB > \angle BXC > \angle CXA$. Докажите, что $CX > AX > BX$.

4. **(а)** Внутри треугольника ABC нашлась такая точка T, из которой все стороны видны под углом $120°$. Докажите, что для любой точки X верно неравенство

$$AX + BX + CX \geqslant AT + BT + CT\,.$$

(б) Угол A треугольника ABC больше $120°$. Докажите, что для любой точки X плоскости выполнено неравенство

$$AX + BX + CX \geqslant AB + AC\,.$$

5. Дан треугольник ABC, в котором все углы меньше $120°$. На сторонах AB, AC, BC вовне построены правильные треугольники ABF, ACE, BCD. Докажите, что отрезки AD, BE, CF пересекаются в одной точке, причём все стороны треугольника ABC видны из неё под углом $120°$.

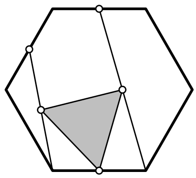
Средняя линия

Напоминание. *Средняя линия* — это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Она параллельна третьей стороне треугольника и равна её половине.

1. Точка D — середина медианы AM треугольника ABC. Точка E на стороне AC такова, что $ME \parallel BD$. Найдите отношение $AE : EC$.

2. В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC. Пусть M — середина боковой стороны AB. Докажите, что прямая BD проходит через середину отрезка CM.

3. Дан правильный шестиугольник. Отмеченные точки — середины отрезков, на которых они лежат. Докажите, что серый треугольник правильный.



4. Даны параллелограмм $ABCD$ и такая точка K, что $AK = BD$. Точка M — середина CK. Докажите, что $\angle BMD = 90°$.

5. **(а)** Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, пересекаются в середине отрезка, соединяющего середины диагоналей.
(б) В выпуклом четырёхугольнике, не являющемся параллелограммом, две противоположные стороны равны. Докажите, что прямая, проходящая через середины двух других сторон, образует равные углы с этими равными сторонами.

6. Докажите, что проекции вершины A на биссектрисы внутренних и внешних углов B и C треугольника ABC лежат на одной прямой.

7. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB = CK$. Точки N и M — середины отрезков AK и BC соответственно. Отрезки NM и CK пересекаются в точке P. Докажите, что $KN = KP$.

8. На стороне AC треугольника ABC взята точка K так, что $CK = AB$. Точка L — проекция точки C на прямую, проходящую через точку K и параллельную биссектрисе угла A. Докажите, что точка L лежит на прямой, содержащей среднюю линию треугольника ABC.

9. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка X, что $\angle ABX = \angle ACX$. Докажите, что проекции точки X на стороны AB и AC равноудалены от середины стороны BC.

Заключительный разнобой

1. В треугольнике ABC проведена медиана BM, в треугольнике ABM — медиана BN, в треугольнике BNC — медиана NK. Известно, что $AC = 2AB$. Докажите, что $NK \perp BM$.

2. Дан ромб $ABCD$ с углом A равным $60°$. На продолжении стороны AB за точку B выбрана точка L такая, что $BL = AC + AD$. Найдите $\angle ADL$.

3. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Прямая, проходящая через точку C перпендикулярно BC, пересекает прямую, проходящую через точку D параллельно AC, в точке E. Докажите, что EC — биссектриса угла BED.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны (но не параллельны), точки M и N — середины AD и BC. Серединный перпендикуляр к MN пересекает стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AP = CQ$.

5. Внутри правильного треугольника ABC отмечена точка X. Докажите, что
$$AX + BX + CX \leqslant 2AB\,.$$

6. В четырехугольнике $ABCD$ угол B тупой, M — середина CD. Докажите, что $2BM < AC + AD$.

7. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN. На продолжении отрезка MA за точку A выбрана точка J такая, что $\angle BNJ = 90°$. Оказалось, что $AM = AJ$. Докажите, что $AB + BJ > AM + AC$.

8. Пусть BH — высота равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = AC$. Точка D на отрезке BH такова, что $AB = 2BD$, $BC = 2CD$. Найдите $\angle BCD$.

Усиление индукции

1. Докажите неравенство:
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}<2\,.$$

2. Докажите, что при всех натуральных n сумма $1^3+2^3+\ldots+n^3$ является точным квадратом.

3. Определим числа K_n: $K_0=1$ и $K_{n+1}=1+\min(2K_{[n/2]},3K_{[n/3]})$. Докажите, что $K_n\geqslant n$.

4. Докажите, что если НОД$(a_1,a_2,\ldots,a_n)=1$, то уравнение
$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=1$$
разрешимо в целых числах.

5. Докажите неравенство
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{5}{2}\,.$$

6. Назовем натуральное число *ровным*, если в его десятичной записи все цифры одинаковы (например, 3, 111, 444444). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n+1$ ровных чисел.

7. В дереве n вершин, занумерованных числами от 1 до n. Докажите, что любые n точек плоскости, среди которых никакие три не лежат на одной прямой, можно так занумеровать числами от 1 до n, чтобы никакие два отрезка, соответствующие ребрам дерева, не пересекались.

8. Докажите неравенство $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}}}<3$.

Индукция в графах

1. В стране $n > 2$ городов, и любые два города соединены дорогой с односторонним движением.
(а) Докажите, что в этой стране есть город, из которого можно добраться в любой другой.
(б) Докажите, что при любой схеме движения в этой стране можно поменять направление движения не более чем на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

2. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

3. Ребра дерева раскрашены в два цвета. Если в какую-то вершину входят ребра только одного цвета, то их все можно перекрасить в другой цвет. Докажите, что все дерево можно сделать одноцветным.

4. **(а)** В графе степень каждой вершины не больше d. Докажите, что его вершины можно раскрасить в $d+1$ цвет так, чтобы вершины, соединённые ребром, были раскрашены в разные цвета.
(б) В ориентированном графе входящая степень каждой вершины не больше d. Докажите, что его вершины можно раскрасить в $2d + 1$ цвет так, чтобы вершины, соединённые ребром, были раскрашены в разные цвета.

5. Назовем две вершины A и B ориентированного графа *близкими,* если и от A до B и от B до A есть путь по ребрам длины 1 или 2. Докажите, что для любого $n > 4$ существует ориентированный граф на n вершинах, все пары вершин которого близкие.

6. Дан граф, содержащий $2n$ вершин и не менее чем $n^2 + 1$ ребро.
(а) Докажите, что в нем есть цикл длины 3.
(б) Докажите, что в нем есть не менее n циклов длины 3.

7. В волшебной стране 2^n поселений, любые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. В этой стране дорожным движением заведует известный волшебник Саруман, который под влиянием ока Саурона решил так реорганизовать движение, чтобы путник, покинув любой город, уже не смог бы в него вернуться. Для этого он планирует поменять направления некоторых дорог. Докажите, что ему достаточно поменять направления у $2^{n-2}(2^n - n - 1)$ дорог, чтобы добиться поставленной цели.

Информация

1. Загадано натуральное число от 1 до 100. Можно задавать вопросы, на которые дается ответ «да» или «нет». За какое наименьшее число вопросов всегда можно отгадать число, если

(а) каждый следующий вопрос задается после того, как получен ответ на предыдущий вопрос;

(б) надо заранее сказать все вопросы?

2. В каждую клетку доски 8×8 записано целое число от 1 до 64 (каждое по разу). За один вопрос, указав любую совокупность полей, можно узнать числа, стоящие на этих полях (без указания, какую клетку какое число занимает). За какое наименьшее число вопросов всегда можно узнать, какие числа где стоят?

3. Имеется 1000 бутылок с вином, в одной вино испорчено, и 10 мышей. Если мышь выпьет плохого вина, то на следующий день она сдохнет. За какое наименьшее количество дней можно гарантированно найти испорченное вино?

4. Туристы взяли в поход 80 банок консервов, веса которых известны и различны (есть список). Вскоре надписи на банках стерлись, и только завхоз знает, где что. Он хочет доказать всем, что в какой банке находится, не вскрывая банок и пользуясь только списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов на чашах. Какое наименьшее количество взвешиваний ему для этого потребуется?

5. Имеются двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее настоящей, если

(а) $k = 14$; **(б)** $k = 12$; **(в)** $k = 13$?

Конструкции и алгоритмы

1. В совете директоров компании n человек. Важные документы хранятся в сейфе. Какое наименьшее число замков должен иметь сейф, чтобы можно было изготовить сколько-то ключей и так их раздать членам совета, чтобы доступ в сейф был возможен если и только если соберется не менее k членов совета?

2. В трех коробочках лежат шесть монет, в каждой коробочке одна настоящая и одна фальшивая. Известно, что все фальшивые монеты весят одинаково, и все настоящие монеты весят одинаково, но фальшивые легче настоящих. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить все фальшивые монеты?

3. Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 грамма, серебряные — по 2 грамма, медные — по 1 грамму. Как на чашечных весах без гирек гарантированно определить тип у всех монет не более чем за 101 взвешивание?

4. **(а)** Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причем одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
(б) Та же задача, но первый выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Второй должен угадать невыложенную карту.

5. Было n внешне одинаковых монет, которые весят x_1, x_2, ..., x_n граммов (веса монет — попарно различные положительные действительные числа), а также невесомые наклейки с числами x_1, x_2, ..., x_n. Ночью лаборант взвесил монеты и промаркировал их наклейками. Требуется с помощью чашечных весов проверить, что он ничего не перепутал. Например, если $n = 6$, $x_1 = 1$, ..., $x_6 = 6$, то это возможно сделать за 2 взвешивания, проверив, что

$$1 + 2 + 3 = 6\,,$$
$$1 + 6 < 3 + 5\,.$$

Существует ли при $n = 8$ такой набор весов x_1, x_2, ..., x_8, правильность маркировки которого возможно проверить за 2 взвешивания?

Информационная добавка

1. Имеется пять пакетов попарно разной массы и чашечные весы. За какое наименьшее число взвешиваний можно расположить пакеты в порядке возрастания массы?

2. Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 100-этажного небоскреба нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть 2 ореха. Какого наименьшего числа бросков ей заведомо хватит? (Неразбившийся орех можно бросать снова.)

3. В каждом из 30 сундуков лежат 100 монет. Монеты, лежащие в одном сундуке, всегда одинаковые, монеты из разных сундуков могут быть разными. Вес каждой монеты — 1 г, 2 г, …, 8 г или 9 г. В наличии есть весы, показывающие массу груза от 1 до 999 г, если вес больше, то показывают 999. За какое наименьшее количество взвешиваний можно определить, какие монеты лежат в каком сундуке?

4. Среди сокровищ горы Эребор гномы обнаружили 3^{2n} Аркенстонов (драгоценный камень). Однако только 1 из них действительно настоящий. Известно, что настоящий Аркенстон легче фальшивых. У гномов есть трое чашечных весов. К сожалению, одни из весов заколдованы, и они могут показывать что угодно. Гномы знают, что одни весы заколдованы, но не знают какие. Как определить настоящий Аркенстон за $3n + 1$ взвешивание?

Слепые алгоритмы

1. Назовем *лабиринтом* шахматную доску 8×8, где между некоторыми полями вставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Петя пишет программу — конечную последовательность указанных команд, и дает ее Васе, после чего Вася выбирает лабиринт и помещает в него ладью на любое поле. Докажите, что Петя может написать такую программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе Васи.

2. В лесу 200 норок, расположенных в ряд, в одной из которых спрятался заяц. Лиса может залезть в любую норку. После того, как лиса побывала в какой-то норке, заяц (если уцелел) обязательно перепрыгивает в соседнюю норку (незаметно от лисы). Сможет ли лиса поймать зайца?

3. На бесконечной в обе стороны улице стоит отделение милиции, из которого сбежал подозреваемый. Максимальная скорость милиционера — 1, подозреваемого — v. Время побега и местоположение подозреваемого милиционеру не известны. Верно ли, что он сможет поймать подозреваемого (оказаться с ним в одной точке), если ему известно, что
(а) $v = 0{,}9$; **(б)** $v < 1$.

4. В бастионе 2023 бойницы, расположенные в ряд. Бойницы закрыты заслонками так, что снайпер не видит, есть ли в бойнице мишень или нет. После выстрела мишень перемещается на 1 бойницу вправо. Если мишень уже находится в самой правой бойнице, то она не перемещается. Какое наименьшее число выстрелов надо сделать, чтобы наверняка поразить мишень?

5. В старом замке 81 зал. Залы образуют квадрат 9×9. В одном из залов живет привидение. Великий инквизитор хочет его изгнать. Он может окропить любой зал святой водой. У приведения два хп. После первого окропления привидение теряет одно хп и перебирается в соседний зал. После второго окропления изгоняется. Какого наименьшего числа окроплений хватит инквизитору, чтобы изгнать привидение? (Привидение невидимое, если вы не знали).

6. Торин разложил 60 различных драгоценных камней на столе по кругу, оставив один промежуток. Каждый драгоценный камень уникален и имеет имя. Дайн стоящий спиной к столу и не видя начальной расстановки камней называет имя какого-то камня. Если камень лежит рядом со свободным местом, Торин ее туда передвигает, не говоря ничего Дайну. Иначе ничего не происходит. Потом Дайн называет ещё одно имя, и так сколько угодно раз, пока он не скажет «баста».
(а) Может ли Дайн добиться того, чтобы после команды «баста» каждый камень изменил своё положение относительно начальной расстановки?

(б) Может ли Дайн добиться того, чтобы после команды «баста» рядом с промежутком наверняка не было бы Аркенстона (один из камней)?

7. **(а)** В тюрьму поместили 100 узников. Надзиратель сказал им: «Я дам вам вечер поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы больше не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, вы можете оставить лампу как включенной, так и выключенной. Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, то я всех вас выпущу на свободу. А если неправ - скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-нибудь забудут — если будете молчать, то все побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним.». Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение.

(б) Та же задача, но узникам неизвестно, включена или выключена лампочка изначально.

Алгоритмическая добавка

1. Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек — белую или чёрную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это? Мудрецы могут заранее договориться о своих действиях (до того, как им завязали глаза); мудрецам известно, каких 1000 цветов могут быть колпаки.

2. **(а)** По кольцевой дороге едет поезд, состоящий из совершенно одинаковых вагонов, последний вагон которого сцеплен с первым, так что внутри можно свободно перемещаться между вагонами. В каждом вагоне свет горит или не горит. Вы ходите по вагонам и можете включать или выключать свет. Ваша задача — посчитать количество вагонов. Как вы сможете это сделать?
   (б) В каждом вагоне живёт проводник-людоед, который ест каждого, кто побывал в вагоне 1000 раз. Ваша задача не изменилась.
   (в) Дополнительно к предыдущему пункту вы хотите остаться в живых.

3. Секретный код к любому из сейфов ФБР — это целое число от 1 до 1700. Два шпиона узнали по одному коду каждый и решили ими обменяться. Согласовав заранее свои действия, они встретились на берегу реки возле кучи из 26 камней. Сначала 1-й шпион кинул в воду один или несколько камней, потом — 2-й, потом — опять 1-й, и т. д. до тех пор, пока камни не кончились. Затем шпионы разошлись. Каким образом могла быть передана информация?

Глава 2

Огненные (7-2)

Ферма и Эйлер

Малая теорема Ферма (1). Пусть p — простое число, a не делится на p. Тогда

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Малая теорема Ферма (2). Пусть a — целое, а p — простое. Тогда

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

1. **(а)** Докажите, что C_p^l делится на p, где p — простое число, а $l < p$ — натуральное.
(б) Выведите отсюда малую теорему Ферма с помощью индукции и бинома Ньютона.

2. **(а)** Докажите, что если a и p взаимно просты, то множество остатков чисел $1 \cdot a$, $2 \cdot a$, …, $(p-1) \cdot a$ при делении на p совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, p-1\}$.
(б) Выведите отсюда малую теорему Ферма.

3. **(а)** Сколько существует способов раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Раскраски, совмещающиеся поворотом, считаются одинаковыми.)
(б) Выведите отсюда малую теорему Ферма.

4. **(а)** В графе, вершинам которого соответствуют различные ненулевые остатки от деления на p, проведём из каждого остатка r стрелку в остаток ra. Докажите, что этот граф разбивается на простые ориентированные циклы.
(б) Задумавшись о длинах образующихся ориентированных циклов, выведите малую теорему Ферма.

5. Верно ли, что если для натурального $k > 1$ и всех целых a выполнено $a^k \equiv a \pmod k$, то k — простое число?

Определение. Пусть n — натуральное число. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ определяется как количество чисел, не превосходящих n, взаимно простых с n.

Теорема Эйлера. Натуральные a и n взаимно просты. Тогда $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$.

6. Докажите теорему Эйлера, повторив рассуждения из задачи
(а) 2; **(б)** 4.

7. **(а)** Пусть p и q — различные простые числа. Найдите $\varphi(p^\alpha)$ и $\varphi(pq)$.
(б) Докажите, что если a и b взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.
(в) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — разложение n на простые множители. Докажите, что $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

8. **Усиление теоремы Эйлера.** Пусть $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — разложение m на простые множители, $s = \text{НОК}\big(\varphi(p_1^{\alpha_1}), \varphi(p_2^{\alpha_2}), \ldots, \varphi(p_k^{\alpha_k})\big)$. Докажите, что для любого целого a, взаимно простого с m, верно $a^s \equiv 1 \pmod{m}$.

Ферма и Эйлер. Задачи

1. Докажите, что число $99^{100} + 100^{99}$ составное.

2. Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что $\underbrace{111\ldots11}_{p-1} \mathrel{\vdots} p$.

3. Докажите, что $2^{n!} - 1 \mathrel{\vdots} n$ для любого нечётного натурального n.

4. Бесконечно ли множество чисел вида вида $2^n - 1$, у которых более миллиона различных простых делителей?

5. При каких простых p число $5^{p^2} + 1$ делится на p?

6. **(а)** Докажите, что $n^{84} - n^4 \mathrel{\vdots} 20400$ для любого натурального n.
(б) Можно ли 20400 заменить на какое-нибудь большее число, чтобы утверждение осталось верным?

7. При каких натуральных n число $n^2 + n + 1$ делится на 101?

8. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^{504} + b^{504} + c^{504} \mathrel{\vdots} 2018$. Докажите, что и $abc \mathrel{\vdots} 2018$.

9. Пусть p и q — различные простые числа. Какой остаток даёт число $p^q + q^p$ при делении на pq?

10. **(а)** Докажите, что для любого простого числа p вида $4k + 3$ не существует целых чисел n таких, что $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$.
(б) Докажите, что для любого простого числа p вида $4k+1$ существует целое число n такое, что $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Китайская теорема об остатках

Теорема. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — попарно взаимно простые числа, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторый набор остатков по соответствующим модулям. Тогда существует такое A, что $A \equiv a_i \pmod{m_i}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Более того, все такие A сравнимы по модулю $m_1 m_2 \ldots m_n$.

1. Найдите наименьшее натуральное число, которое даёт остаток 1 при делении на 2, остаток 2 при делении на 3, …, остаток 9 при делении на 10.

2. Найдите все натуральные числа a, не превосходящие 200, удовлетворяющие системе сравнений:

(а) $\begin{cases} a \equiv 3 \pmod 8; \\ a \equiv 7 \pmod{15}; \end{cases}$ **(б)** $\begin{cases} a \equiv 1 \pmod 3, \\ a \equiv 3 \pmod 5, \\ a \equiv 4 \pmod 7. \end{cases}$

3. **(а)** Пусть m_1, m_2 — взаимно простые числа; a_1, a_2 — некоторые остатки при делении на m_1, m_2 соответственно. Докажите, что среди чисел от 1 до $m_1 m_2$ существует ровно одно дающее остаток a_1 при делении на m_1 и остаток a_2 при делении на m_2.
(б) Докажите КТО по индукции.

4. **(а)** Натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Придумайте явную формулу для числа x через $m_1, m_2, \ldots, m_n$, чтобы были выполнены сравнения:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv 0 \pmod{m_2}, \\ \ldots \\ x \equiv 0 \pmod{m_n}. \end{cases}$$

Подсказка: теорема Эйлера вам в помощь.
(б) Придумайте явно число x (выразите через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $m_1, m_2, \ldots, m_n$), удовлетворяющее КТО.

5. Пусть p и q — различные нечётные простые числа. Сколько решений имеет сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod{pq}$ среди чисел от 0 до $pq - 1$?

6. Пусть $N = p_1 p_2 \ldots p_s$, где p_i — различные простые числа. Для каждого t, $1 \leqslant t \leqslant s$, найдите, сколько существует чисел от 1 до N, которые делятся на $p_1, p_2, \ldots, p_t$, но не делятся на $p_{t+1}, p_{t+2}, \ldots, p_s$.

7. Докажите, что найдутся 2023 последовательных натуральных числа, каждое из которых имеет по меньшей мере три различных простых делителя.

8. Докажите, что любые 35 подряд идущих целых чисел можно расставить в прямоугольнике 7×5 так, что разность чисел, стоящих в любых двух соседних по стороне клетках, делится или на 7, или на 5.

9. Дано конечное множество A натуральных чисел. Докажите, что существует натуральное число b такое, что для каждого $a \in A$ число ab будет степенью натурального числа.

10. Пусть n — натуральное число, а $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ — простые числа. Обозначим через P_m произведение первых m из них. Докажите, что существует натуральное число k такое, что для каждого i от 1 до n числа P_n и $k + P_i$ взаимно просты.

Уравнения в целых числах

1. Решите уравнения в натуральных числах.
(а) $x^2 + y^2 - 5xy + 4 = 0$;
(б) $1! + 2! + \ldots + n! = m^2$;
(в) $x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+4)^2 = y^2$;
(г) $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 2016$.

2. Не используя великую теорему Ферма, решите в натуральных числах уравнение:

$$a^{2b-1} + (a+1)^{2b-1} = (a+2)^{2b-1}.$$

3. Решите уравнение в натуральных числах: $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

4. Пусть a и b — целые числа. Докажите, что если $a^2 + 99ab + b^2$ делится на 101, то и $a^2 - b^2$ делится на 101.

5. Найдите все такие натуральные x, y и простые p, что выполняется

$$x^3 + 3xy(x+y) + 2y^3 = p.$$

6. Решите уравнение в натуральных числах: $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

7. Решите уравнения в натуральных числах:
(а) $3^m + 7 = 2^n$; **(б)** $3^x + 4^y = 5^z$.

8. Найдите все натуральные n такие, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n \,\vdots\, n$.

Добавка к уравнениям в целых числах

1. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных чётных чисел?

2. При каких натуральных число $n^3 + 2n^2 + 11$ является точным кубом?

3. Найдите все натуральные числа n, у которых есть делитель d такой, что $n^2 + d^2$ делится на $d^2n + 1$.

4. Попарно взаимно простые натуральные числа a, b, c таковы, что значение дроби

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

является целым числом. Чему оно может быть равно?

5. Какие натуральные числа могут быть представлены в виде суммы нескольких (больше одного) последовательных натуральных чисел?

6. Найдите все пары натуральных чисел a, b такие, что $a^3 + 6ab + 1$ и $b^3 + 6ab + 1$ являются точными кубами.

Неравенства и дополнительные построения

1. **(а)** В треугольнике ABC на биссектрисе внешнего угла при вершине A выбрали точку M. Докажите, что $BM + MC \geqslant AB + AC$.
(б) На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D, а на продолжении отрезка BC за точку C — точка E так, что $BD = CE$. Докажите, что $AB + AC < AD + AE$.

2. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Докажите, что если $\angle AMB < 90°$, то $\angle BAM > \angle MAC$.

3. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D, а на катете BC — точка E. Докажите, что $AE + DE > AB$.

4. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$.
(а) Известно, что $\angle AMD = 90°$. Докажите, что $AB + CD \geqslant AD$.
(б) Известно, что $\angle AMD = 120°$. Докажите, что $AB + \frac{BC}{2} + CD \geqslant AD$.

5. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N соответственно. Докажите, что периметр четырехугольника $KLMN$
(а) меньше периметра квадрата; **(б)** не меньше, чем $2AC$.

6. В треугольнике ABC равны стороны AB и AC, а угол A равен $20°$. Докажите, что
(а) $AB < 3BC$; **(б)** $AB > 2BC$.

7. **(а)** На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. При каких положениях точек E и F на сторонах AC и BC соответственно периметр треугольника DEF будет минимальным?
(б) При каких положениях точек D, E, F на сторонах BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC периметр треугольника DEF будет минимальным?

Неравенства. Добавка

1. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O, причём $\angle AOC = 60^\circ$. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$.

2. Угол B треугольника ABC равен 120°. В треугольнике проведена биссектриса BL, из точки L опущены перпендикуляры LK и LM на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что $2KM < AC$.

3. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. На сторонах AB и AC выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle XMY = 90^\circ$. Докажите, что $BM - MX > CY - XY$.

4. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K. Оказалось, что $\angle ABK = 7^\circ$ и $\angle ABC = 77^\circ$. Докажите, что $2AK + AC > BC$.

Поворот

Поворотом вокруг точки O на угол α против часовой стрелки называется такое преобразование плоскости, при котором произвольная точка A переходит в такую точку A', что $OA = OA'$ и $\angle A'OA = \alpha$ (здесь угол отсчитывается от OA против часовой стрелки).

Утверждение. Пусть при повороте на угол α прямая ℓ перешла в прямую ℓ'. Тогда угол между прямыми ℓ и ℓ' равен α.

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC вовне построены правильные треугольники ABD и ACE. Докажите, что отрезки CD и BE равны. Чему равен угол между ними?
2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и D равны α, а серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются на стороне AD. Найдите угол между диагоналями AC и BD.
3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $\angle PAQ = \angle QAD$. Докажите, что $AP = DQ + BP$.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$, симметричный относительно своей диагонали AC. На его стороне AB построили равносторонний треугольник AEB во внешнюю сторону, а на стороне BC — равносторонний треугольник BCF во внутреннюю сторону. Докажите, что точки E, F и D лежат на одной прямой.
5. Дан квадрат $ABCD$ и точка P внутри него. Через точку A проводят прямую, перпендикулярную BP; через точку B проводят прямую, перпендикулярную CP; через точку C проводят прямую, перпендикулярную DP; через точку D проводят прямую, перпендикулярную AP. Докажите, что четыре проведённые прямые пересекаются в одной точке.
6. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что точка A и середины отрезков BD и EF являются вершинами правильного треугольника.
7. На сторонах AB и BC правильного 10-угольника отмечены точки X и Y соответственно так, что $AX = BY$. Найдите сумму углов, под которыми виден отрезок XY из всех вершин десятиугольника, кроме вершины B.
8. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X, что треугольники AXB и CXD равнобедренные с углом $120°$ при вершине X. Докажите, что найдётся такая точка Y, что треугольники BYC и AYD правильные.

Поворот. Со вкусом Торричелли

1. На стороне BC треугольника ABC с углом A, равным $120°$, вовне построили правильный треугольник BCD. Докажите, что D лежит на биссектрисе угла A.

2. Дан правильный треугольник ABC и точка X. Докажите, что $AX + BX \geqslant CX$.

3. Внутри равностороннего треугольника ABC выбрали точку X. Оказалось, что $\angle AXB > \angle BXC > \angle CXA$. Докажите, что $CX > AX > BX$.

4. **(а)** Внутри треугольника ABC нашлась такая точка T, из которой все стороны видны под углом $120°$. Докажите, что для любой точки X верно неравенство

$$AX + BX + CX \geqslant AT + BT + CT\,.$$

(б) Угол A треугольника ABC больше $120°$. Докажите, что для любой точки X плоскости выполнено неравенство

$$AX + BX + CX \geqslant AB + AC\,.$$

5. Дан треугольник ABC, в котором все углы меньше $120°$. На сторонах AB, AC, BC вовне построены правильные треугольники ABF, ACE, BCD. Докажите, что отрезки AD, BE, CF пересекаются в одной точке, причём все стороны треугольника ABC видны из неё под углом $120°$.

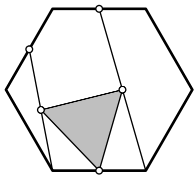
Средняя линия

Напоминание. *Средняя линия* — это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Она параллельна третьей стороне треугольника и равна её половине.

1. Точка D — середина медианы AM треугольника ABC. Точка E на стороне AC такова, что $ME \parallel BD$. Найдите отношение $AE : EC$.

2. В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC. Пусть M — середина боковой стороны AB. Докажите, что прямая BD проходит через середину отрезка CM.

3. Дан правильный шестиугольник. Отмеченные точки — середины отрезков, на которых они лежат. Докажите, что серый треугольник правильный.



4. Даны параллелограмм $ABCD$ и такая точка K, что $AK = BD$. Точка M — середина CK. Докажите, что $\angle BMD = 90°$.

5. **(а)** Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, пересекаются в середине отрезка, соединяющего середины диагоналей.
(б) В выпуклом четырёхугольнике, не являющемся параллелограммом, две противоположные стороны равны. Докажите, что прямая, проходящая через середины двух других сторон, образует равные углы с этими равными сторонами.

6. Докажите, что проекции вершины A на биссектрисы внутренних и внешних углов B и C треугольника ABC лежат на одной прямой.

7. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB = CK$. Точки N и M — середины отрезков AK и BC соответственно. Отрезки NM и CK пересекаются в точке P. Докажите, что $KN = KP$.

8. На стороне AC треугольника ABC взята точка K так, что $CK = AB$. Точка L — проекция точки C на прямую, проходящую через точку K и параллельную биссектрисе угла A. Докажите, что точка L лежит на прямой, содержащей среднюю линию треугольника ABC.

9. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка X, что $\angle ABX = \angle ACX$. Докажите, что проекции точки X на стороны AB и AC равноудалены от середины стороны BC.

Заключительный разнобой

1. В пятиугольнике $ABCDE$:

$$AB = BC = CD = DE, \quad \angle B = 90^\circ, \quad \angle C = 36^\circ, \quad \angle D = 270^\circ\,.$$

Чему равен угол E пятиугольника?

2. В треугольнике ABC проведена медиана BM, в треугольнике ABM — медиана BN, в треугольнике BNC — медиана NK. Известно, что $AC = 2AB$. Докажите, что $NK \perp BM$.

3. Дан ромб $ABCD$ с углом A равным 60°. На продолжении стороны AB за точку B выбрана точка L такая, что $BL = AC + AD$. Найдите $\angle ADL$.

4. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Прямая, проходящая через точку C перпендикулярно BC, пересекает прямую, проходящую через точку D параллельно AC, в точке E. Докажите, что EC — биссектриса угла BED.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle BCD = \angle CDA \geqslant 90^\circ$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M, лежащей на стороне CD. Докажите, что M — середина CD.

6. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны (но не параллельны), точки M и N — середины AD и BC. Серединный перпендикуляр к MN пересекает стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AP = CQ$.

7. Внутри правильного треугольника ABC отмечена точка P. Докажите, что

$$\angle PAB + \angle PBC + \angle PCA > 60^\circ\,.$$

8. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN. На продолжении отрезка MA за точку A выбрана точка J такая, что $\angle BNJ = 90^\circ$. Оказалось, что $AM = AJ$. Докажите, что $AB + BJ > AM + AC$.

Усиление индукции

1. Докажите неравенство:
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2\,.$$

2. Докажите, что при всех натуральных n сумма $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ является точным квадратом.

3. Определим числа K_n: $K_0 = 1$ и $K_{n+1} = 1 + \min(2K_{[n/2]}, 3K_{[n/3]})$. Докажите, что $K_n \geqslant n$.

4. Докажите, что если НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, то уравнение
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 1$$
разрешимо в целых числах.

5. Докажите неравенство
$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{5}{2}\,.$$

6. Назовем натуральное число *ровным,* если в его десятичной записи все цифры одинаковы (например, 3, 111, 444444). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n + 1$ ровных чисел.

7. В дереве n вершин, занумерованных числами от 1 до n. Докажите, что любые n точек плоскости, среди которых никакие три не лежат на одной прямой, можно так занумеровать числами от 1 до n, чтобы никакие два отрезка, соответствующие ребрам дерева, не пересекались.

8. Докажите неравенство $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}}} < 3$.

Индукция в графах

1. В стране $n > 2$ городов, и любые два города соединены дорогой с односторонним движением.
(а) Докажите, что в этой стране есть город, из которого можно добраться в любой другой.
(б) Докажите, что при любой схеме движения в этой стране можно поменять направление движения не более чем на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

2. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

3. Ребра дерева раскрашены в два цвета. Если в какую-то вершину входят ребра только одного цвета, то их все можно перекрасить в другой цвет. Докажите, что все дерево можно сделать одноцветным.

4. **(а)** В графе степень каждой вершины не больше d. Докажите, что его вершины можно раскрасить в $d+1$ цвет так, чтобы вершины, соединённые ребром, были раскрашены в разные цвета.
(б) В ориентированном графе входящая степень каждой вершины не больше d. Докажите, что его вершины можно раскрасить в $2d + 1$ цвет так, чтобы вершины, соединённые ребром, были раскрашены в разные цвета.

5. Назовем две вершины A и B ориентированного графа *близкими,* если и от A до B и от B до A есть путь по ребрам длины 1 или 2. Докажите, что для любого $n > 4$ существует ориентированный граф на n вершинах, все пары вершин которого близкие.

6. Дан граф, содержащий $2n$ вершин и не менее чем $n^2 + 1$ ребро.
(а) Докажите, что в нем есть цикл длины 3.
(б) Докажите, что в нем есть не менее n циклов длины 3.

7. В волшебной стране 2^n поселений, любые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. В этой стране дорожным движением заведует известный волшебник Саруман, который под влиянием ока Саурона решил так реорганизовать движение, чтобы путник, покинув любой город, уже не смог бы в него вернуться. Для этого он планирует поменять направления некоторых дорог. Докажите, что ему достаточно поменять направления у $2^{n-2}(2^n - n - 1)$ дорог, чтобы добиться поставленной цели.

Информация

1. Загадано натуральное число от 1 до 100. Можно задавать вопросы, на которые дается ответ «да» или «нет». За какое наименьшее число вопросов всегда можно отгадать число, если

(а) каждый следующий вопрос задается после того, как получен ответ на предыдущий вопрос;

(б) надо заранее сказать все вопросы?

2. В каждую клетку доски 8×8 записано целое число от 1 до 64 (каждое по разу). За один вопрос, указав любую совокупность полей, можно узнать числа, стоящие на этих полях (без указания, какую клетку какое число занимает). За какое наименьшее число вопросов всегда можно узнать, какие числа где стоят?

3. Имеется 1000 бутылок с вином, в одной вино испорчено, и 10 мышей. Если мышь выпьет плохого вина, то на следующий день она сдохнет. За какое наименьшее количество дней можно гарантированно найти испорченное вино?

4. Туристы взяли в поход 80 банок консервов, веса которых известны и различны (есть список). Вскоре надписи на банках стерлись, и только завхоз знает, где что. Он хочет доказать всем, что в какой банке находится, не вскрывая банок и пользуясь только списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов на чашах. Какое наименьшее количество взвешиваний ему для этого потребуется?

5. Имеются двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее настоящей, если

(а) $k = 14$; **(б)** $k = 12$; **(в)** $k = 13$?

Конструкции и алгоритмы

1. В совете директоров компании n человек. Важные документы хранятся в сейфе. Какое наименьшее число замков должен иметь сейф, чтобы можно было изготовить сколько-то ключей и так их раздать членам совета, чтобы доступ в сейф был возможен если и только если соберется не менее k членов совета?

2. В трех коробочках лежат шесть монет, в каждой коробочке одна настоящая и одна фальшивая. Известно, что все фальшивые монеты весят одинаково, и все настоящие монеты весят одинаково, но фальшивые легче настоящих. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить все фальшивые монеты?

3. Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 грамма, серебряные — по 2 грамма, медные — по 1 грамму. Как на чашечных весах без гирек гарантированно определить тип у всех монет не более чем за 101 взвешивание?

4. **(а)** Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причем одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
(б) Та же задача, но первый выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Второй должен угадать невыложенную карту.

5. Было n внешне одинаковых монет, которые весят x_1, x_2, …, x_n граммов (веса монет — попарно различные положительные действительные числа), а также невесомые наклейки с числами x_1, x_2, …, x_n. Ночью лаборант взвесил монеты и промаркировал их наклейками. Требуется с помощью чашечных весов проверить, что он ничего не перепутал. Например, если $n = 6$, $x_1 = 1$, …, $x_6 = 6$, то это возможно сделать за 2 взвешивания, проверив, что

$$1 + 2 + 3 = 6\,,$$
$$1 + 6 < 3 + 5\,.$$

Существует ли при $n = 8$ такой набор весов x_1, x_2, …, x_8, правильность маркировки которого возможно проверить за 2 взвешивания?

Слепые алгоритмы

1. 50 красных и 50 зелёных хамелеонов случайным образом рассажены по двум клеткам. Каждого хамелеона можно напугать так, чтобы он поменял цвет. Смотритель зоопарка — дальтоник (он не различает цветов). Он может свободно перемещать хамелеонов из одной клетки в другую, а также он может в любой момент напугать любого хамелеона. Сделав некоторое количество таких действий, смотритель отходит от клеток. Верно ли, что смотритель может действовать так, что после его действий количества зелёных хамелеонов в клетках совпадают?

2. Назовем лабиринтом шахматную доску 8×8, где между некоторыми полями вставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Петя пишет программу — конечную последовательность указанных команд, и дает ее Васе, после чего Вася выбирает лабиринт и помещает в него ладью на любое поле. Докажите, что Петя может написать такую программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе Васи.

3. На бесконечной в обе стороны улице стоит отделение милиции, из которого сбежал подозреваемый. Максимальная скорость милиционера — 1, подозреваемого — v. Время побега и местоположение подозреваемого милиционеру не известны. Верно ли, что он сможет поймать подозреваемого (оказаться с ним в одной точке), если ему известно, что $v = 0{,}9$;

4. В лесу 200 норок, расположенных в ряд, в одной из которых спрятался заяц. Лиса может залезть в любую норку. После того, как лиса побывала в какой-то норке, заяц (если уцелел) обязательно перепрыгивает в соседнюю норку (незаметно от лисы). Сможет ли лиса поймать зайца?

5. В бастионе 2023 бойницы, расположенные в ряд. Бойницы закрыты заслонками так, что снайпер не видит, есть ли в бойнице мишень или нет. После выстрела мишень перемещается на 1 бойницу вправо. Если мишень уже находится в самой правой бойнице, то она не перемещается. Какое наименьшее число выстрелов надо сделать, чтобы наверняка поразить мишень?

6. В тюрьму поместили 100 узников. Надзиратель сказал им: «Я дам вам вечер поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы больше не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, вы можете оставить лампу как включенной, так и выключенной. Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, то я всех вас выпущу на свободу. А если неправ - скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-нибудь забудут — если будете молчать, то все побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение

комнаты не станет последним.». Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение.

Глава 3

Земляные (8-1)

Обратные остатки

Очень удобное обозначение. Будем обозначать за $\frac{a}{b}$ такой остаток x по модулю n, что $bx \equiv a \pmod{n}$.

1. Докажите, что $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \equiv \frac{ad+bc}{bd} \pmod{p}$.

2. Для простого $p > 2$ сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$ представлена в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p.

3. Натуральные числа a и b таковы, что число $a^{2022} + 1$ делится на $ab + 1$. Докажите, что число $b^{2022} + 1$ тоже делится на $ab + 1$.

4. Дано простое число $p = 100k + 49$, где k — натуральное число. Докажите, что существует натуральное m такое, что $m^2 + k$ делится на p.

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что числа $ab+9b+81$ и $bc+9c+81$ делятся на 101. Докажите, что число $ca + 9a + 81$ тоже делится на 101.

6. Тридцатизначные числа A и B таковы, что при замене любой цифры числа A на соответствующую цифру числа B результат делится на 7. Докажите, что суммы цифр A и B сравнимы по модулю 7.

7. Докажите, что любое простое число p является делителем числа вида $6^n+3^n+2^n-1$ для некоторого натурального n.

8. В строку выписаны 200 натуральных чисел. Среди любых двух соседних чисел строки правое либо в 9 раз больше левого, либо в 2 раза меньше левого. Может ли сумма всех этих 200 чисел равняться 24^{2022}?

9. Дано простое p. Докажите, что существует такая перестановка $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ чисел $1, 2, \ldots, p$, что числа a_1, a_1a_2, $a_1a_2a_3$, …, $a_1a_2\ldots a_p$ дают разные остатки при делении на p.

10. Пусть в задаче 2 дано $p > 3$. Докажите, что m делится на p^2.

Показатели

Определение. Для взаимно простых a и n показателем числа a по модулю n называется наименьшее натуральное d такое, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

1. Пусть p — простое. Докажите, что любой простой делитель числа p^p-1, больший p, даёт остаток 1 при делении на p.

2. Пусть p – простое нечётное число.
(а) Докажите, что любой простой делитель числа 2^p+1, больший трёх, представим в виде $2kp+1$, где $k \in \mathbb{N}$.
(б) Докажите, что любой простой делитель числа 2^p+3^p, больший пяти, представим в виде $2kp+1$, где $k \in \mathbb{N}$.

3. Докажите, что для любых натуральных a и n, больших единицы, верно $\varphi(a^n-1) \,\vdots\, n$.

4. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что $(7^p-2^p)(7^q-2^q) \,\vdots\, pq$;

5. Пусть p — нечётное простое, а $d_1, d_2, \ldots, d_k$ — всевозможные остатки, имеющие показатель t по модулю p. Какой остаток при делении на p даёт их произведение?

6. Показатель остатка a по модулю n равен d_1, а остатка b — равен d_2. Докажите, что если $(d_1, d_2) = 1$, то показатель остатка ab равен d_1d_2.

7. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r) такие, что $p \mid q^r+1$, $q \mid r^p+1$, $r \mid p^q+1$.

8. Натуральные k, m, n таковы, что числа 5^n-2 и 2^k-5 делятся на 5^m-2^m. Докажите, что n и m взаимно просты.

9. Натуральное число x таково, что 4^x+2^x+1 — простое. Докажите, что 2^x+1 делится на x.

10. Докажите, что для любого натурального $n>1$, свободного от квадратов, существуют такие простое число p и целое число m, что n делится на p, а p^2+pm^p делится на n.

LTE

Определение. Степень вхождения простого числа p в число n будем обозначать через $\nu_p(n)$.

Lifting The Exponent Lemma (LTE). Пусть x, y — натуральные числа, такие что $x-y$ кратно p, а x, y не кратно p для некоторого простого $p \neq 2$. Тогда

$$\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x-y) + \nu_p(n).$$

LTE для $p=2$. Пусть x, y — натуральные числа, такие что $x-y$ кратно 4, а x, y не кратно 2. Тогда

$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x-y) + \nu_2(n).$$

1. **Доказательство LTE.**
   (а) Докажите, что если n не делится на p, то $\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x-y)$.
   (б) Докажите, что $\nu_p(x^p - y^p) \geqslant \nu_p(x-y) + 1$.
   (в) Для $p \neq 2$ докажите $\nu_p(x^p - y^p) = \nu_p(x-y) + 1$.
   (г) Докажите, что если $x - y \,\vdots\, 4$, то $\nu_2(x^{2^k} - y^{2^k}) = \nu_2(x-y) + k$.
   (д) Докажите LTE.

2. Пусть x, y — нечетные целые числа, а n — четное натуральное. Тогда $\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x-y) + \nu_2(x+y) + \nu_2(n) - 1$.

3. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Найдите все $n \in \mathbb{N}$ такие, что $2^n - 1 \,\vdots\, 3^k$.

4. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

5. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Докажите, что лишь для конечного числа $n \in \mathbb{N}$ сумма $\left(a + \frac{1}{2}\right)^n + \left(b + \frac{1}{2}\right)^n$ является целой.

6. Найдите все такие $n \in \mathbb{N}$, что при некоторых взаимно простых x и y и натуральном $k > 1$, выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$.

7. Докажите, что для любого натурального $a > 3$ существует бесконечно много натуральных n таких, что $a^n - 1$ делится на n^2.

8. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $k > 1$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + k^n \,\vdots\, n$.

Транснеравенство

Транснеравенство. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — это какая-то перестановка чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тогда верны следующие неравенства:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1\,.$$

1. Докажите, что
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n\,.$$

2. Докажите, что
$$a + b + c \geqslant \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}\,.$$

3. Докажите, что
$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\,.$$

4. Докажите, что
$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\,.$$

5. Докажите, что
$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leqslant \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\,.$$

6. Пусть $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Докажите, что
$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}\,.$$

7. Пусть $abc = 1$. Докажите, что
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}\,.$$

8. Пусть $abc = 1$. Докажите, что
$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geqslant a + b + c\,.$$

9. Дан набор из нескольких гирек, на каждой написана масса. Известно, что набор масс и набор надписей одинаковы, но возможно некоторые надписи перепутаны. Весы представляют из себя горизонтальный отрезок, закрепленный за середину.

При взвешивании гирьки прикрепляются в произвольные точки отрезка, после чего весы остаются в равновесии либо отклоняются в ту или иную сторону. Всегда ли удастся за одно взвешивание проверить, все надписи верны или нет? (Весы будут в равновесии, если сумма моментов гирь справа от середины равна сумме моментов гирь слева; иначе отклонятся в сторону, где сумма больше. Моментом гири называется произведение ms массы гири m на расстояние s от нее до середины).

Векторы

-1. A, B, C, D, E — произвольные точки плоскости. Докажите, что

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}.$$

0. Докажите, что если O — середина стороны BC треугольника ABC, то

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

1. **(а)** Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}.$$

(б) Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

2. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. Докажите, что для любой точки плоскости O выполняется равенство

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}.$$

3. Докажите теорему о средней линии трапеции, используя векторы.

4. Докажите, что если четырёхугольники $ACPH$, $AMBE$, $AHBT$, $BKXM$, $CKXP$ — параллелограммы (вершины всех параллелограммов перечислены против часовой стрелки), то и четырёхугольник $ABTE$ — параллелограмм.

5. Точки M, K, N и L — середины сторон AB, BC, CD, DE пятиугольника $ABCDE$, P и Q — середины отрезков MN и KL. Докажите, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

6. На сторонах треугольника заданы точки, которые делят стороны в одном и том же соотношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника с вершинами в точках деления совпадают.

7. Из произвольной точки M внутри правильного треугольника опущены перпендикуляры MK_1, MK_2, MK_3 на его стороны. Докажите, что

$$\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\overrightarrow{MK_3}=\tfrac{3}{2}\overrightarrow{MO},$$

где O — центр треугольника.

8. Пусть H — точка пересечения высот, а O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

9. *(Прямая Эйлера)* Докажите, что в любом треугольнике центр описанной окружности, точка пересечения медиан и точка пересечения высот лежат на одной прямой. Какая из точек лежит внутри отрезка и в каком отношении делит отрезок?

Векторы. Добавка

1. Из точки, лежащей внутри выпуклого n-угольника, проведены лучи, перпендикулярные его сторонам и пересекающие стороны (или их продолжения). На этих лучах отложены векторы $\overrightarrow{a_1}$, ..., $\overrightarrow{a_n}$, длины которых равны длинам соответствующих сторон. Докажите, что $\overrightarrow{a_1} + \ldots + \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$.

2. Внутри треугольника ABC взята точка O. Докажите, что

$$S_{BOC} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{AOC} \cdot \overrightarrow{OB} + S_{AOB} \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}\,.$$

3. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC отметили точки K, L, M соответственно так, что AL, BM и CK пересекаются в одной точке, причём $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$. Докажите, что K, L, M — середины соответствующих сторон.

4. На плоскости дано $n > 1$ точек. Двое по очереди соединяют ещё не соединённую пару точек вектором одного из двух возможных направлений. Если после очередного хода какого-то игрока сумма всех нарисованных векторов нулевая, то выигрывает второй; если же очередной ход невозможен, а нулевой суммы не было, то выигрывает первый. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

5. O — центр правильного треугольника ABC. Из произвольной точки P плоскости опустили перпендикуляры на стороны треугольника или их продолжения. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров. Докажите, что M — середина отрезка PO.

Базисы и координаты векторов

-1. Даны точки $A(1;-1)$, $B(-5;1)$, $C(3;2)$. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$.

0. **(а)** Найдите координаты середины отрезка с вершинами $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$.
(б) Найдите координаты точки N этого отрезка такой, что $AN : NB = p : q$.

1. В параллелограмме $ABCD$ точка K лежит на стороне AB, причём $AK : KB = 4 : 3$. Разложите вектор $\overrightarrow{KB}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

2. На сторонах BC и CA треугольника ABC взяты точки K и L соответственно так, что $BK : KC = 2 : 5$, $CL : LA = 2 : 3$. Выразите через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{AK}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{BL}$
(а) $\overrightarrow{AB}$; **(б)** $\overrightarrow{CK}$.

3. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC с вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$.

4. $ABCD$ — трапеция. Известны координаты трёх её вершин: $A(1;1)$, $B(6;2)$, $D(2;3)$. Найдите координаты точки C, если $P(3;2{,}75)$ — точка пересечения диагоналей.

5. На диагоналях AC и CE правильного (т. е. у которого все углы и стороны равны) шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки M и N соответственно, такие что $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите λ.

6. Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, равномерно идущими по прямым дорогам?

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Пусть H_a — ортоцентр треугольника BCD, M_a — середина отрезка AH_a; точки M_b, M_c и M_d определяются аналогично. Докажите, что точки M_a, M_b, M_c и M_d совпадают.

Расстояние между точками

0. Докажите, что сумма квадратов длин всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов длин его диагоналей.

1. Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для произвольной точки M справедливо равенство $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.

2. **Формула медианы.** Докажите, что в треугольнике ABC

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

где a, b, c — соответственно длины сторон BC, CA и AB, m_a — длина медианы, проведённой из вершины A.

3. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки описанной окружности правильного треугольника до его вершин — величина постоянная, не зависящая от выбора этой точки.

4. Внутри квадрата $ABCD$ найдите все такие точки X, что $AX + CX = BX + DX$.

5. **Теорема косинусов.** Докажите, что в треугольнике ABC

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

где a, b, c — соответственно длины сторон BC, CA и AB, γ — величина угла C.

6. Даны точки A и B и положительное число k. Найдите геометрическое место точек M, для которых $AM = k \cdot BM$.

7. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает окружности в точках B и C. Найдите геометрическое место середин отрезков BC.

8. Координаты вершин треугольника рациональны. Докажите, что координаты центра его описанной окружности также рациональны.

Скалярное произведение

-1. Докажите, что
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\big((\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2\big)\,.$$

0. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы. Докажите, что
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2\big(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\big)\,.$$

1. A, B, C, D — произвольные точки. Докажите, что
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0\,.$$

2. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка M лежит на диагонали AC, причём $AM : MC = 3 : 1$. Докажите, что $\angle KMD = 90°$.

3. Докажите, что если диагонали некоторого четырёхугольника перпендикулярны, то и диагонали любого другого четырёхугольника с такими же длинами сторон тоже перпендикулярны.

4. ABC — равносторонний треугольник с центром O. Докажите, что любой точки M верно равенство
$$MA^2+MB^2+MC^2=OA^2+OB^2+OC^2+3\cdot MO^2\,.$$

5. Даны точки A, B, C и D. Докажите, что
$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\geqslant AC^2+BD^2\,,$$
причём равенство достигается, только если $ABCD$ — параллелограмм.

6. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

7. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC. Докажите, что
$$AB\cdot CD^2=AD\cdot CB^2+BD\cdot CA^2-AD\cdot BD\cdot AB\,.$$

8. Точка M — середина стороны AD квадрата $ABCD$. Биссектрисы углов AMC и DMC пересекают стороны AB и CD в точках N и K соответственно. Докажите, что отрезок NK равен и перпендикулярен отрезку MC.

Метод координат: уравнения прямых

-1. Из середины M основания AC равнобедренного треугольника ABC опущен перпендикуляр MH на сторону BC. Точка P — середина отрезка MH. Докажите, что $AH \perp BP$.

0. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC. В нём провели биссектрису AE, на которой отметили точку P, и медиану AM, на которой отметили точку K, так, что $MP \parallel AB$ и $EK \parallel AC$. Докажите, что $PK \perp AE$.

1. В каком отношении медиана CE делит биссектрису AD треугольника ABC, если $AB : AC = 3 : 2$?

2. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Серединные перпендикуляры к отрезкам AM и BC пересекаются в точке P, а серединные перпендикуляры к отрезкам AC и BM — в точке Q. Докажите, что отрезок PQ перпендикулярен CM.

3. В окружности проведены два диаметра. Из точки M окружности на эти диаметры опущены перпендикуляры MA и MB. Докажите, что длина отрезка AB не зависит от положения точки M на окружности.

4. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M и K так, что $AM = AK$. На отрезке MD взята точка P так, что $\angle PCD = \angle PKA$. Докажите, что $\angle APM = 90°$.

5. AB — диаметр описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности. Докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения прямых AC и BD с точкой пересечения касательных к окружности в точках C и D, перпендикулярна прямой AB.

6. $ABCD$ — трапеция. На продолжении диагонали AC за точку C взята произвольная точка P. Прямые, проходящие через P и середины оснований, пересекают боковые стороны AB и CD соответственно в точках M и N. Докажите, что MN параллельна AD.

Метод координат: расстояния и площади

1. Из точки C, взятой вне угла AOB, равного 60°, опущены перпендикуляры CK, CM и CN соответственно на стороны OA, OB и на биссектрису ON данного угла. Найдите ON, если $CK = d_1$ и $CM = d_2$.

2. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 60°. Докажите, что биссектриса одного из углов, образованных высотами, проведенными из вершин B и C, проходит через центр описанной окружности.

3. ABC — остроугольный треугольник. C' и A' — произвольные точки на сторонах AB и BC соответственно, B' – середина стороны AC. Докажите, что если $S_{A'B'C'} = \frac{1}{4}S_{ABC}$, то хотя бы одна из точек A' и C' совпадает с серединой соответствующей стороны.

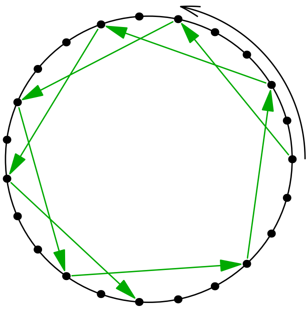
4. $ABCD$ — ромб. На стороне BC взята точка P, через A, B и P проведена окружность, которая пересекается с прямой BD ещё раз в точке Q. Через C, P и Q проведена окружность, которая пересекается с BD ещё раз в точке K. Докажите, что точки A, K и P лежат на одной прямой.

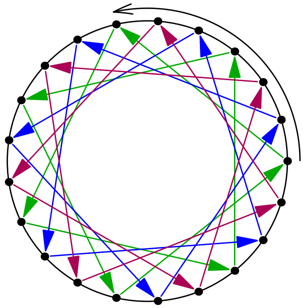
5. В окружности фиксирована хорда MN. Для каждого диаметра AB этой окружности рассмотрим точку C, в которой пересекаются прямые AM и BN, и проведем через неё прямую l, перпендикулярную AB. Докажите, что все прямые l проходят через одну точку.

Прыжки по кругу

Даны натуральные числа n и k, $n > k$.

На окружности отмечены n точек, в одной из которых изначально сидит кузнечик. Кузнечик умеет прыгать против часовой стрелки из одной отмеченной точки в другую, каждый раз перелетая через $k-1$ отмеченную точку.





1. **(а)** Докажите, что кузнечик побывает во всех отмеченных точках тогда и только тогда, когда НОД$(n, k) = 1$.
   (б) Назовём *орбитой* точки A множество точек, достижимых из A. Докажите, что все отмеченные точки разбиваются на НОД(n, k) попарно непересекающихся одинаковых орбит.

2. Ожерелье, состоящее из 1000 бусинок красного или синего цвета, называется *счастливым*, если в нем нет двух красных бусинок, между которыми ровно 55 бусинок. Какое наибольшее количество красных бусинок может быть в счастливом ожерелье?

3. На столе лежат два равных картонных правильных 101-угольника. Вершины одного из них пронумерованы подряд числами от 0 до 100 в порядке обхода против часовой стрелки.
   (а) Докажите, что вершины второго 101-угольника можно так занумеровать числами от 0 до 100, что при любом наложении (без переворота) первого на второй как минимум в одной вершине номера совпадут.
   (б) Докажите, что число таких нумераций вершин второго многоугольника не меньше 99. (Нумерации, совмещающиеся поворотом, считаем одинаковыми.)

4. На окружности длины 999 отмечены 999 точек, делящих ее на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовем *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удаленными не более, чем на n, увеличилось?

5. Окружность длины n разделена точками на n равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n-1$ прыжков: на 1, на 2, …, на $n-1$ по часовой стрелке *в некотором* порядке. При каких n кузнечик сможет посетить все отмеченные точки?

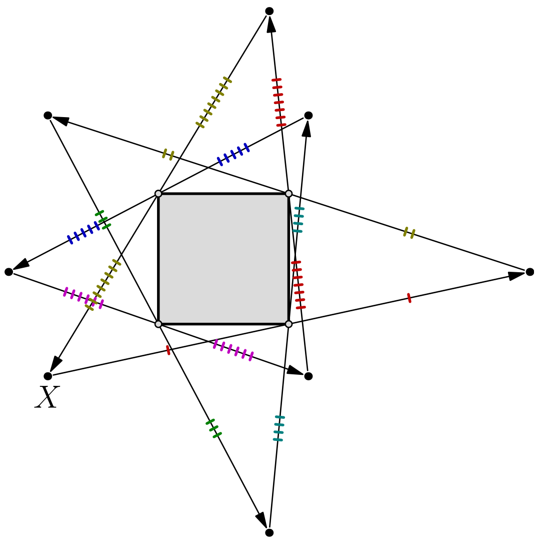
6. Окружность длины n разделена точками на n равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n-1$ прыжков: на 1, на 2, …, на $n-1$ по часовой стрелке *в указанном* порядке. При каких n кузнечик побывает во всех отмеченных точках?

7. Даны натуральные числа n и k, $k < n$. В фирме работают n сотрудников, зарплата каждого из которых выражается натуральным числом рублей. Каждый месяц начальник поднимает зарплату на 1 рубль некоторым k сотрудникам. При каких n и k он сможет сделать все зарплаты равными вне зависимости от начального распределения зарплат?

8. На плоскости нарисован квадрат. Для каждой точки X вне квадрата определим операцию *отражения относительно квадрата* следующим образом. Рассмотрим наименьший угол с вершиной X, содержащий квадрат, и отразим X относительно наиболее удаленной от X общей точки квадрата и правого луча рассматриваемого угла (эта система называется *внешним бильярдом*). *Периодом* точки назовем наименьшее число отражений относительно квадрата, необходимое для того, чтобы точка вернулась на свое место. Обозначим через $S(n)$ площадь множества точек периода n.

(а) Докажите, что $S(4) \geqslant 4$ и $S(8) \geqslant 8$.

(б) Для каждого натурального n найдите $S(n)$.



Прыжки по кругу, дополнительные задачи

1. На столе лежат два равных картонных правильных 111-угольника. Вершины одного из них пронумерованы подряд числами от 0 до 110 в порядке обхода против часовой стрелки. Можно ли вершины второго 111-угольника занумеровать числами от 0 до 110 так, что при любом наложении *(с переворотом или без)* первого на второй как минимум в одной вершине номера совпадут?

2. Петя как-то занумеровал вершины правильного n-угольника числами от 1 до n. Вася первым ходом ставит фишку в какую-то из вершин. Каждым последующим ходом он может передвинуть фишку из вершины A в вершину B, если между ними не больше 9 других вершин и число в B больше числа в A. Какое наибольшее количество вершин гарантированно сможет посетить Вася, как бы Петя ни нумеровал вершины, если $n = 1001$?

Алгебраические конструкции в комбинаторике

1. Куб $8 \times 8 \times 8$ разбит на единичные кубики. Какое наибольшее количество ладей можно поставить в некоторые кубики так, чтобы не было двух ладей, находящихся в одном ряду?

2. В меню столовой есть n салатов, n супов и n вторых блюд. Обед состоит из салата, супа и второго блюда. Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая пара блюд не повторилась?

3. В условиях предыдущей задачи в обновлённом меню появились ещё n десертов, и теперь обед включает в себя ещё и десерт. Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая тройка блюд не повторилась?

4. Алфавит состоит из k букв, словом считается любая последовательность из n букв алфавита. Два слова *похожи,* если они различаются ровно в одной букве. В какое минимальное число цветов можно раскрасить все слова, так чтобы любые два похожих слова были разного цвета?

5. Дано нечётное натуральное число n. Предположим, что в греческом алфавите n букв и в латинском алфавите тоже n букв. Докажите, что в каждую клетку квадрата $n \times n$ можно поставить две буквы — одну греческую и одну латинскую — так, чтобы в каждом ряду ни греческие, ни латинские буквы не повторялись и чтобы ни в каких двух клетках не была написана одна и та же пара букв.

6. Компания из
(а) 8 **(б)** 2^k
друзей ($k \geqslant 2$) — завсегдатаи клуба интеллектуальных игр. На каждую игру они выставляют команду из четырёх человек. Какое минимальное число игр потребуется друзьям для того, чтобы любые трое из них хотя бы раз оказались в одной команде?

7. В соревнованиях «Слесарь Года» участвует 81 слесарь. У каждого слесаря есть свой *разряд* — натуральное число, известное только ему. Разряды всех слесарей различны. В одном раунде участвуют три слесаря, и по итогам раунда выявляется победитель — обладатель высшего разряда. Расписание составляется заранее и по ходу соревнований не меняется. Какое наименьшее число раундов необходимо для выявления сильнейшего слесаря?

8. Квадрат разбивают на 4 равных квадрата. Затем один из получившихся квадратов тоже разбивают на 4 равных квадрата, один из (семи) имеющихся после этого квадратов разбивают на 4 равных квадрата и так далее. После конечного числа таких операций квадрат оказывается разбит на меньшие квадраты. Назовём два квадрата разбиения *соседними,* если сторона одного из них содержит сторону другого (возможно, совпадает с ней). Известно, что в получившемся разбиении стороны любых двух соседних квадратов отличаются в один или в два раза. В какое наименьшее количество цветов заведомо можно раскрасить все квадраты разбиения так, чтобы любые два соседних квадрата были разного цвета?

Мудрецы

1. Каждому из n мудрецов надевают колпак одного из n цветов. Каждый мудрец видит колпаки всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своего колпака, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал, если
(а) $n = 2$; **(б)** $n = 3$; **(в)** n — любое.

2. **(а)** Каждому из двух мудрецов надевают шляпу одного из трех цветов, и сообщают, что цвета их шляп разные. Каждый из них видит шляпу другого, но не видит свою. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своей шляпы, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал.
(б) А как победить троим мудрецам, если на них будут надевать шляпу одного из 5 цветов?

3. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше — съем на обед.». Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись?

4. Султан устроил экзамен 11 придворным мудрецам. По правилу экзамена султан размещает 10 мудрецов в 10 ям, расположенных по кругу, и еще одного мудреца сажает на вышку в центре круга. На лбу у каждого из первых 10 мудрецов султан пишет число 1 или 2; на лбу у центрального мудреца султан пишет число от 1 до 1024. Мудрец на вышке видит числа на всех остальных мудрецах, а те видят его число (но не видят друг друга). Все мудрецы должны одновременно попытаться угадать свои числа. Султан заранее объяснил мудрецам правила экзамена и дал им время посовещаться до начала экзамена. Могут ли мудрецы действовать так, чтобы хотя бы один из них заведомо угадал свое число?

5. За круглый стол сели 99 мудрецов. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного цвета, а остальным сорока девяти — другого цвета (но заранее не известно, какого именно из цветов будет 50, а какого — 49). Каждый видит каждого, кроме себя. Все называют цвет одновременно. Какое максимальное число мудрецов может заведомо угадать свой цвет?

6. У каждого из n мудрецов стоит сундук, в котором лежат шляпы одного из a_n цветов. Одновременно каждому мудрецу надевают шляпу из его сундука. Каждый мудрец видит шляпы всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно

попытаться угадать цвет своей шляпы, написав его на бумажках. Докажите, что если $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant 1$, то мудрецы могут договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал.

Решётки на плоскости

Решёткой будем называть множество Λ всех точек с целыми координатами в некоторой не обязательно прямоугольной системе координат. Иными словами, Λ — решётка, если $\Lambda = \{O + m\vec{u} + n\vec{v} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ для некоторых неколлинеарных векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$ и точки O.

1. В вершинах некоторого квадрата сидит по одному кузнечику. Каждый миг ровно один кузнечик перепрыгивает центрально-симметрично через какого-то другого.
(а) Докажите, что если кузнечики вновь оказались в вершинах изначального квадрата, то каждый вернулся именно на свою стартовую позицию.
(б) Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах меньшего квадрата, чем изначальный?
(в) Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах бо́льшего квадрата, чем изначальный?
(г) На этот раз в вершинах равностороннего треугольника сидит по одному кузнечику. Докажите, что если кузнечики вновь оказались в вершинах изначального треугольника, то каждый вернулся именно на свою стартовую позицию.

2. На координатной плоскости отмечены узлы целочисленной решётки. В какое наименьшее число цветов можно раскрасить эти узлы так, чтобы расстояние между любыми двумя одноцветными узлами было не меньше $\sqrt{5}$?

3. **(а)** Докажите, что среди любых пяти узлов клетчатой сетки найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел.
(б) Для какого минимального k среди любых k узлов сетки из правильных шестиугольников найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел?

4. На плоскости расположено несколько одинаковых
(а) квадратов **(б)** правильных шестиугольников,
соответственные стороны которых параллельны друг другу. Докажите, что в плоскость можно вбить несколько точечных гвоздей так, чтобы каждая фигура была прибита ровно одним гвоздем.
Условимся считать, что если гвоздь вбит в границу фигуры, то мы сами решаем, прибита фигура этим гвоздём или нет.

5. Из бумаги вырезана фигура площади строго меньше 1. Докажите, что фигуру можно наложить на координатную плоскость так, чтобы внутри фигуры не оказалось ни одной целой точки.

6. Внутри правильного треугольника отмечена точка. Ее отразили несколько раз относительно сторон треугольника (в случайном порядке), и она опять попала внутрь треугольника. Докажите, что она вернулась на исходное место.

7. Петя нарисовал на клетчатом листе треугольник площади 0,5 клеток, вершины которого лежат в узлах клеток, а затем вырезал его. Докажите, что в треугольник можно завернуть квадрат площади 0,25 клеток. Треугольник можно перегибать, но нельзя рвать. Квадрат должен быть полностью завёрнут с обеих сторон.

Решётки на плоскости, дополнительная задача

1. Рассмотрим на плоскости множество точек с вещественными координатами (x, y) таких, что неравенство $mx + ny \geqslant \frac{1}{2} \cdot (m^2 + n^2)$ имеет не более 1000 целочисленных решений (m, n). Найдите площадь этого множества.

Круговые шаблоны

1. В однокруговом волейбольном турнире участвовало 11!команд. Могло ли так произойти, что все команды одержали ровно по 5 побед? (В волейболе ничьих нет).

2. **(а)** Докажите, что в полном графе на 7 вершинах можно выделить несколько троек вершин так, что каждое ребро попадёт ровно в одну выделенную тройку.
(б) Докажите, что в полном графе на 13 вершинах можно выбрать несколько четвёрок вершин так, что каждое ребро будет принадлежать ровно одной выбранной четвёрке.

3. В чемпионате по футболу участвуют $n > 1$ команд. Требуется составить расписание игр так,чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день. Докажите, что
(а) если n нечётно, то можно провести чемпионат за n дней;
(б) если n чётно, то можно провести чемпионат за $n - 1$ день.

4. При каких натуральных значениях n все рёбра полного графа на n вершинах можно раскрасить в несколько цветов таким образом, чтобы рёбра каждого цвета образовывали
(а) путь **(б)** цикл,
проходящий по всем вершинам ровно по одному разу?

5. В турнире по шведкам участвовали n спортсменов. В каждой игре одна пара участников играла против другой пары. В конце турнира выяснилось, что любые два участника ровно в одной игре оказывались соперниками. При каких натуральных n такое возможно?

Глава 4

Водяные (8-2)

Алгебра

Геометрия

Комбинаторика

Обратные остатки

Очень удобное обозначение. Будем обозначать за $\frac{a}{b}$ такой остаток x по модулю n, что $bx \equiv a \pmod{n}$.

1. Докажите, что $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \equiv \frac{ad+bc}{bd} \pmod{p}$.

2. Какой остаток даёт $x + y$ при делении на 17, если $3x \equiv 5 + 14y \pmod{17}$?

3. Для простого $p > 2$ сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$ представлена в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p.

4. Докажите, что если простое число $p \neq 3$ является делителем числа вида $a^2 + 9$ для некоторого целого a, то p является делителем числа вида $c^2 + 1$ для некоторого целого c.

5. Натуральные числа a и b таковы, что число $a^{2022} + 1$ делится на $ab + 1$. Докажите, что число $b^{2022} + 1$ тоже делится на $ab + 1$.

6. Дано простое число $p = 100k + 49$, где k — натуральное число. Докажите, что существует натуральное m такое, что $m^2 + k$ делится на p.

7. Натуральные числа a, b, c таковы, что числа $ab+9b+81$ и $bc+9c+81$ делятся на 101. Докажите, что число $ca + 9a + 81$ тоже делится на 101.

8. Дано простое p. Докажите, что существует такая перестановка $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ чисел $1, 2, \ldots, p$, что числа a_1, a_1a_2, $a_1a_2a_3$, …, $a_1a_2 \ldots a_p$ дают разные остатки при делении на p.

Обратные остатки+

9. Тридцатизначные числа A и B таковы, что при замене любой цифры числа A на соответствующую цифру числа B результат делится на 7. Докажите, что суммы цифр A и B сравнимы по модулю 7.

10. Докажите, что любое простое число p является делителем числа вида $6^n+3^n+2^n-1$ для некоторого натурального n.

11. В строку выписаны 200 натуральных чисел. Среди любых двух соседних чисел строки правое либо в 9 раз больше левого, либо в 2 раза меньше левого. Может ли сумма всех этих 200 чисел равняться 24^{2022}?

12. Пусть в задаче 3 дано $p > 3$. Докажите, что m делится на p^2.

Показатели

Определение. Для взаимно простых a и n показателем числа a по модулю n называется наименьшее натуральное d такое, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

1. Пусть d — показатель a по модулю n.
   (а) Докажите, что числа $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{d-1}$ дают разные остатки при делении на n.
   (б) Докажите, что $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда k делится на d.
   (в) Докажите, что d делит $\varphi(n)$.

2. Пусть p – простое нечётное число.
   (а) Докажите, что любой простой делитель числа $2^p - 1$ представим в виде $2kp + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.
   (б) Докажите, что любой простой делитель числа $2^p + 1$, больший трёх, представим в виде $2kp + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.
   (в) Докажите, что любой простой делитель числа $2^p + 3^p$, больший пяти, представим в виде $2kp + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.

3. Пусть p — простое. Докажите, что любой простой делитель числа $p^p - 1$, больший p, даёт остаток 1 при делении на p.

4. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что $(7^p - 2^p)(7^q - 2^q) \,\vdots\, pq$;

5. Докажите, что для любых натуральных a и n, больших единицы, верно $\varphi(a^n - 1) \,\vdots\, n$.

6. Показатель остатка a по модулю n равен d_1, а остатка b — равен d_2. Докажите, что если $(d_1, d_2) = 1$, то показатель остатка ab равен $d_1 d_2$.

7. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r) такие, что $p \mid q^r + 1$, $q \mid r^p + 1$, $r \mid p^q + 1$.

8. Пусть p — нечётное простое, а $d_1, d_2, \ldots, d_k$ — всевозможные остатки, имеющие показатель t по модулю p. Какой остаток при делении на p даёт их произведение?

9. Натуральные k, m, n таковы, что числа $5^n - 2$ и $2^k - 5$ делятся на $5^m - 2^m$. Докажите, что n и m взаимно просты.

LTE

Определение. Степень вхождения простого числа p в число n будем обозначать через $\nu_p(n)$.

Lifting The Exponent Lemma (LTE). Пусть x, y — натуральные числа, такие что $x - y$ кратно p, а x, y не кратно p для некоторого простого $p \neq 2$. Тогда

$$\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y) + \nu_p(n).$$

LTE для $p = 2$. Пусть x, y — натуральные числа, такие что $x-y$ кратно 4, а x, y не кратно 2. Тогда

$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y) + \nu_2(n).$$

1. **Доказательство LTE.**
   (а) Докажите, что если n не делится на p, то $\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y)$.
   (б) Докажите, что $\nu_p(x^p - y^p) \geqslant \nu_p(x - y) + 1$.
   (в) Для $p \neq 2$ докажите $\nu_p(x^p - y^p) = \nu_p(x - y) + 1$.
   (г) Докажите, что если $p \neq 2$, то $\nu_p(x^{p^k} - y^{p^k}) = \nu_p(x - y) + k$.
   (д) Используя предыдущие пункты, докажите LTE.
   (е) Докажите LTE для $p = 2$.

2. Пусть x, y — нечетные целые числа, а n — четное натуральное. Тогда $\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y) + \nu_2(x + y) + \nu_2(n) - 1$.

3. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Найдите все $n \in \mathbb{N}$ такие, что $2^n - 1 \,\vdots\, 3^k$.

4. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

5. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Докажите, что лишь для конечного числа $n \in \mathbb{N}$ сумма $\left(a + \frac{1}{2}\right)^n + \left(b + \frac{1}{2}\right)^n$ является целой.

6. Найдите все такие $n \in \mathbb{N}$, что при некоторых взаимно простых x и y и натуральном $k > 1$, выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$.

7. Докажите, что для любого натурального $a > 3$ существует бесконечно много натуральных n таких, что $a^n - 1$ делится на n^2.

8. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $k > 1$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + k^n \,\vdots\, n$.

Транснеравенство

Транснеравенство. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — это какая-то перестановка чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тогда верны следующие неравенства:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1 \,.$$

1. Докажите, что

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n \,.$$

2. Докажите, что

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \leqslant \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \,.$$

3. Докажите, что

$$a+b+c \geqslant \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1} \,.$$

4. Докажите, что

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \,.$$

5. Докажите, что

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \,.$$

6. Докажите, что

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leqslant \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \,.$$

7. Пусть $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Докажите, что

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1} \,.$$

8. Пусть $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{3}{2} \,.$$

Векторы

-1. A, B, C, D, E — произвольные точки плоскости. Докажите, что

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}.$$

0. Докажите, что если O — середина стороны BC треугольника ABC, то

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

1. **(а)** Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}.$$

(б) Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

2. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. Докажите, что для любой точки плоскости O выполняется равенство

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}.$$

3. Докажите теорему о средней линии трапеции, используя векторы.

4. Докажите, что если четырёхугольники $ACPH$, $AMBE$, $AHBT$, $BKXM$, $CKXP$ — параллелограммы (вершины всех параллелограммов перечислены против часовой стрелки), то и четырёхугольник $ABTE$ — параллелограмм.

5. Точки M, K, N и L — середины сторон AB, BC, CD, DE пятиугольника $ABCDE$, P и Q — середины отрезков MN и KL. Докажите, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

6. На сторонах треугольника заданы точки, которые делят стороны в одном и том же соотношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника с вершинами в точках деления совпадают.

7. Из произвольной точки M внутри правильного треугольника опущены перпендикуляры MK_1, MK_2, MK_3 на его стороны. Докажите, что

$$\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\overrightarrow{MK_3}=\tfrac{3}{2}\overrightarrow{MO},$$

где O — центр треугольника.

8. Пусть H — точка пересечения высот, а O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

9. *(Прямая Эйлера)* Докажите, что в любом треугольнике центр описанной окружности, точка пересечения медиан и точка пересечения высот лежат на одной прямой. Какая из точек лежит внутри отрезка и в каком отношении делит отрезок?

Векторы. Добавка

1. Из точки, лежащей внутри выпуклого n-угольника, проведены лучи, перпендикулярные его сторонам и пересекающие стороны (или их продолжения). На этих лучах отложены векторы $\overrightarrow{a_1}$, ..., $\overrightarrow{a_n}$, длины которых равны длинам соответствующих сторон. Докажите, что $\overrightarrow{a_1} + \ldots + \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$.

2. Внутри треугольника ABC взята точка O. Докажите, что
$$S_{BOC} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{AOC} \cdot \overrightarrow{OB} + S_{AOB} \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}\,.$$

3. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC отметили точки K, L, M соответственно так, что AL, BM и CK пересекаются в одной точке, причём $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$. Докажите, что K, L, M — середины соответствующих сторон.

4. На плоскости дано $n > 1$ точек. Двое по очереди соединяют ещё не соединённую пару точек вектором одного из двух возможных направлений. Если после очередного хода какого-то игрока сумма всех нарисованных векторов нулевая, то выигрывает второй; если же очередной ход невозможен, а нулевой суммы не было, то выигрывает первый. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

5. O — центр правильного треугольника ABC. Из произвольной точки P плоскости опустили перпендикуляры на стороны треугольника или их продолжения. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров. Докажите, что M — середина отрезка PO.

Базисы и координаты векторов

-1. Даны точки $A(1;-1)$, $B(-5;1)$, $C(3;2)$. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$.

0. **(а)** Найдите координаты середины отрезка с вершинами $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$.
(б) Найдите координаты точки N этого отрезка такой, что $AN : NB = p : q$.

1. В параллелограмме $ABCD$ точка K лежит на стороне AB, причём $AK : KB = 4 : 3$. Разложите вектор $\overrightarrow{KB}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

2. На сторонах BC и CA треугольника ABC взяты точки K и L соответственно так, что $BK : KC = 2 : 5$, $CL : LA = 2 : 3$. Выразите через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{AK}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{BL}$
(а) $\overrightarrow{AB}$; **(б)** $\overrightarrow{CK}$.

3. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC с вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$.

4. $ABCD$ — трапеция. Известны координаты трёх её вершин: $A(1;1)$, $B(6;2)$, $D(2;3)$. Найдите координаты точки C, если $P(3;2{,}75)$ — точка пересечения диагоналей.

5. На диагоналях AC и CE правильного (т. е. у которого все углы и стороны равны) шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки M и N соответственно, такие что $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите λ.

6. Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, равномерно идущими по прямым дорогам?

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Пусть H_a — ортоцентр треугольника BCD, M_a — середина отрезка AH_a; точки M_b, M_c и M_d определяются аналогично. Докажите, что точки M_a, M_b, M_c и M_d совпадают.

Расстояние между точками

0. Докажите, что сумма квадратов длин всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов длин его диагоналей.

1. Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для произвольной точки M справедливо равенство $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.

2. **Формула медианы.** Докажите, что в треугольнике ABC

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}\,,$$

где a, b, c — соответственно длины сторон BC, CA и AB, m_a — длина медианы, проведённой из вершины A.

3. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки описанной окружности правильного треугольника до его вершин — величина постоянная, не зависящая от выбора этой точки.

4. Внутри квадрата $ABCD$ найдите все такие точки X, что $AX + CX = BX + DX$.

5. **Теорема косинусов.** Докажите, что в треугольнике ABC

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,,$$

где a, b, c — соответственно длины сторон BC, CA и AB, γ — величина угла C.

6. Даны точки A и B и положительное число k. Найдите геометрическое место точек M, для которых $AM = k \cdot BM$.

7. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает окружности в точках B и C. Найдите геометрическое место середин отрезков BC.

8. Координаты вершин треугольника рациональны. Докажите, что координаты центра его описанной окружности также рациональны.

Скалярное произведение

-1. Докажите, что
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\big((\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2\big).$$

0. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы. Докажите, что
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2\big(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\big).$$

1. A, B, C, D — произвольные точки. Докажите, что
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0.$$

2. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка M лежит на диагонали AC, причём $AM : MC = 3 : 1$. Докажите, что $\angle KMD = 90°$.

3. Докажите, что если диагонали некоторого четырёхугольника перпендикулярны, то и диагонали любого другого четырёхугольника с такими же длинами сторон тоже перпендикулярны.

4. ABC — равносторонний треугольник с центром O. Докажите, что любой точки M верно равенство
$$MA^2+MB^2+MC^2=OA^2+OB^2+OC^2+3\cdot MO^2.$$

5. Даны точки A, B, C и D. Докажите, что
$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\geqslant AC^2+BD^2,$$
причём равенство достигается, только если $ABCD$ — параллелограмм.

6. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

7. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC. Докажите, что
$$AB\cdot CD^2=AD\cdot CB^2+BD\cdot CA^2-AD\cdot BD\cdot AB.$$

8. Точка M — середина стороны AD квадрата $ABCD$. Биссектрисы углов AMC и DMC пересекают стороны AB и CD в точках N и K соответственно. Докажите, что отрезок NK равен и перпендикулярен отрезку MC.

Метод координат: уравнения прямых

-1. Из середины M основания AC равнобедренного треугольника ABC опущен перпендикуляр MH на сторону BC. Точка P — середина отрезка MH. Докажите, что $AH \perp BP$.

0. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC. В нём провели биссектрису AE, на которой отметили точку P, и медиану AM, на которой отметили точку K, так, что $MP \parallel AB$ и $EK \parallel AC$. Докажите, что $PK \perp AE$.

1. В каком отношении медиана CE делит биссектрису AD треугольника ABC, если $AB : AC = 3 : 2$?

2. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Серединные перпендикуляры к отрезкам AM и BC пересекаются в точке P, а серединные перпендикуляры к отрезкам AC и BM — в точке Q. Докажите, что отрезок PQ перпендикулярен CM.

3. В окружности проведены два диаметра. Из точки M окружности на эти диаметры опущены перпендикуляры MA и MB. Докажите, что длина отрезка AB не зависит от положения точки M на окружности.

4. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M и K так, что $AM = AK$. На отрезке MD взята точка P так, что $\angle PCD = \angle PKA$. Докажите, что $\angle APM = 90°$.

5. AB — диаметр описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности. Докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения прямых AC и BD с точкой пересечения касательных к окружности в точках C и D, перпендикулярна прямой AB.

6. $ABCD$ — трапеция. На продолжении диагонали AC за точку C взята произвольная точка P. Прямые, проходящие через P и середины оснований, пересекают боковые стороны AB и CD соответственно в точках M и N. Докажите, что MN параллельна AD.

Метод координат: расстояния и площади

1. Из точки C, взятой вне угла AOB, равного 60°, опущены перпендикуляры CK, CM и CN соответственно на стороны OA, OB и на биссектрису ON данного угла. Найдите ON, если $CK = d_1$ и $CM = d_2$.

2. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 60°. Докажите, что биссектриса одного из углов, образованных высотами, проведенными из вершин B и C, проходит через центр описанной окружности.

3. ABC — остроугольный треугольник. C' и A' — произвольные точки на сторонах AB и BC соответственно, B' – середина стороны AC. Докажите, что если $S_{A'B'C'} = \frac{1}{4}S_{ABC}$, то хотя бы одна из точек A' и C' совпадает с серединой соответствующей стороны.

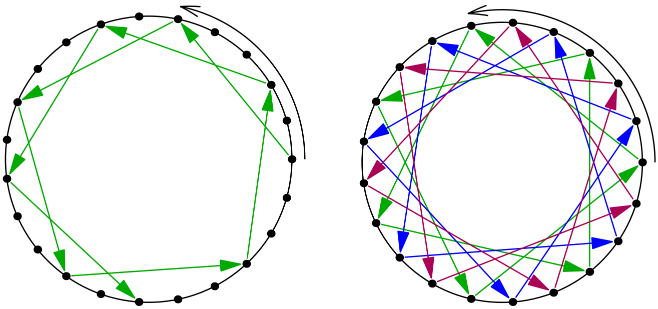
4. $ABCD$ — ромб. На стороне BC взята точка P, через A, B и P проведена окружность, которая пересекается с прямой BD ещё раз в точке Q. Через C, P и Q проведена окружность, которая пересекается с BD ещё раз в точке K. Докажите, что точки A, K и P лежат на одной прямой.

5. В окружности фиксирована хорда MN. Для каждого диаметра AB этой окружности рассмотрим точку C, в которой пересекаются прямые AM и BN, и проведем через неё прямую l, перпендикулярную AB. Докажите, что все прямые l проходят через одну точку.

Прыжки по кругу

Даны натуральные числа n и k, $n > k$.

На окружности отмечены n точек, в одной из которых изначально сидит кузнечик. Кузнечик умеет прыгать против часовой стрелки из одной отмеченной точки в другую, каждый раз перелетая через $k-1$ отмеченную точку.



1. **(а)** Докажите, что кузнечик побывает во всех отмеченных точках тогда и только тогда, когда НОД$(n, k) = 1$.
(б) Назовём *орбитой* точки A множество точек, достижимых из A. Докажите, что все отмеченные точки разбиваются на НОД(n, k) попарно непересекающихся одинаковых орбит.

2. Ожерелье, состоящее из 1000 бусинок красного или синего цвета, называется *счастливым*, если в нем нет двух красных бусинок, между которыми ровно 55 бусинок. Какое наибольшее количество красных бусинок может быть в счастливом ожерелье?

3. На столе лежат два равных картонных правильных 101-угольника. Вершины одного из них пронумерованы подряд числами от 0 до 100 в порядке обхода против часовой стрелки.
(а) Докажите, что вершины второго 101-угольника можно так занумеровать числами от 0 до 100, что при любом наложении (без переворота) первого на второй как минимум в одной вершине номера совпадут.
(б) Докажите, что число таких нумераций вершин второго многоугольника не меньше 99. (Нумерации, совмещающиеся поворотом, считаем одинаковыми.)

4. Окружность длины n разделена точками на n равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n-1$ прыжков: на 1, на 2, …, на $n-1$ по часовой стрелке *в некотором* порядке. При каких n кузнечик сможет посетить все отмеченные точки?

5. Окружность длины n разделена точками на n равных дуг. Кузнечик начинает пры-

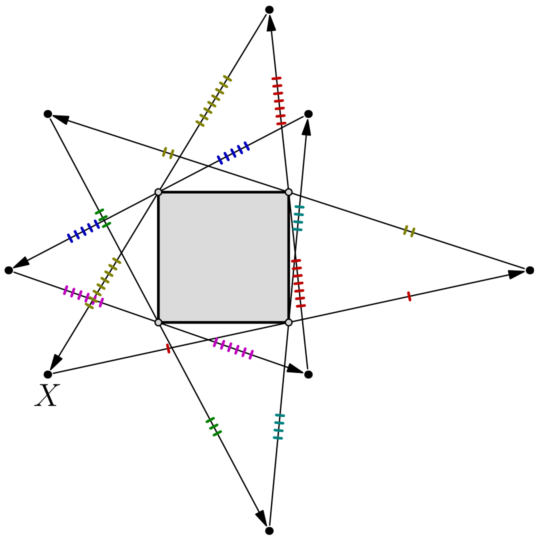
гать с некоторой точки и делает $n-1$ прыжков: на 1, на 2, ..., на $n-1$ по часовой стрелке *в указанном* порядке. При каких n кузнечик побывает во всех отмеченных точках?

6. Даны натуральные числа n и k, $k < n$. В фирме работают n сотрудников, зарплата каждого из которых выражается натуральным числом рублей. Каждый месяц начальник поднимает зарплату на 1 рубль некоторым k сотрудникам. При каких n и k он сможет сделать все зарплаты равными вне зависимости от начального распределения зарплат?

7. На плоскости нарисован квадрат. Для каждой точки X вне квадрата определим операцию *отражения относительно квадрата* следующим образом. Рассмотрим наименьший угол с вершиной X, содержащий квадрат, и отразим X относительно наиболее удаленной от X общей точки квадрата и правого луча рассматриваемого угла (эта система называется *внешним бильярдом*). *Периодом* точки назовем наименьшее число отражений относительно квадрата, необходимое для того, чтобы точка вернулась на свое место. Обозначим через $S(n)$ площадь множества точек периода n.

(а) Докажите, что $S(4) \geqslant 4$ и $S(8) \geqslant 8$.

(б) Для каждого натурального n найдите $S(n)$.



Прыжки по кругу, дополнительные задачи

1. На окружности длины 999 отмечены 999 точек, делящих ее на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовем *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удаленными не более, чем на n, увеличилось?

2. На столе лежат два равных картонных правильных 111-угольника. Вершины одного из них пронумерованы подряд числами от 0 до 110 в порядке обхода против часовой стрелки. Можно ли вершины второго 111-угольника занумеровать числами от 0 до 110 так, что при любом наложении *(с переворотом или без)* первого на второй как минимум в одной вершине номера совпадут?

3. Петя как-то занумеровал вершины правильного n-угольника числами от 1 до n. Вася первым ходом ставит фишку в какую-то из вершин. Каждым последующим ходом он может передвинуть фишку из вершины A в вершину B, если между ними не больше 9 других вершин и число в B больше числа в A. Какое наибольшее количество вершин гарантированно сможет посетить Вася, как бы Петя ни нумеровал вершины, если $n = 1001$?

Алгебраические конструкции в комбинаторике

1. Куб $8 \times 8 \times 8$ разбит на единичные кубики. Какое наибольшее количество ладей можно поставить в некоторые кубики так, чтобы не было двух ладей, находящихся в одном ряду?

2. В меню столовой есть n салатов, n супов и n вторых блюд. Обед состоит из салата, супа и второго блюда. Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая пара блюд не повторилась?

3. В условиях предыдущей задачи в обновлённом меню появились ещё n десертов, и теперь обед включает в себя ещё и десерт. Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая тройка блюд не повторилась?

4. Алфавит состоит из k букв, словом считается любая последовательность из n букв алфавита. Два слова *похожи,* если они различаются ровно в одной букве. В какое минимальное число цветов можно раскрасить все слова, так чтобы любые два похожих слова были разного цвета?

5. Дано нечётное натуральное число n. Предположим, что в греческом алфавите n букв и в латинском алфавите тоже n букв. Докажите, что в каждую клетку квадрата $n \times n$ можно поставить две буквы — одну греческую и одну латинскую — так, чтобы в каждом ряду ни греческие, ни латинские буквы не повторялись и чтобы ни в каких двух клетках не была написана одна и та же пара букв.

6. Компания из
(а) 8 **(б)** 2^k
друзей ($k \geqslant 2$) — завсегдатаи клуба интеллектуальных игр. На каждую игру они выставляют команду из четырёх человек. Какое минимальное число игр потребуется друзьям для того, чтобы любые трое из них хотя бы раз оказались в одной команде?

7. В соревнованиях «Слесарь Года» участвует 81 слесарь. У каждого слесаря есть свой *разряд* — натуральное число, известное только ему. Разряды всех слесарей различны. В одном раунде участвуют три слесаря, и по итогам раунда выявляется победитель — обладатель высшего разряда. Расписание составляется заранее и по ходу соревнований не меняется. Какое наименьшее число раундов необходимо для выявления сильнейшего слесаря?

8. Квадрат разбивают на 4 равных квадрата. Затем один из получившихся квадратов тоже разбивают на 4 равных квадрата, один из (семи) имеющихся после этого квадратов разбивают на 4 равных квадрата и так далее. После конечного числа таких операций квадрат оказывается разбит на меньшие квадраты. Назовём два квадрата разбиения *соседними,* если сторона одного из них содержит сторону другого (возможно, совпадает с ней). Известно, что в получившемся разбиении стороны любых двух соседних квадратов отличаются в один или в два раза. В какое наименьшее количество цветов заведомо можно раскрасить все квадраты разбиения так, чтобы любые два соседних квадрата были разного цвета?

Мудрецы

1. Каждому из n мудрецов надевают колпак одного из n цветов. Каждый мудрец видит колпаки всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своего колпака, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал, если
(а) $n = 2$; **(б)** $n = 3$; **(в)** n — любое.

2. **(а)** Каждому из двух мудрецов надевают шляпу одного из трех цветов, и сообщают, что цвета их шляп разные. Каждый из них видит шляпу другого, но не видит свою. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своей шляпы, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал.
(б) А как победить троим мудрецам, если на них будут надевать шляпу одного из 5 цветов?

3. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше — съем на обед.». Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись?

4. Султан устроил экзамен 11 придворным мудрецам. По правилу экзамена султан размещает 10 мудрецов в 10 ям, расположенных по кругу, и еще одного мудреца сажает на вышку в центре круга. На лбу у каждого из первых 10 мудрецов султан пишет число 1 или 2; на лбу у центрального мудреца султан пишет число от 1 до 1024. Мудрец на вышке видит числа на всех остальных мудрецах, а те видят его число (но не видят друг друга). Все мудрецы должны одновременно попытаться угадать свои числа. Султан заранее объяснил мудрецам правила экзамена и дал им время посовещаться до начала экзамена. Могут ли мудрецы действовать так, чтобы хотя бы один из них заведомо угадал свое число?

5. За круглый стол сели 99 мудрецов. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного цвета, а остальным сорока девяти — другого цвета (но заранее не известно, какого именно из цветов будет 50, а какого — 49). Каждый видит каждого, кроме себя. Все называют цвет одновременно. Какое максимальное число мудрецов может заведомо угадать свой цвет?

6. У каждого из n мудрецов стоит сундук, в котором лежат шляпы одного из a_n цветов. Одновременно каждому мудрецу надевают шляпу из его сундука. Каждый мудрец видит шляпы всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своей шляпы, написав его на бумажках. Докажите, что если $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant 1$, то мудрецы могут договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал.

Решётки на плоскости

Решёткой будем называть множество Λ всех точек с целыми координатами в некоторой не обязательно прямоугольной системе координат. Иными словами, Λ — решётка, если $\Lambda = \{O + m\vec{u} + n\vec{v} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ для некоторых неколлинеарных векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$ и точки O.

1. В вершинах некоторого квадрата сидит по одному кузнечику. Каждый миг ровно один кузнечик перепрыгивает центрально-симметрично через какого-то другого.
(а) Докажите, что если кузнечики вновь оказались в вершинах изначального квадрата, то каждый вернулся именно на свою стартовую позицию.
(б) Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах меньшего квадрата, чем изначальный?
(в) Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах бо́льшего квадрата, чем изначальный?
(г) На этот раз в вершинах равностороннего треугольника сидит по одному кузнечику. Докажите, что если кузнечики вновь оказались в вершинах изначального треугольника, то каждый вернулся именно на свою стартовую позицию.

2. На координатной плоскости отмечены узлы целочисленной решётки. В какое наименьшее число цветов можно раскрасить эти узлы так, чтобы расстояние между любыми двумя одноцветными узлами было не меньше $\sqrt{5}$?

3. **(а)** Докажите, что среди любых пяти узлов клетчатой сетки найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел.
(б) Для какого минимального k среди любых k узлов сетки из правильных шестиугольников найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел?

4. На плоскости расположено несколько одинаковых
(а) квадратов **(б)** правильных шестиугольников,
соответственные стороны которых параллельны друг другу. Докажите, что в плоскость можно вбить несколько точечных гвоздей так, чтобы каждая фигура была прибита ровно одним гвоздем.
Условимся считать, что если гвоздь вбит в границу фигуры, то мы сами решаем, прибита фигура этим гвоздём или нет.

5. Из бумаги вырезана фигура площади строго меньше 1. Докажите, что фигуру можно наложить на координатную плоскость так, чтобы внутри фигуры не оказалось ни одной целой точки.

6. Внутри правильного треугольника отмечена точка. Ее отразили несколько раз относительно сторон треугольника (в случайном порядке), и она опять попала внутрь треугольника. Докажите, что она вернулась на исходное место.

7. Петя нарисовал на клетчатом листе треугольник площади 0,5 клеток, вершины которого лежат в узлах клеток, а затем вырезал его. Докажите, что в треугольник можно завернуть квадрат площади 0,25 клеток. Треугольник можно перегибать, но нельзя рвать. Квадрат должен быть полностью завёрнут с обеих сторон.

Круговые шаблоны

1. В однокруговом волейбольном турнире участвовало 11!команд. Могло ли так произойти, что все команды одержали ровно по 5 побед? (В волейболе ничьих нет).

2. **(а)** Докажите, что в полном графе на 7 вершинах можно выделить несколько троек вершин так, что каждое ребро попадёт ровно в одну выделенную тройку.
(б) Докажите, что в полном графе на 13 вершинах можно выбрать несколько четвёрок вершин так, что каждое ребро будет принадлежать ровно одной выбранной четвёрке.

3. В чемпионате по футболу участвуют $n > 1$ команд. Требуется составить расписание игр так,чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день. Докажите, что
(а) если n нечётно, то можно провести чемпионат за n дней;
(б) если n чётно, то можно провести чемпионат за $n - 1$ день.

4. При каких натуральных значениях n все рёбра полного графа на n вершинах можно раскрасить в несколько цветов таким образом, чтобы рёбра каждого цвета образовывали
(а) путь **(б)** цикл,
проходящий по всем вершинам ровно по одному разу?

5. В турнире по шведкам участвовали n спортсменов. В каждой игре одна пара участников играла против другой пары. В конце турнира выяснилось, что любые два участника ровно в одной игре оказывались соперниками. При каких натуральных n такое возможно?

Приложение A

Анонсы спецкурсов

p-адические числа

Представьте, что вам захотелось разрезать квадрат на два равных треугольника. Уверен, что вы легко с этим справитесь, проведя диагональ. Если немного подумаете, то сможете придумать разрезание квадрата на любое четное число равных треугольников.

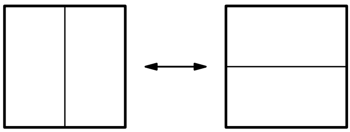
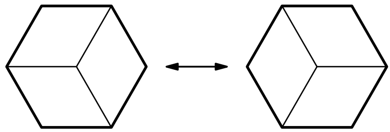
Но можно ли разрезать квадрат на три, пять, или хоть какое-нибудь нечетное число равных треугольников? Звучит, как стандартная задача евклидовой геометрии. Ответ, как подсказывает нам интуиция, отрицательный; более того, невозможно разрезать квадрат на нечетное число не просто равных, а даже равновеликих треугольников (т. е. равной площади). Однако, первое и, на данный момент, единственное известное доказательство этого факта было предложено лишь в 1970 году, и использует оно, помимо элегантной раскраски точек плоскости и других комбинаторных рассуждений, изменение понятия расстояния.

Как вообще можно определить расстояние между, например, двумя рациональными числами? Мы умеем рассматривать модуль разности между ними, который естественным образом соответствует расстоянию между соответствующими точками на числовой прямой. Оказывается, что между рациональными числами можно определить и другое расстояние (а, точнее, целый класс расстояний), которое будет удовлетворять всем необходимым свойствам.

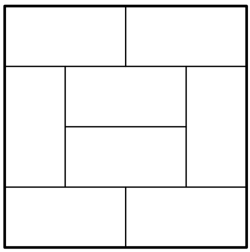
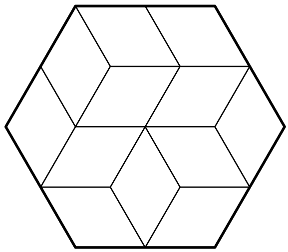
На спецкурсе мы научимся делить в столбик не подбором, познакомимся с множеством p-адических чисел и расстоянием между ними, а также рассмотрим применение этих чисел для ответа на вопросы, связанные с привычными нам числами: например, для поиска чисел Фибоначчи, делящихся на нужную нам степень простого числа. А также поймем, как же все-таки можно рассуждать в задаче про квадрат.

Задачи на разрезания

Мы будем обсуждать разрезания бóльших фигур на меньшие. Основная задача, которую мы будем рассматривать — это перестройка разбиений на доминошки с помощью *флипов.*

Верно ли, что из любого разбиения можно получить любое другое с помощью флипов? Мы научимся отвечать на этот вопрос, вдохновившись кубиками, лежащими в коробке.

Если успеем, мы разберём ещё несколько задач. Верно ли, что если прямоугольник разрезан на прямоугольники, и у каждого прямоугольника разбиения есть целая сторона, то целая сторона есть и у исходного многоугольника? При каких условиях прямоугольник $m \times n$ можно разрезать на прямоугольники $p \times q$? Ответы получим на спецкурсе!

Несколько этюдов из комбинаторной геометрии

Если на круглой сковороде поместилось 6 равных круглых котлет, то поместятся ли 7? Если в куб помещаются три равных апельсина, то поместятся ли четыре? Как поделить добычу трём завистливым разбойникам и при чём тут лемма Шпернера? Можно ли положить на белую плоскость много чёрных единичных квадратов так, чтобы получилась чёрная фигура со сколь угодно большим отношением периметра к площади? Мы узнаем ответы на эти и другие вопросы, приходите!

Наивная теория множеств

На спецкурсе мы будем заниматься в основном вопросами сравнения «размеров» бесконечных множеств (и решать задачи про то же). Мы выясним, что множество натуральных чисел «по размеру» такое же, как и множество рациональных; а вот действительных чисел почему-то принципиально больше.

В реальности мы будем строить много разных соответствий, докажем теоремы Кантора и Кантора-Бернштейна. В финальной части обсудим великую и ужасную аксиому выбора и некоторые парадоксальные следствия из неё.