Оглавление

Оглавление

Глава 1

7м1 (7м1)

Сравнения по модулю

Определение. Целые числа a и b *сравнимы по модулю m,* если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- они имеют одинаковые остатки при делении на m;
- их разность делится на m.

1. Докажите следующие свойства сравнений по модулю:
(а) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$;
(б) если $a \equiv b \pmod{m}$ и k — целое число, то $ak \equiv bk \pmod{m}$;
(в) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$;
(г) если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ при любом натуральном n;
(д) если $ka \equiv kb \pmod{m}$ и НОД$(k, m) = 1$, то $a \equiv b \pmod{m}$.

2. Найдите остаток от деления
(а) 47^{101} на 46 и 48; **(б)** $2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022$ на 2023;
(в) 47^{101} на 31; **(г)** $9^{2022} + 13^{2022}$ на 11.

3. Делится ли
(а) $9^{53} + 23^{52} + 30^{51}$ на 7; **(б)** $5^{70} + 6^{70}$ на 61;
(в) $1^{101} + 2^{101} + 3^{101} + \ldots + 2022^{101}$ на 2023; **(г)** $51! + \frac{102!}{51!}$ на 103?

4. У числа 2023^{2023} нашли сумму цифр. У результата опять нашли сумму цифр и т. д., пока не получилась цифра. Что это за цифра?

5. Фродо перемножил тысячу первых простых чисел, а затем то ли увеличил, то ли уменьшил полученное число на 1. Мог ли Фродо получить точный квадрат?

6. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки? (Цифру 0 ставить на первое место нельзя.)

7. Можно ли среди чисел $\frac{100}{1}, \frac{99}{2}, \ldots, \frac{3}{98}, \frac{2}{99}, \frac{1}{100}$ выбрать пять, произведение которых равно единице?

8. На доске записано число 2021. За одну операцию разрешается в любое место числа вставить две одинаковые цифры. Можно ли в результате нескольких таких операций получить число, кратное 583?

9. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дают все остатки при делении на n. Числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ также дают все остатки при делении на n. При каких n может получиться так, что числа $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n$ дают все остатки при делении на n?

10. Можно ли разбить числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ на три группы так, чтобы в первой группе сумма чисел делилась на 102, во второй — на 203, а в третьей — на 304?

source:algebra/number-theory/modular-arithmetic-g7M/1.tex

Сравнения по модулю — 2

1. При каких натуральных n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323?
2. Целые числа x и y таковы, что $23x + 30y$ даёт остаток 1 при делении на 91. Какой остаток при делении на 91 даёт $x + 29y$?
3. Докажите, что $(3^n - 1)^n - 4 \vdots 3^n - 4$ для любого натурального n.
4. Для натуральных чисел s и n докажите, что $s^{2n+3} + (s-1)^n \vdots s^2 - s + 1$.
5. Пусть n — натуральное число и $n \equiv -1 \pmod{24}$. Докажите, что сумма всех натуральных делителей числа n делится на 24.
6. Найдите все натуральные числа m, a, b такие, что $m! = 2^a + 2^b$.
7. Натуральные числа x и y, большие 1, таковы, что число x^2+y^2-1 делится на $x+y-1$. Докажите, что число $x + y - 1$ составное.
8. Последовательность чисел задана следующим образом:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{k+2} = a_k \cdot a_{k+1} + 1$$

при всех натуральных k. Докажите, что при всех натуральных $n \geqslant 7$ число $a_n - 3$ является составным.

source:algebra/number-theory/modular-arithmetic-g7M/2-r1.tex

Сравнения по модулю. Добавка

1. Известно, что $n^3 + 1$ делится на $mn - 1$.
  (а) Докажите, что $m^3 + 1$ делится на $mn - 1$.
  (б) Найдите все такие пары (m, n).

2. При каких целых k число $a^3 + b^3 + c^3 - kabc$ делится на $a + b + c$ при любых целых a, b, c с ненулевой суммой?

3. Натуральные числа a и b, большие 1, таковы, что $ab + 1$ — степень двойки. Чётна или нечётна степень вхождения двойки в разложение числа $ab-a+b-1$ на простые множители?

source:algebra/number-theory/modular-arithmetic-g7M/2-r1-more.tex

Обратные остатки

1. **(а)** Даны взаимно простые числа a и n. Докажите, что множество остатков чисел

$$\{0 \cdot a, 1 \cdot a, 2 \cdot a, \dots, (n-1) \cdot a\}$$

от деления на n совпадает (в некотором порядке) с множеством

$$\{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Верно ли это утверждение для не взаимно простых чисел a и n?
(б) Докажите, что для взаимно простых чисел m и n и любого целого числа r найдётся целое x такое, что $mx \equiv r \pmod{n}$, причём все такие x сравнимы между собой по модулю n. Если $r = 1$, то m и x называют *обратными* друг к другу по модулю n.
(в) Даны взаимно простые числа m и n. Докажите, что существуют целые x и y такие, что $mx + ny = 1$.

2. Для каждого ненулевого остатка по модулю
(а) 7; **(б)** 11; **(в)** 19
найдите обратный.

3. Целое число a таково, что $a^{52} \equiv 36 \pmod{73}$ и $a^{53} \equiv 59 \pmod{73}$. Найдите остаток от деления a на 73.

4. **(а)** **Теорема Вильсона.** Докажите, что для любого простого числа p верно

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

(б) *Обратная теорема Вильсона.* Докажите, что если для натурального числа n выполнено $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$, то n — простое число.
(в) Какой остаток даёт 97! при делении на 101?

5. Натуральные числа m и n таковы, что для каждого натурального k верно

$$(11k - 3, n) = (11k - 3, m).$$

Докажите, что $m = 11^s n$ или $n = 11^s m$ для некоторого $s \geqslant 0$.

6. Докажите, что если простое число $p \neq 3$ является делителем числа вида $a^2 + 9$ для некоторого целого a, то p является делителем числа вида $c^2 + 1$ для некоторого целого c.

7. Дано p — нечётное простое число. Для каждого натурального числа $k < p$ посчитаем a_k — количество делителей числа $kp + 1$, больших k и меньших p. Чему равна сумма

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}?$$

8. **(а)** Пусть n — натуральное число, не делящееся ни на 2, ни на 3. Докажите, что существует число вида $4a^2 + 9b^2 - 1$, делящееся на n.

(б) Докажите это же утверждение для произвольного натурального n.

source:algebra/number-theory/modular-arithmetic-g7M/3-inverse-r1.tex

Добавка по обратным остаткам. Вольстенхольм

В этом листочке p — простое число.

1. Предположим, что $p > 2$. Преобразуем сумму

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p.

2. Предположим, что $p > 3$. Преобразуем сумму

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2}$$

в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p.

3. Предположим, что $p > 3$. Преобразуем сумму

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p^2.

4. **Теорема Вольстенхольма.** Докажите, что для любого простого числа $p > 3$ выполняется сравнение

$$C_{2p}^{p} \equiv 2 \pmod{p^3}.$$

source:algebra/number-theory/modular-arithmetic-g7M/3-inverse-more.tex

НОД и НОК

Обозначение. НОД и НОК чисел a и b будем обозначать (a, b) и $[a, b]$ соответственно.

Свойства НОД и НОК:

- $(a, b) \cdot [a, b] = ab$.
- $a \cdot (m, n) = (am, an)$. А если $(m, n) = d$, то $(m/d, n/d) = 1$.
- $(a, b) = (a \pm b, b) = (a \pm kb, b)$. А если $a \equiv r \pmod b$, то $(a, b) = (r, b)$.

1. Ваня посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Лёша — всех чисел от 501 до 1000. У кого получилось больше и во сколько раз?

2. Найдите НОД всех шестизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 без повторений.

3. В классе некоторые пары людей дружат. Докажите, что каждому человеку в этом классе можно присвоить натуральное число так, чтобы любые два числа друзей имели НОД, больший 1, а любые два числа не друзей были взаимно просты.

4. Даны натуральные числа a и b. Сколько среди чисел $a, 2a, 3a, \ldots, ba$ делящихся на b?

5. Денис выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

6. Натуральные числа a и b таковы, что $[a, a+5] = [b, b+5]$. Докажите, что $a = b$.

7. Антон задумал четыре различных натуральных числа, для каждой пары из них он нашёл НОД. У него получились шесть НОД: 1, 2, 3, 4, 5 и d, где $d > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число d?

8. Взаимно простые натуральные числа a и b таковы, что $a + b$ делится на $a - b$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$ и $4ab + 1$ является точным квадратом.

9. Натуральные числа a и b таковы, что $a^3 - b^4 = ab^2$. Докажите, что b является произведением трёх последовательных натуральных чисел.

10. Числа вида $f_k = 2^{2^k} + 1$ называются числами Ферма. Докажите, что $(f_m, f_n) = 1$ при $m \neq n$.

11. Петя разложил несколько спичек по 30 кучкам. Вася может выбрать любые k кучек и добавить в каждую из них по одной спичке. При каких k Вася может при любом исходном раскладе такими операциями уравнять число спичек во всех кучках?

12. Бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что для любых натуральных $i \neq j$ верно $(a_i, a_j) = (i, j)$. Докажите, что $a_i = i$ для всех натуральных i.

source:algebra/number-theory/euclid-algorithm-g7M/1-gcd-and-lcm-r1.tex

Алгоритм Евклида

Как найти НОД двух натуральных чисел? Обозначим большее число через a_0, а меньшее через a_1. Делим a_i на a_{i+1} с остатком:

$$a_0 = q_1 a_1 + a_2, \quad a_1 = q_2 a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad a_{n-2} = q_{n-1} a_{n-1} + a_n, \quad a_{n-1} = q_n a_n.$$

Тогда $(a_0, a_1) = a_n$.

Линейное представление НОД. Для любых целых чисел a и b найдутся целые числа x и y такие, что $ax + by = (a, b)$.

1. Найдите НОД и линейное представление НОД для чисел 456 и 654.
2. На какие числа может быть сократима дробь **(а)** $\frac{13n+8}{8n+3}$; **(б)** $\frac{n^2+5}{n+3}$?
3. Найдите **(а)** $(11! - 20, 10! - 20)$; **(б)** $(2^m - 1, 2^n - 1)$;
   (в) $(\underbrace{11\ldots1}_{m \text{ единиц}}, \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ единиц}})$.
4. Бесконечная в обе стороны последовательность имеет периоды m и n. Докажите, что (m, n) — тоже её период. (Число $l > 0$ называется *периодом* последовательности $\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$, если $a_k = a_{k+l}$ для всех целых k.)
5. Пусть m и n — целые взаимно простые числа. Найдите наибольшее возможное значение выражения $(m + 2022n, n + 2022m)$.
6. В каждой вершине куба написано целое число. Если числа x и y стоят на одном ребре, то число x можно увеличить или уменьшить на y. Всегда ли при помощи таких операций можно сделать все числа равными?
7. Даны попарно взаимно простые натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Докажите, что любая дробь вида $\frac{c}{m_1 m_2 \ldots m_k}$ представима в виде суммы дробей вида $\frac{a_i}{m_i}$.
8. Докажите, что если НОД целых чисел $a_1, \ldots, a_n$ равен d, то найдутся целые $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = d$.
9. По бесконечной шахматной доске ходит (m, n)-крокодил, который может за один ход сдвинуться на m клеток по горизонтали или вертикали, а затем — на n клеток в перпендикулярном направлении. При каких натуральных m и n этот (m, n)-крокодил сможет попасть из любой клетки доски в любую другую?
10. Бильярдный стол представляет собой прямоугольник $n \times m$ с четырьмя лунками в углах. Миша пустил из одного угла стола шарик под углом 45° к сторонам. Когда шарик ударяется о бортик, он отражается от него и начинает лететь в перпендикулярном направлении. Сколько раз шарик ударится о бортик перед тем, как попадёт в лунку, если известно, что $(m, n) = d$?

НОД и НОК. Добавка

1. Дано чётное натуральное число n. Найдите все такие натуральные взаимно простые числа a, b, что $a^n + b^n$ делится на $a + b$.

2. Могут ли $[a, b]$ и $[a + c, b + c]$ быть равны (a, b, c — натуральные числа)?

3. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c) таких, что $a^3 + b^3 + c^3$ делится на a^2b, b^2c и c^2a.

source:algebra/number-theory/euclid-algorithm-g7M/gcd-and-lcm-more.tex

Всё, что нужно, на картинке

1. Стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ равны. Середина его стороны AD равноудалена от точек B и C. Докажите, что середина BC равноудалена от точек A и D.

2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CH. На стороне AC выбрана точка D такая, что $\angle BAC = \angle CBD$. Докажите, что CH делит пополам отрезок BD.

3. На стороне AC равностороннего треугольника ABC выбрана точка D. Рассмотрим такую точку E, что треугольник ADE равносторонний. Докажите, что $BD = CE$.

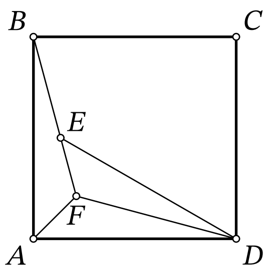
4. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен правильный треугольник CDN, вершина N которого лежит вне квадрата, а на диагонали AC — правильный треугольник ACM, внутри которого лежит точка D. Докажите, что длина отрезка MN равна стороне квадрата.

5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором равны углы A и D. Серединные перпендикуляры к отрезкам AB и CD пересекаются на отрезке AD. Докажите, что диагонали четырёхугольника равны.

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. На ней выбрана точка E так, что $BD = BE$. На стороне AC выбрана точка F так, что $EF \parallel BC$. Докажите, что $BE = DF$.

7. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Точка E — середина AD, F — пересечения прямой CE с отрезком AB. Оказалось, что $BE = BD = DC$. Докажите, что $AF = FE$.

8. Внутри квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F так, что E лежит на отрезке BF и треугольники ABF и EDF равны. Найдите углы этих треугольников.



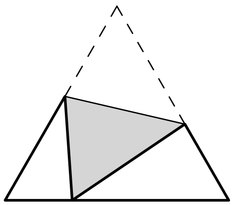
9. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка D, а на стороне BC — точка E. Точка F отмечена так, что отрезки EF и BD пересекаются. Оказалось, что $BD = CD = CE = EF$, $AC = BF$. Докажите, что точки C, D, F лежат на одной прямой.

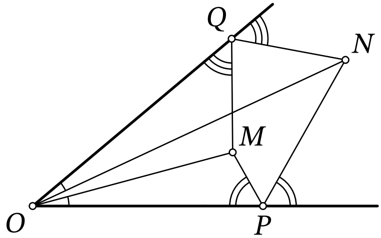
source:geometry/mixture-g7M-1-no-construction/0.tex

source:geometry/mixture-g7M-1-no-construction/square.asy

Симметрия

1. Бумажный равносторонний треугольник перегнули по прямой так, что одна из вершин попала на противоположную сторону так, как изображено на левом рисунке. Докажите, что углы двух белых треугольников соответственно равны.





2. На продолжении диагонали AC квадрата $ABCD$ за точку C выбрана точка X так, что $BX = AC$. Найдите угол AXB.

3. На стороне BC треугольника ABC выбрали точки P и Q такие, что $BA = BP$ и $CA = CQ$. Точка I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что треугольник IPQ равнобедренный.

4. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, $\angle ABC = 120°$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = CQ = AC$. Докажите, что угол PIQ — прямой.

5. В треугольнике ABC с прямым углом C биссектриса AL и высота CH пересекаются в точке K. Биссектриса угла BCH пересекает отрезок BH в точке M. Докажите, что $CK = ML$.

6. Внутри острого угла с вершиной в точке O отмечены точки M и N, а на сторонах угла — точки P и Q такие, что $\angle MOP = \angle NOQ$ и точка O лежит на биссектрисах внешних углов при вершинах P и Q треугольников MPN и MQN соответственно (правый рисунок). Докажите, что длины ломаных MPN и MQN равны.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) биссектриса BL пересекается с биссектрисой угла A в точке I. Точка X на стороне AB выбрана так, что $BX = BC$. Прямая XI пересекает основание BC в точке Y. Докажите, что $BY = CL$.

8. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. На лучах BA и CA отложены отрезки BX и CY, равные стороне BC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

9. *Эллипсом* называют множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек (называемых его *фокусами*) постоянна. Докажите, что у эллипса ровно две оси симметрии.

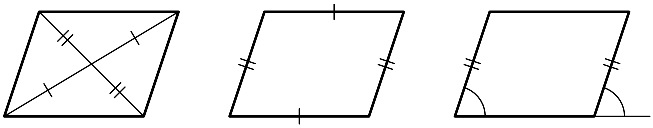
source:geometry/reflection-g7M/fold.asy

source:geometry/reflection-g7M/bisectors.asy

Медиана — это лишь полдела

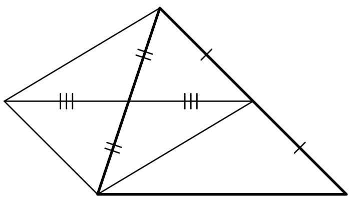
Параллелограмм — это четырёхугольник, противоположные стороны которого параллельны.

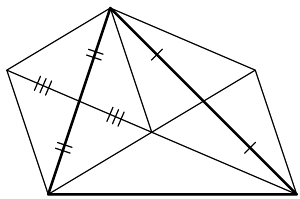
Следующие утверждения эквивалентны тому, что четырёхугольник параллелограмм:



1. В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение $BC : BM$.

2. **(а)** Посмотрите на левоый рисунок и докажите, что отрезок, соединяющий середины сторон треугольника (он ещё называется *средней линией*), параллелен третьей стороне и равен её половине.
   (б) Посмотрите на правый рисунок и докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины.





3. В треугольнике ABC высота AH пересекает медиану BM в точке K. Найдите угол между высотой и медианой, если $AK = BC$.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AD \parallel BC$. Биссектриса угла A пересекает сторону CD в её середине. Докажите, что $AB = BC + AD$.

5. В треугольнике ABC точка M — середина AC. На стороне BC взяли точку K так, что угол BMK прямой. Оказалось, что $BK = AB$. Найдите угол MBC, если $\angle ABC = 110°$.

6. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны CD, а точка K — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на AE. Докажите, что $BC = CK$.

7. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D такая, что $BD = AC$. Медиана AM этого треугольника пересекает отрезок BD в точке K. Оказалось, что $DK = DC$. Докажите, что $AM + KM = AB$.

8. На медиану AM треугольника ABC опустили перпендикуляр BL. На отрезке AL нашлась такая точка K, что $AK = LM$. Прямая, проходящая через K перпендикулярно AM, пересекает сторону AB в точке D. Докажите, что $CD = AB + AD$.

source:geometry/median-extension-g7M/0.tex

source:geometry/median-extension-g7M/parallelogram-criteria-1.asy

source:geometry/median-extension-g7M/parallelogram-criteria-2.asy

source:geometry/median-extension-g7M/parallelogram-criteria-3.asy

source:geometry/median-extension-g7M/midline.asy

source:geometry/median-extension-g7M/centroid.asy

Перекладывание отрезков

1. Дан треугольник ABC, на сторонах AB и AC которого отмечены точки X и Y соответственно так, что $BX + CY = BC$. Докажите, что точки X и Y равноудалены от точки пересечения биссектрис треугольника.

2. В треугольнике ABC биссектриса AE равна по длине отрезку CE. Также известно, что $2AB = AC$. Найдите величину угла B.

3. В треугольнике ABC угол A равен $20°$, угол C равен $40°$. Докажите, что разность длин сторон AC и AB равна длине биссектрисы угла B.

4. В треугольнике ABC угол B вдвое больше угла C, а угол A — тупой. Точка K на стороне BC такова, что $\angle KAC$ — прямой. Докажите, что $KC = 2AB$.

5. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I. Известно, что $CA + AI = BC$. Найдите отношение $\angle BAC : \angle CBA$.

6. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, а также выполнены равенства $AB = BC$, $AC = CD$, $BC + CD = AD$. Найдите величину наибольшего угла трапеции $ABCD$.

7. В треугольнике ABC угол A равен $120°$, точка D лежит на биссектрисе угла A, и $AD = AB + AC$. Докажите, что треугольник DBC — равносторонний.

8. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D так, что $BC = BD$. Точка E на катете BC такова, что $BE = DE$. Докажите, что $AD + CE = DE$.

9. Дан прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A = 90°$. BL — биссектриса угла B, а точка K на стороне BC такова, что $\angle BLK = 90°$. Оказалось, что $3KC = 2(BC - AB)$. Найдите $\angle C$.

source:geometry/equal-segments-g7M/1.tex

Перекладывание отрезков. Добавка

1. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отметили точки K и L соответственно так, что $AK = CL$ и $\angle ALK + \angle LKB = 60^\circ$. Докажите, что $KL = BC$.

2. Углы треугольника ABC удовлетворяют условию $2\angle A + \angle B = \angle C$. Внутри этого треугольника на биссектрисе угла A выбрана точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KBC = 2\angle KBA$.

3. На стороне AC треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = 2KC$ и $\angle ABK = 2\angle KBC$. Пусть F — середина стороны AC, а L — проекция A на BK. Докажите, что прямые FL и BC перпендикулярны.

source:geometry/equal-segments-g7M/2.tex

Перекладывание треугольников

1. В четырёхугольнике $ABCD$ внешний угол при вершине A равен углу BCD, а $AD = CD$. Докажите, что BD — биссектриса угла ABC.

2. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. На лучах AB и AC взяты точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = AY$ и точка M лежит на отрезке XY. Докажите, что $BX = CY$.

3. Точки E и F лежат на сторонах AB и BC ромба $ABCD$ (ромб — это параллелограмм с равными сторонами), причём $BE = CF$. Известно, что треугольник DEF — равносторонний. Найдите угол BAD.

4. Через точку Y на стороне AB равностороннего треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке Z, а продолжение стороны CA за точку A — в точке X. Известно, что $XY = YZ$ и $AY = BZ$. Докажите, что прямые XZ и BC перпендикулярны.

5. Точки X и Y на стороне BC равностороннего треугольника ABC таковы, что $BX = XY = YC$. Точка M на стороне AC выбрана так, что $AM = BX$. Докажите, что $\angle AXM + \angle AYM = 30°$.

6. В треугольнике ABC биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке I.
(а) Пусть $IB_1 = IC_1$ и треугольник ABC неравнобедренный. Чему равен угол A?
(б) Обязательно ли треугольник равнобедренный, если I равноудалена от середин сторон AB и AC?
(в) Пусть $\angle CC_1B_1 = 30°$. Докажите, что либо $\angle A = 60°$, либо $\angle B = 120°$.

7. По прямому шоссе со скоростью 90 км/ч едет машина. Недалеко от шоссе стоит параллельный ему 25-метровый забор. Каждую секунду пассажир машины измеряет угол, под которым виден забор. Докажите, что сумма всех измеренных им углов меньше 180°.

8. На сторонах AB и AC выбраны точки C_1 и B_1 соответственно так, что $BC_1 = CB_1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Оказалось, что $\angle BAC = \angle B_1PC$. На отрезке PC_1 нашлась такая точка X, что $2PX = PB_1 + PC_1$. Докажите, что $\angle BPC = 90°$.

source:geometry/equal-triangles-g7M.tex

Заключительный разнобой (геометрия)

1. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. Биссектриса угла B пересекает прямую AD в точке P. Перпендикуляр к BP, проходящий через точку A, пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что прямые PQ и CD параллельны.

2. Дан прямоугольный треугольник ABC, точка K — середина его гипотенузы AB. На катетах AC и BC выбираются точки M и N соответственно так, что угол MKN — прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle C = 120°$, а $BC + CD = AB$. Докажите, что $AC = AD$.

4. Все стороны пятиугольника $ABCDE$ равны. Кроме того, верно соотношение $\angle BCD = 2\angle DBE$. Найдите угол BCD.

source:geometry/mixture-g7M-2-final.tex

Деревья

Определение. Связный граф без циклов называется *дерево.*

Определение. Часть графа, содержащая все его вершины и являющаяся деревом, называется *остовное дерево.*

Свойство 1. В любом связном графе можно выделить остовное дерево.

Свойство 2. Пусть в дереве есть хотя бы две вершины. Тогда в нем есть хотя бы две висячие вершины.

Свойство 3. В дереве на n вершинах ровно $n-1$ ребро.

1. В дереве имеется 200 вершин степени 5, 100 вершин степени 3, а остальные — висячие. Сколько висячих вершин в этом дереве?
2. Между любыми двумя соседними клетками шахматной доски лежит спичка. Какое наименьшее число спичек можно убрать, чтобы ладья могла попасть за несколько ходов из любой клетки в любую другую, не перескакивая через спички?
3. Система станций метро устроена таким образом, что из каждой станции в каждую можно проехать. Докажите, что одну из станций можно закрыть так, что это свойство сохранится.
4. В стране ровно 100 городов и 199 двусторонних авиалиний. Из любого города можно добраться самолётами до любого другого. Докажите, что найдётся замкнутый маршрут, при закрытии всех авиалиний которого из любого города по-прежнему можно будет добраться до любого другого.
5. Существует ли граф, два остовных дерева которого не имеют общих рёбер?
6. В связном графе есть вершина степени n. Докажите, что в этом графе можно выделить n вершин так, чтобы при удалении любого набора из этих вершин, граф оставался связным.
7. В стране 2022 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от каждого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать во всех городах, совершив не более 4040 перелётов.
8. В графе на 101 вершине ребра покрасили в 3 цвета. Оказалось, что после выбрасывания ребер любого цвета остается связный граф. Какое минимальное количество ребер могло быть в изначальном графе?

`source:combinatorics/graph/tree-g7M/1.tex`

Деревья. Добавка

1. Докажите, что для любого набора чисел $0 < d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ такого, что $d_1 + \ldots + d_n = 2n - 2$, найдется дерево, где степени вершин будут $d_1, \ldots, d_n$.

2. А единственно ли дерево из предыдущей задачи?

3. В стране 101 аэропорт. Каждое возможное направление обслуживается ровно одной авиакомпанией (в обе стороны сразу). Известно, что ни одна авиакомпания не может организовать круговое турне, в котором городов больше двух и города не повторяются. Каково наименьшее возможное количество авиакомпаний?

4. В графе есть остовное дерево с m висячими вершинами и остовное дерево с n висячими вершинами. Докажите, что для всякого k такого, что $m < k < n$, найдется остовное дерево с k висячими вершинами.

source:combinatorics/graph/tree-g7M/2.tex

Подвешивание за вершину

1. В Цветочном городе началась эпидемия ветрянки. Сначала ветрянкой заболел один коротышка. Когда коротышка здоров, он посещает за день всех своих больных друзей. Коротышка, который заболевает ветрянкой, болеет ровно один день и весь день лежит дома, а на следующий день у него появляется иммунитет ровно на один день. Ветрянка очень заразна, поэтому при посещении любого больного коротышка заболевает, если у него нет иммунитета. Докажите, что эпидемия ветрянки рано или поздно остановится.

2. В графе 2022 вершины, причём степень каждой не менее трёх. Докажите, что в графе есть цикл длины не более 20.

3. Дан связный граф. Докажите, что на каждом отрезке можно поставить синюю и красную стрелки в противоположных направлениях так, чтобы из любой вершины в любую другую можно было пройти таким путём, на котором цвет стрелки меняется не более одного раза.

4. В графе степени всех вершин равны 3 и между любыми двумя вершинами существует путь длиной не более 2. Какое наибольшее число вершин может быть в этом графе?

5. В стране n городов, между некоторыми есть дороги. Известно, что из каждого города можно попасть в каждый, причем из каждого города выходит не более d дорог. Докажите, что всю страну можно разделить на два региона так, что в каждом регионе можно будет из любого города попасть в любой и размер каждого региона будет не меньше $\left\lfloor \frac{n-1}{d} \right\rfloor$.

6. В кружке учатся 53 ученика. Известно, что если трое кружковцев попарно незнакомы друг с другом, то какие-то двое из них имеют в кружке общего знакомого. Докажите, что кто-то из учеников имеет в кружке хотя бы 6 знакомых.

7. В компании 90 человек, каждый знаком не менее чем с десятью другими. Докажите, что любой из них может найти трёх других (не обязательно друзей) так, чтобы внутри этой четвёрки у каждого было не более одного незнакомого.

8. Дан связный граф с 1000 вершинами. Докажите, что можно выкинуть часть рёбер так, чтобы у всех оставшихся вершин была бы нечётная степень.

9. В стране 2022 города. Некоторые из них соединены дорогами так, что между любыми двумя городами есть единственный путь, причём он проходит не более чем по восьми дорогам. Город называется захолустным, если из него выходит не более восьми дорог. Докажите, что в стране найдется город, соединенный дорогами как минимум с восемью захолустными.

10. В дереве все вершины были занумерованы числами от 1 до n. Нумерацию поменяли, но оказалось, что если вершины i и j смежны, то они и раньше были смежны.

Докажите, что найдется либо вершина номер которой не изменился, либо ребро, у которого набор номеров концов остался таким же.

source:combinatorics/graph/breath-first-g7M.tex

Двудольные графы

Определение. Граф называется *двудольным,* если его вершины можно покрасить в два цвета так, что каждое ребро соединяет вершины разного цвета.

1. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все циклы в нём имеют чётную длину.

2. Дано 2022 натуральных числа. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение любых двух одноцветных чисел не являлось бы простым числом.

3. На плоскости даны 2077 точек. Двое по очереди соединяют эти точки отрезками, причём один и тот же отрезок нельзя проводить дважды. Проигрывает тот, после хода которого впервые образуется замкнутая ломаная с нечётным числом звеньев. Кто выиграет при правильной игре?

4. 10 любителей кефира образовали компанию для совместного времяпровождения. В компании всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в компанию добавляется один человек, либо из нее исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы компаний ровно по одному разу?

5. В компании из 100 человек у каждого ровно 3 друга. При каком наименьшем k можно утверждать, что среди любых k из них обязательно найдётся пара друзей?

6. В связном двудольном графе степени всех вершин равны $k > 1$. Докажите, что при удалении любого ребра граф по-прежнему останется связным.

7. Ваня записал в каждой вершине связного графа число. Потом пришёл Лёша, записал на каждом ребре сумму чисел в вершинах этого ребра и стёр числа Вани. Для каких графов Виктория Владимировна гарантированно сможет восстановить числа, написанные Ваней?

8. На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Так ходили, пока не прошли через все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.

9. На листе клетчатой бумаги отмечено некоторое конечное множество M узлов сетки. Всегда ли можно покрасить некоторые точки множества M в красный цвет, а остальные — в синий так, чтобы на каждой линии сетки количество красных и синих узлов отличалось не более, чем на 1?

10. Дан белый квадрат 10×10. За ход можно выбрать 4 белые клетки на пересечении двух строк и двух столбцов и одну из них покрасить. Какое наибольшее количество клеток можно покрасить?

source:combinatorics/graph/bipartite-g7M.tex

Графы поинтереснее

1. Дано дерево. Назовём *степенью провинциальности* вершины расстояние до наиболее удалённой от неё вершины. Назовём вершину *столичной,* если у всех остальных вершин степень провинциальности не меньше. Может ли в дереве быть ровно 3 столичных вершины?

2. Дан связный граф на 2009 вершинах. Докажите, что в нем можно выделить 2008 ребер и расставить на них стрелки так, чтобы для любых двух вершин, соединенных ребром в исходном графе, из одной из них в другую можно было пройти по стрелкам.

3. В графе G степень каждой вершины не превосходит 2022. Докажите, что ребра графа можно покрасить в 11 цветов так, что графы, образованные ребрами каждого цвета, двудольные.

4. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

source:combinatorics/graph/mixture-g7M-advanced.tex

Индукция

1. На плоскости нарисовано несколько окружностей так, что любые две окружности пересекаются в двух точках. Докажите, что эту картинку можно обвести карандашом «одним росчерком», не проходя по одной дуге два раза и не отрывая карандаша от бумаги, и при этом вернуться в начальную точку.

2. На клетчатой плоскости расставили несколько ладей. Докажите, что ладей можно раскрасить в три цвета таким образом, чтобы ладьи одного цвета не били друг друга. Две ладьи бьют друг друга, если они стоят в одном ряду и между ними нет других ладей.

3. Докажите, что число, записываемое 9^n единицами, делится на 9^n.

4. В теннисном турнире каждый участник сыграл с каждым по партии. Докажите, что участников можно занумеровать так, что каждый выиграл у непосредственно следующего за ним.

5. В чемпионате по футболу участвуют 64 команды. Докажите, что чемпионат можно провести за 63 дня так, чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день.

6. У Винни-Пуха было 15 горшочков с различными сортами меда. Сегодня утром он решил подкрепиться и съел весь мед из одного горшочка. Докажите, что, используя пустой горшочек, Винни-Пух может смешать весь оставшийся мед так, что в каждом горшочке получится одинаковая смесь.

7. Докажите, что существует 100-значное число, делящееся на 2^{100}, в записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

8. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

9. $2m$-значное число назовём *ровным,* если его чётные разряды содержат столько же чётных цифр, сколько и нечётные. Докажите, что в любом $(2m + 1)$-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное $2m$-значное число было ровным.

`source:combinatorics/induction-g7M/1.tex`

Индукция. Добавка

1. Виктор Дмитриевич отправился в путешествие в Казахстан. Он решил проехать на машине по замкнутой трассе, проходящей по пустыне. Вдоль трассы расположены n бензоколонок, в каждой из которых есть некоторое количество бензина. Известно, что суммарного количества бензина в бензоколонках хватит на то, чтобы проехать полный круг. Докажите, что найдется такая бензоколонка, что, начав поездку около нее и заправляясь по пути, Виктор Дмитриевич сможет проехать полный круг.

2. В 2022 коробках, стоящих в ряд, лежит суммарно 202200 орехов. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 2022 таких операций можно сделать так, что во всех коробках орехов будет поровну.

3. В прямоугольнике 100×100 изначально закрашено 99 клеток. За одну операцию разрешается выбрать ряд (строку или столбец), в котором закрашено не менее 10 клеток, и закрасить все клетки этого ряда. Докажите, что весь прямоугольник с помощью этих операций закрасить не выйдет.

4. На плоскости даны n прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку). Докажите, что существует n-звенная несамопересекающаяся ломаная, имеющая по одному звену на каждой прямой.

Процессы

1. В лаборатории социального равенства работает 15 сотрудников. Каждый из них получает зарплату, равную целому количеству рублей. Заведующий лабораторией каждый месяц повышает на 1 рубль зарплату 13 из них по своему усмотрению. Сможет ли он когда-нибудь уравнять все зарплаты?

2. В Древней Греции n городов, в каждом живет по философу. Каждый философ придумал свою философскую идею и хочет поделиться ей с остальными. Из каждого города можно посылать письмо в любой другой город; в письме человек может изложить все известные ему идеи. Какое минимальное число писем потребуется, чтобы все философы узнали все идеи?

3. На изначально пустой доске можно написать две единицы, либо стереть два уже имеющихся одинаковых числа n и написать числа $n+k$ и $n-k$ так, что $n-k \geqslant 0$. Какое минимальное количество таких операций потребуется, чтобы получить число 1024?

4. На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить красную точку и поменять цвета её соседей, а также убрать красную точку и изменить цвета её бывших соседей. Менее двух точек оставлять не разрешается. Пусть изначально на окружности было две красные точки. Можно ли после нескольких таких операций получить две синие точки?

5. На проволоку, имеющую форму окружности, насажено несколько стальных шариков одинакового размера. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями, но некоторые — по часовой стрелке, а некоторые — против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что через некоторое время расположение шариков на окружности совпадет с исходным, если:

(а) шарики неразличимы;

(б) все шарики различны.

6. На доске написано натуральное число. Каждую минуту Лена вписывает плюсы между некоторыми его цифрами и записывает новое число, равное полученной сумме, а старое число стирает. Через час Лене надо на кружок. Успеет ли она получить однозначное число?

7. Сережа пришел домой и понял, что не помнит код от замка в подъезде. Но он знает, что код — последовательность четырех цифр, каждая от 0 до 9. Замок откроется, как только набран правильный код, неважно, какие цифры Сережа нажимал перед этим. Сколько цифр придется ввести Сереже перед тем как гарантированно попасть домой?

source:combinatorics/process-g7M.tex

Глава 2

7м2 (7м2)

Сравнения по модулю

Определение. Целые числа a и b *сравнимы по модулю m,* если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- они имеют одинаковые остатки при делении на m;
- их разность делится на m.

1. Докажите следующие свойства сравнений по модулю:
(а) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$;
(б) если $a \equiv b \pmod{m}$ и k — целое число, то $ak \equiv bk \pmod{m}$;
(в) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$;
(г) если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ при любом натуральном n;
(д) если $ka \equiv kb \pmod{m}$ и НОД$(k, m) = 1$, то $a \equiv b \pmod{m}$.

2. Найдите остаток от деления
(а) 47^{101} на 46 и 48; **(б)** $2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022$ на 2023;
(в) 47^{101} на 31; **(г)** $9^{2022} + 13^{2022}$ на 11.

3. Делится ли
(а) $9^{53} + 23^{52} + 30^{51}$ на 7; **(б)** $5^{70} + 6^{70}$ на 61;
(в) $1^{101} + 2^{101} + 3^{101} + \ldots + 2022^{101}$ на 2023; **(г)** $51! + \frac{102!}{51!}$ на 103?

4. У числа 2023^{2023} нашли сумму цифр. У результата опять нашли сумму цифр и т. д., пока не получилась цифра. Что это за цифра?

5. Фродо перемножил тысячу первых простых чисел, а затем то ли увеличил, то ли уменьшил полученное число на 1. Мог ли Фродо получить точный квадрат?

6. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки? (Цифру 0 ставить на первое место нельзя.)

7. Можно ли среди чисел $\frac{100}{1}, \frac{99}{2}, \ldots, \frac{3}{98}, \frac{2}{99}, \frac{1}{100}$ выбрать пять, произведение которых равно единице?

8. На доске записано число 2021. За одну операцию разрешается в любое место числа вставить две одинаковые цифры. Можно ли в результате нескольких таких операций получить число, кратное 583?

9. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дают все остатки при делении на n. Числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ также дают все остатки при делении на n. При каких n может получиться так, что числа $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n$ дают все остатки при делении на n?

10. Можно ли разбить числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ на три группы так, чтобы в первой группе сумма чисел делилась на 102, во второй — на 203, а в третьей — на 304?

Сравнения по модулю — 2

1. При каких натуральных n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323?

2. Целые числа x и y таковы, что $5x+8y$ даёт остаток 1 при делении на 13. Какой остаток при делении на 13 даёт число $x - y$?

3. Натуральные числа a и b таковы, что $N = (84a + 17b)(17a + 84b) \vdots 101$. Докажите, что $N \vdots 10201$.

4. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 7^y = 19^z$.

5. Докажите, что $(3^n - 1)^n - 4 \vdots 3^n - 4$ для любого натурального n.

6. Для натуральных чисел s и n докажите, что $s^{2n+3} + (s - 1)^n \vdots s^2 - s + 1$.

7. Найдите все натуральные числа m, a, b такие, что $m! = 2^a + 2^b$.

8. Натуральные числа x и y, большие 1, таковы, что число x^2+y^2-1 делится на $x+y-1$. Докажите, что число $x + y - 1$ составное.

`source:algebra/number-theory/modular-arithmetic-g7M/2-r2.tex`

Сравнения по модулю. Добавка

1. Последовательность чисел задана следующим образом:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{k+2} = a_k \cdot a_{k+1} + 1$$

при всех натуральных k. Докажите, что при всех натуральных $n \geqslant 7$ число $a_n - 3$ является составным.

2. При каких целых k число $a^3 + b^3 + c^3 - kabc$ делится на $a + b + c$ при любых целых a, b, c с ненулевой суммой?

3. Натуральные числа a и b, большие 1, таковы, что $ab + 1$ — степень двойки. Чётна или нечётна степень вхождения двойки в разложение числа $ab-a+b-1$ на простые множители?

source:algebra/number-theory/modular-arithmetic-g7M/2-r2-more.tex

Обратные остатки

1. **(а)** Даны взаимно простые числа a и n. Докажите, что множество остатков чисел

$$\{0 \cdot a, 1 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, (n-1) \cdot a\}$$

от деления на n совпадает (в некотором порядке) с множеством

$$\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Верно ли это утверждение для не взаимно простых чисел a и n?

(б) Докажите, что для взаимно простых чисел m и n и любого целого числа r найдётся целое x такое, что $mx \equiv r \pmod{n}$, причём все такие x сравнимы между собой по модулю n. Если $r = 1$, то m и x называют *обратными* друг к другу по модулю n.

(в) Даны взаимно простые числа m и n. Докажите, что существуют целые x и y такие, что $mx + ny = 1$.

2. Для каждого ненулевого остатка по модулю
(а) 7; **(б)** 11; **(в)** 19
найдите обратный.

3. Целое число a таково, что $a^{52} \equiv 36 \pmod{73}$ и $a^{53} \equiv 59 \pmod{73}$. Найдите остаток от деления a на 73.

4. Сколько существует четвёрок целых чисел a, b, c, d, таких что $1 \leqslant a, b, c, d \leqslant 10$ и $ad - bc \,\vdots\, 11$?

5. **(а)** Пусть p — простое число. Какие остатки обратны сами себе по модулю p?

(б) **Теорема Вильсона.** Докажите, что для любого простого числа p верно

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

(в) *Обратная теорема Вильсона.* Докажите, что если для натурального числа n выполнено $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$, то n — простое число.

(г) Какой остаток даёт 97! при делении на 101?

6. Натуральные числа m и n таковы, что для каждого натурального k верно

$$(11k - 3, n) = (11k - 3, m).$$

Докажите, что $m = 11^s n$ или $n = 11^s m$ для некоторого $s \geqslant 0$.

7. Докажите, что если простое число $p \neq 3$ является делителем числа вида $a^2 + 9$ для некоторого целого a, то p является делителем числа вида $c^2 + 1$ для некоторого целого c.

8. Дано p — нечётное простое число. Для каждого натурального числа $k < p$ посчитаем a_k — количество делителей числа $kp + 1$, больших k и меньших p. Чему равна сумма

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}?$$

Добавка по обратным остаткам. Вольстенхольм

В этом листочке p — простое число.

1. Предположим, что $p > 2$. Преобразуем сумму

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p.

2. Предположим, что $p > 3$. Преобразуем сумму

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2}$$

в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p.

3. Предположим, что $p > 3$. Преобразуем сумму

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p^2.

4. **Теорема Вольстенхольма.** Докажите, что для любого простого числа $p > 3$ выполняется сравнение

$$C_{2p}^{p} \equiv 2 \pmod{p^3}.$$

source:algebra/number-theory/modular-arithmetic-g7M/3-inverse-more.tex

НОД и НОК

Обозначение. НОД и НОК чисел a и b будем обозначать (a, b) и $[a, b]$ соответственно.

Свойства НОД и НОК:

- $(a, b) \cdot [a, b] = ab$.
- $a \cdot (m, n) = (am, an)$. А если $(m, n) = d$, то $(m/d, n/d) = 1$.
- $(a, b) = (a \pm b, b) = (a \pm kb, b)$. А если $a \equiv r \pmod{b}$, то $(a, b) = (r, b)$.

1. Даны 1000 натуральных чисел. Известно, что любые 999 из них имеют общий делитель, больший 1. Обязательно ли все 1000 чисел имеют общий делитель, больший 1?

2. Ваня посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Лёша — всех чисел от 501 до 1000. У кого получилось больше и во сколько раз?

3. Найдите НОД всех шестизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 без повторений.

4. В классе некоторые пары людей дружат. Докажите, что каждому человеку в этом классе можно присвоить натуральное число так, чтобы любые два числа друзей имели НОД, больший 1, а любые два числа не друзей были взаимно просты.

5. Даны натуральные числа a и b. Сколько среди чисел $a, 2a, 3a, \ldots, ba$ делящихся на b?

6. Денис выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

7. Натуральные числа a и b таковы, что $[a, a + 5] = [b, b + 5]$. Докажите, что $a = b$.

8. Антон задумал четыре различных натуральных числа, для каждой пары из них он нашёл НОД. У него получились шесть НОД: 1, 2, 3, 4, 5 и d, где $d > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число d?

9. Взаимно простые натуральные числа a и b таковы, что $a + b$ делится на $a - b$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$ и $4ab + 1$ является точным квадратом.

10. Натуральные числа a и b таковы, что $a^3 - b^4 = ab^2$. Докажите, что b является произведением трёх последовательных натуральных чисел.

11. Числа вида $f_k = 2^{2^k} + 1$ называются числами Ферма. Докажите, что $(f_m, f_n) = 1$ при $m \neq n$.

12. Петя разложил несколько спичек по 30 кучкам. Вася может выбрать любые k кучек и добавить в каждую из них по одной спичке. При каких k Вася может при любом исходном раскладе такими операциями уравнять число спичек во всех кучках?

Алгоритм Евклида

Как найти НОД двух натуральных чисел? Обозначим большее число через a_0, а меньшее через a_1. Делим a_i на a_{i+1} с остатком:

$$a_0 = q_1a_1 + a_2, \quad a_1 = q_2a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad a_{n-2} = q_{n-1}a_{n-1} + a_n, \quad a_{n-1} = q_na_n.$$

Тогда $(a_0, a_1) = a_n$.

Линейное представление НОД. Для любых целых чисел a и b найдутся целые числа x и y такие, что $ax + by = (a, b)$.

1. Найдите НОД и линейное представление НОД для чисел 456 и 654.

2. На какие числа может быть сократима дробь **(а)** $\frac{13n+8}{8n+3}$; **(б)** $\frac{n^2+5}{n+3}$?

3. Найдите **(а)** $(11! - 20, 10! - 20)$; **(б)** $(2^m - 1, 2^n - 1)$;
(в) $(\underbrace{11\ldots1}_{m\text{ единиц}}, \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ единиц}})$.

4. Бесконечная в обе стороны последовательность имеет периоды m и n. Докажите, что (m, n) — тоже её период. (Число $l > 0$ называется *периодом* последовательности $\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$, если $a_k = a_{k+l}$ для всех целых k.)

5. Пусть m и n — целые взаимно простые числа. Найдите наибольшее возможное значение выражения $(m + 2022n, n + 2022m)$.

6. В каждой вершине куба написано целое число. Если числа x и y стоят на одном ребре, то число x можно увеличить или уменьшить на y. Всегда ли при помощи таких операций можно сделать все числа равными?

7. Даны попарно взаимно простые натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Докажите, что любая дробь вида $\frac{c}{m_1m_2\ldots m_k}$ представима в виде суммы дробей вида $\frac{a_i}{m_i}$.

8. Докажите, что если НОД целых чисел $a_1, \ldots, a_n$ равен d, то найдутся целые $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = d$.

9. По бесконечной шахматной доске ходит (m, n)-крокодил, который может за один ход сдвинуться на m клеток по горизонтали или вертикали, а затем — на n клеток в перпендикулярном направлении. При каких натуральных m и n этот (m, n)-крокодил сможет попасть из любой клетки доски в любую другую?

10. Бильярдный стол представляет собой прямоугольник $n \times m$ с четырьмя лунками в углах. Миша пустил из одного угла стола шарик под углом 45° к сторонам. Когда шарик ударяется о бортик, он отражается от него и начинает лететь в перпендикулярном направлении. Сколько раз шарик ударится о бортик перед тем, как попадёт в лунку, если известно, что $(m, n) = d$?

source:algebra/number-theory/euclid-algorithm-g7M/2.tex

НОД и НОК. Добавка

1. Дано чётное натуральное число n. Найдите все такие натуральные взаимно простые числа a, b, что $a^n + b^n$ делится на $a + b$.

2. Могут ли $[a, b]$ и $[a + c, b + c]$ быть равны (a, b, c — натуральные числа)?

3. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c) таких, что $a^3 + b^3 + c^3$ делится на a^2b, b^2c и c^2a.

source:algebra/number-theory/euclid-algorithm-g7M/gcd-and-lcm-more.tex

Всё, что нужно, на картинке

1. Стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ равны. Середина его стороны AD равноудалена от точек B и C. Докажите, что середина BC равноудалена от точек A и D.

2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CH. На стороне AC выбрана точка D такая, что $\angle BAC = \angle CBD$. Докажите, что CH делит пополам отрезок BD.

3. На стороне AC равностороннего треугольника ABC выбрана точка D. Рассмотрим такую точку E, что треугольник ADE равносторонний. Докажите, что $BD = CE$.

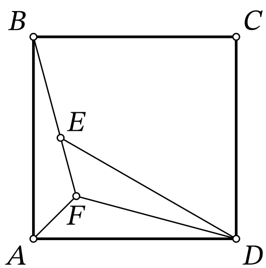
4. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен правильный треугольник CDN, вершина N которого лежит вне квадрата, а на диагонали AC — правильный треугольник ACM, внутри которого лежит точка D. Докажите, что длина отрезка MN равна стороне квадрата.

5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором равны углы A и D. Серединные перпендикуляры к отрезкам AB и CD пересекаются на отрезке AD. Докажите, что диагонали четырёхугольника равны.

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. На ней выбрана точка E так, что $BD = BE$. На стороне AC выбрана точка F так, что $EF \parallel BC$. Докажите, что $BE = DF$.

7. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Точка E — середина AD, F — пересечения прямой CE с отрезком AB. Оказалось, что $BE = BD = DC$. Докажите, что $AF = FE$.

8. Внутри квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F так, что E лежит на отрезке BF и треугольники ABF и EDF равны. Найдите углы этих треугольников.



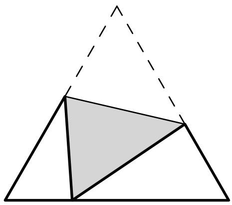
9. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка D, а на стороне BC — точка E. Точка F отмечена так, что отрезки EF и BD пересекаются. Оказалось, что $BD = CD = CE = EF$, $AC = BF$. Докажите, что точки C, D, F лежат на одной прямой.

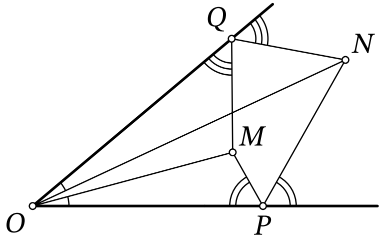
source:geometry/mixture-g7M-1-no-construction/0.tex

source:geometry/mixture-g7M-1-no-construction/square.asy

Симметрия

1. Бумажный равносторонний треугольник перегнули по прямой так, что одна из вершин попала на противоположную сторону так, как изображено на левом рисунке. Докажите, что углы двух белых треугольников соответственно равны.





2. На продолжении диагонали AC квадрата $ABCD$ за точку C выбрана точка X так, что $BX = AC$. Найдите угол AXB.

3. На стороне BC треугольника ABC выбрали точки P и Q такие, что $BA = BP$ и $CA = CQ$. Точка I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что треугольник IPQ равнобедренный.

4. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, $\angle ABC = 120°$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = CQ = AC$. Докажите, что угол PIQ — прямой.

5. В треугольнике ABC с прямым углом C биссектриса AL и высота CH пересекаются в точке K. Биссектриса угла BCH пересекает отрезок BH в точке M. Докажите, что $CK = ML$.

6. Внутри острого угла с вершиной в точке O отмечены точки M и N, а на сторонах угла — точки P и Q такие, что $\angle MOP = \angle NOQ$ и точка O лежит на биссектрисах внешних углов при вершинах P и Q треугольников MPN и MQN соответственно (правый рисунок). Докажите, что длины ломаных MPN и MQN равны.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) биссектриса BL пересекается с биссектрисой угла A в точке I. Точка X на стороне AB выбрана так, что $BX = BC$. Прямая XI пересекает основание BC в точке Y. Докажите, что $BY = CL$.

8. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. На лучах BA и CA отложены отрезки BX и CY, равные стороне BC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

9. *Эллипсом* называют множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек (называемых его *фокусами*) постоянна. Докажите, что у эллипса ровно две оси симметрии.

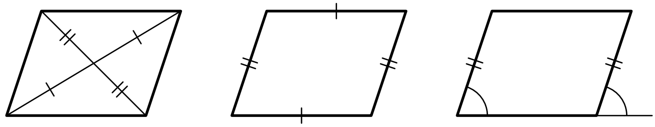
source:geometry/reflection-g7M/fold.asy

source:geometry/reflection-g7M/bisectors.asy

Медиана — это лишь полдела

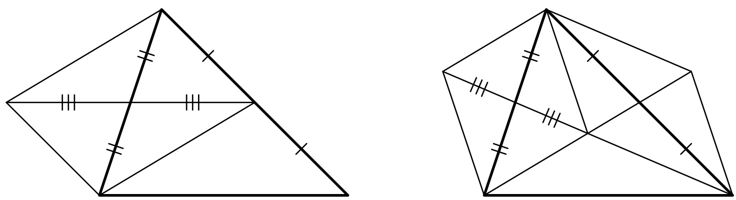
Параллелограмм — это четырёхугольник, противоположные стороны которого параллельны.

Следующие утверждения эквивалентны тому, что четырёхугольник параллелограмм:



1. В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение $BC : BM$.

2. **(а)** Посмотрите на левоый рисунок и докажите, что отрезок, соединяющий середины сторон треугольника (он ещё называется *средней линией*), параллелен третьей стороне и равен её половине.
   (б) Посмотрите на правый рисунок и докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины.



3. В треугольнике ABC высота AH пересекает медиану BM в точке K. Найдите угол между высотой и медианой, если $AK = BC$.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AD \parallel BC$. Биссектриса угла A пересекает сторону CD в её середине. Докажите, что $AB = BC + AD$.

5. В треугольнике ABC точка M — середина AC. На стороне BC взяли точку K так, что угол BMK прямой. Оказалось, что $BK = AB$. Найдите угол MBC, если $\angle ABC = 110°$.

6. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны CD, а точка K — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на AE. Докажите, что $BC = CK$.

7. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D такая, что $BD = AC$. Медиана AM этого треугольника пересекает отрезок BD в точке K. Оказалось, что $DK = DC$. Докажите, что $AM + KM = AB$.

8. На медиану AM треугольника ABC опустили перпендикуляр BL. На отрезке AL нашлась такая точка K, что $AK = LM$. Прямая, проходящая через K перпендикулярно AM, пересекает сторону AB в точке D. Докажите, что $CD = AB + AD$.

source:geometry/median-extension-g7M/0.tex

source:geometry/median-extension-g7M/parallelogram-criteria-1.asy

source:geometry/median-extension-g7M/parallelogram-criteria-2.asy

source:geometry/median-extension-g7M/parallelogram-criteria-3.asy

source:geometry/median-extension-g7M/midline.asy

source:geometry/median-extension-g7M/centroid.asy

Перекладывание отрезков

1. Дан треугольник ABC, на сторонах AB и AC которого отмечены точки X и Y соответственно так, что $BX + CY = BC$. Докажите, что точки X и Y равноудалены от точки пересечения биссектрис треугольника.

2. В треугольнике ABC биссектриса AE равна по длине отрезку CE. Также известно, что $2AB = AC$. Найдите величину угла B.

3. В треугольнике ABC угол A равен $20°$, угол C равен $40°$. Докажите, что разность длин сторон AC и AB равна длине биссектрисы угла B.

4. В треугольнике ABC угол B вдвое больше угла C, а угол A — тупой. Точка K на стороне BC такова, что $\angle KAC$ — прямой. Докажите, что $KC = 2AB$.

5. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I. Известно, что $CA + AI = BC$. Найдите отношение $\angle BAC : \angle CBA$.

6. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, а также выполнены равенства $AB = BC$, $AC = CD$, $BC + CD = AD$. Найдите величину наибольшего угла трапеции $ABCD$.

7. В треугольнике ABC угол A равен $120°$, точка D лежит на биссектрисе угла A, и $AD = AB + AC$. Докажите, что треугольник DBC — равносторонний.

8. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D так, что $BC = BD$. Точка E на катете BC такова, что $BE = DE$. Докажите, что $AD + CE = DE$.

9. Дан прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A = 90°$. BL — биссектриса угла B, а точка K на стороне BC такова, что $\angle BLK = 90°$. Оказалось, что $3KC = 2(BC - AB)$. Найдите $\angle C$.

source:geometry/equal-segments-g7M/1.tex

Перекладывание отрезков. Добавка

1. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отметили точки K и L соответственно так, что $AK = CL$ и $\angle ALK + \angle LKB = 60°$. Докажите, что $KL = BC$.

2. Углы треугольника ABC удовлетворяют условию $2\angle A + \angle B = \angle C$. Внутри этого треугольника на биссектрисе угла A выбрана точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KBC = 2\angle KBA$.

3. На стороне AC треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = 2KC$ и $\angle ABK = 2\angle KBC$. Пусть F — середина стороны AC, а L — проекция A на BK. Докажите, что прямые FL и BC перпендикулярны.

source:geometry/equal-segments-g7M/2.tex

Перекладывание треугольников

1. В четырёхугольнике $ABCD$ внешний угол при вершине A равен углу BCD, а $AD = CD$. Докажите, что BD — биссектриса угла ABC.

2. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. На лучах AB и AC взяты точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = AY$ и точка M лежит на отрезке XY. Докажите, что $BX = CY$.

3. Точки E и F лежат на сторонах AB и BC ромба $ABCD$ (ромб — это параллелограмм с равными сторонами), причём $BE = CF$. Известно, что треугольник DEF — равносторонний. Найдите угол BAD.

4. Через точку Y на стороне AB равностороннего треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке Z, а продолжение стороны CA за точку A — в точке X. Известно, что $XY = YZ$ и $AY = BZ$. Докажите, что прямые XZ и BC перпендикулярны.

5. Точки X и Y на стороне BC равностороннего треугольника ABC таковы, что $BX = XY = YC$. Точка M на стороне AC выбрана так, что $AM = BX$. Докажите, что $\angle AXM + \angle AYM = 30°$.

6. В треугольнике ABC биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке I.
(а) Пусть $IB_1 = IC_1$ и треугольник ABC неравнобедренный. Чему равен угол A?
(б) Обязательно ли треугольник равнобедренный, если I равноудалена от середин сторон AB и AC?
(в) Пусть $\angle CC_1B_1 = 30°$. Докажите, что либо $\angle A = 60°$, либо $\angle B = 120°$.

7. По прямому шоссе со скоростью 90 км/ч едет машина. Недалеко от шоссе стоит параллельный ему 25-метровый забор. Каждую секунду пассажир машины измеряет угол, под которым виден забор. Докажите, что сумма всех измеренных им углов меньше 180°.

8. На сторонах AB и AC выбраны точки C_1 и B_1 соответственно так, что $BC_1 = CB_1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Оказалось, что $\angle BAC = \angle B_1PC$. На отрезке PC_1 нашлась такая точка X, что $2PX = PB_1 + PC_1$. Докажите, что $\angle BPC = 90°$.

source:geometry/equal-triangles-g7M.tex

Заключительный разнобой (геометрия)

1. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. Биссектриса угла B пересекает прямую AD в точке P. Перпендикуляр к BP, проходящий через точку A, пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что прямые PQ и CD параллельны.

2. Дан прямоугольный треугольник ABC, точка K — середина его гипотенузы AB. На катетах AC и BC выбираются точки M и N соответственно так, что угол MKN — прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle C = 120°$, а $BC + CD = AB$. Докажите, что $AC = AD$.

4. Все стороны пятиугольника $ABCDE$ равны. Кроме того, верно соотношение $\angle BCD = 2\angle DBE$. Найдите угол BCD.

source:geometry/mixture-g7M-2-final.tex

Деревья

Определение. Связный граф без циклов называется *дерево.*

Определение. Часть графа, содержащая все его вершины и являющаяся деревом, называется *остовное дерево.*

Свойство 1. В любом связном графе можно выделить остовное дерево.

Свойство 2. Пусть в дереве есть хотя бы две вершины. Тогда в нем есть хотя бы две висячие вершины.

Свойство 3. В дереве на n вершинах ровно $n-1$ ребро.

1. В дереве имеется 200 вершин степени 5, 100 вершин степени 3, а остальные — висячие. Сколько висячих вершин в этом дереве?

2. Между любыми двумя соседними клетками шахматной доски лежит спичка. Какое наименьшее число спичек можно убрать, чтобы ладья могла попасть за несколько ходов из любой клетки в любую другую, не перескакивая через спички?

3. Система станций метро устроена таким образом, что из каждой станции в каждую можно проехать. Докажите, что одну из станций можно закрыть так, что это свойство сохранится.

4. В стране ровно 100 городов и 199 двусторонних авиалиний. Из любого города можно добраться самолётами до любого другого. Докажите, что найдётся замкнутый маршрут, при закрытии всех авиалиний которого из любого города по-прежнему можно будет добраться до любого другого.

5. Существует ли граф, два остовных дерева которого не имеют общих рёбер?

6. В связном графе есть вершина степени n. Докажите, что в этом графе можно выделить n вершин так, чтобы при удалении любого набора из этих вершин, граф оставался связным.

7. В стране 2022 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от каждого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать во всех городах, совершив не более 4040 перелётов.

8. В графе на 101 вершине ребра покрасили в 3 цвета. Оказалось, что после выбрасывания ребер любого цвета остается связный граф. Какое минимальное количество ребер могло быть в изначальном графе?

source:combinatorics/graph/tree-g7M/1.tex

Деревья. Добавка

1. Докажите, что для любого набора чисел $0 < d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ такого, что $d_1 + \ldots + d_n = 2n - 2$, найдется дерево, где степени вершин будут $d_1, \ldots, d_n$.

2. А единственно ли дерево из предыдущей задачи?

3. В стране 101 аэропорт. Каждое возможное направление обслуживается ровно одной авиакомпанией (в обе стороны сразу). Известно, что ни одна авиакомпания не может организовать круговое турне, в котором городов больше двух и города не повторяются. Каково наименьшее возможное количество авиакомпаний?

4. В графе есть остовное дерево с m висячими вершинами и остовное дерево с n висячими вершинами. Докажите, что для всякого k такого, что $m < k < n$, найдется остовное дерево с k висячими вершинами.

source:combinatorics/graph/tree-g7M/2.tex

Подвешивание за вершину

1. В Цветочном городе началась эпидемия ветрянки. Сначала ветрянкой заболел один коротышка. Когда коротышка здоров, он посещает за день всех своих больных друзей. Коротышка, который заболевает ветрянкой, болеет ровно один день и весь день лежит дома, а на следующий день у него появляется иммунитет ровно на один день. Ветрянка очень заразна, поэтому при посещении любого больного коротышка заболевает, если у него нет иммунитета. Докажите, что эпидемия ветрянки рано или поздно остановится.

2. В графе 2022 вершины, причём степень каждой не менее трёх. Докажите, что в графе есть цикл длины не более 20.

3. Дан связный граф. Докажите, что на каждом отрезке можно поставить синюю и красную стрелки в противоположных направлениях так, чтобы из любой вершины в любую другую можно было пройти таким путём, на котором цвет стрелки меняется не более одного раза.

4. В графе степени всех вершин равны 3 и между любыми двумя вершинами существует путь длиной не более 2. Какое наибольшее число вершин может быть в этом графе?

5. В стране n городов, между некоторыми есть дороги. Известно, что из каждого города можно попасть в каждый, причем из каждого города выходит не более d дорог. Докажите, что всю страну можно разделить на два региона так, что в каждом регионе можно будет из любого города попасть в любой и размер каждого региона будет не меньше $\lfloor \frac{n-1}{d} \rfloor$.

6. В кружке учатся 53 ученика. Известно, что если трое кружковцев попарно незнакомы друг с другом, то какие-то двое из них имеют в кружке общего знакомого. Докажите, что кто-то из учеников имеет в кружке хотя бы 6 знакомых.

7. В компании 90 человек, каждый знаком не менее чем с десятью другими. Докажите, что любой из них может найти трёх других (не обязательно друзей) так, чтобы внутри этой четвёрки у каждого было не более одного незнакомого.

8. Дан связный граф с 1000 вершинами. Докажите, что можно выкинуть часть рёбер так, чтобы у всех оставшихся вершин была бы нечётная степень.

9. В стране 2022 города. Некоторые из них соединены дорогами так, что между любыми двумя городами есть единственный путь, причём он проходит не более чем по восьми дорогам. Город называется захолустным, если из него выходит не более восьми дорог. Докажите, что в стране найдется город, соединенный дорогами как минимум с восемью захолустными.

10. В дереве все вершины были занумерованы числами от 1 до n. Нумерацию поменяли, но оказалось, что если вершины i и j смежны, то они и раньше были смежны.

Докажите, что найдется либо вершина номер которой не изменился, либо ребро, у которого набор номеров концов остался таким же.

source:combinatorics/graph/breath-first-g7M.tex

Двудольные графы

Определение. Граф называется *двудольным,* если его вершины можно покрасить в два цвета так, что каждое ребро соединяет вершины разного цвета.

1. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все циклы в нём имеют чётную длину.

2. Дано 2022 натуральных числа. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение любых двух одноцветных чисел не являлось бы простым числом.

3. На плоскости даны 2077 точек. Двое по очереди соединяют эти точки отрезками, причём один и тот же отрезок нельзя проводить дважды. Проигрывает тот, после хода которого впервые образуется замкнутая ломаная с нечётным числом звеньев. Кто выиграет при правильной игре?

4. 10 любителей кефира образовали компанию для совместного времяпровождения. В компании всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в компанию добавляется один человек, либо из нее исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы компаний ровно по одному разу?

5. В компании из 100 человек у каждого ровно 3 друга. При каком наименьшем k можно утверждать, что среди любых k из них обязательно найдётся пара друзей?

6. В связном двудольном графе степени всех вершин равны $k > 1$. Докажите, что при удалении любого ребра граф по-прежнему останется связным.

7. Ваня записал в каждой вершине связного графа число. Потом пришёл Лёша, записал на каждом ребре сумму чисел в вершинах этого ребра и стёр числа Вани. Для каких графов Виктория Владимировна гарантированно сможет восстановить числа, написанные Ваней?

8. На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Так ходили, пока не прошли через все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.

9. На листе клетчатой бумаги отмечено некоторое конечное множество M узлов сетки. Всегда ли можно покрасить некоторые точки множества M в красный цвет, а остальные — в синий так, чтобы на каждой линии сетки количество красных и синих узлов отличалось не более, чем на 1?

10. Дан белый квадрат 10×10. За ход можно выбрать 4 белые клетки на пересечении двух строк и двух столбцов и одну из них покрасить. Какое наибольшее количество клеток можно покрасить?

source:combinatorics/graph/bipartite-g7M.tex

Графы поинтереснее

1. Дано дерево. Назовём *степенью провинциальности* вершины расстояние до наиболее удалённой от неё вершины. Назовём вершину *столичной,* если у всех остальных вершин степень провинциальности не меньше. Может ли в дереве быть ровно 3 столичных вершины?

2. Дан связный граф на 2009 вершинах. Докажите, что в нем можно выделить 2008 ребер и расставить на них стрелки так, чтобы для любых двух вершин, соединенных ребром в исходном графе, из одной из них в другую можно было пройти по стрелкам.

3. В графе G степень каждой вершины не превосходит 2022. Докажите, что ребра графа можно покрасить в 11 цветов так, что графы, образованные ребрами каждого цвета, двудольные.

4. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

source:combinatorics/graph/mixture-g7M-advanced.tex

Индукция

1. На плоскости нарисовано несколько окружностей так, что любые две окружности пересекаются в двух точках. Докажите, что эту картинку можно обвести карандашом «одним росчерком», не проходя по одной дуге два раза и не отрывая карандаша от бумаги, и при этом вернуться в начальную точку.

2. На клетчатой плоскости расставили несколько ладей. Докажите, что ладей можно раскрасить в три цвета таким образом, чтобы ладьи одного цвета не били друг друга. Две ладьи бьют друг друга, если они стоят в одном ряду и между ними нет других ладей.

3. Докажите, что число, записываемое 9^n единицами, делится на 9^n.

4. В теннисном турнире каждый участник сыграл с каждым по партии. Докажите, что участников можно занумеровать так, что каждый выиграл у непосредственно следующего за ним.

5. В чемпионате по футболу участвуют 64 команды. Докажите, что чемпионат можно провести за 63 дня так, чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день.

6. У Винни-Пуха было 15 горшочков с различными сортами меда. Сегодня утром он решил подкрепиться и съел весь мед из одного горшочка. Докажите, что, используя пустой горшочек, Винни-Пух может смешать весь оставшийся мед так, что в каждом горшочке получится одинаковая смесь.

7. Докажите, что существует 100-значное число, делящееся на 2^{100}, в записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

8. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

9. $2m$-значное число назовём *ровным,* если его чётные разряды содержат столько же чётных цифр, сколько и нечётные. Докажите, что в любом $(2m+1)$-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное $2m$-значное число было ровным.

source:combinatorics/induction-g7M/1.tex

Индукция. Добавка

1. Виктор Дмитриевич отправился в путешествие в Казахстан. Он решил проехать на машине по замкнутой трассе, проходящей по пустыне. Вдоль трассы расположены n бензоколонок, в каждой из которых есть некоторое количество бензина. Известно, что суммарного количества бензина в бензоколонках хватит на то, чтобы проехать полный круг. Докажите, что найдется такая бензоколонка, что, начав поездку около нее и заправляясь по пути, Виктор Дмитриевич сможет проехать полный круг.

2. В 2022 коробках, стоящих в ряд, лежит суммарно 202200 орехов. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 2022 таких операций можно сделать так, что во всех коробках орехов будет поровну.

3. В прямоугольнике 100×100 изначально закрашено 99 клеток. За одну операцию разрешается выбрать ряд (строку или столбец), в котором закрашено не менее 10 клеток, и закрасить все клетки этого ряда. Докажите, что весь прямоугольник с помощью этих операций закрасить не выйдет.

4. На плоскости даны n прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку). Докажите, что существует n-звенная несамопересекающаяся ломаная, имеющая по одному звену на каждой прямой.

source:combinatorics/induction-g7M/2.tex

Процессы

1. В лаборатории социального равенства работает 15 сотрудников. Каждый из них получает зарплату, равную целому количеству рублей. Заведующий лабораторией каждый месяц повышает на 1 рубль зарплату 13 из них по своему усмотрению. Сможет ли он когда-нибудь уравнять все зарплаты?

2. В Древней Греции n городов, в каждом живет по философу. Каждый философ придумал свою философскую идею и хочет поделиться ей с остальными. Из каждого города можно посылать письмо в любой другой город; в письме человек может изложить все известные ему идеи. Какое минимальное число писем потребуется, чтобы все философы узнали все идеи?

3. На изначально пустой доске можно написать две единицы, либо стереть два уже имеющихся одинаковых числа n и написать числа $n+k$ и $n-k$ так, что $n-k \geqslant 0$. Какое минимальное количество таких операций потребуется, чтобы получить число 1024?

4. На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить красную точку и поменять цвета её соседей, а также убрать красную точку и изменить цвета её бывших соседей. Менее двух точек оставлять не разрешается. Пусть изначально на окружности было две красные точки. Можно ли после нескольких таких операций получить две синие точки?

5. На проволоку, имеющую форму окружности, насажено несколько стальных шариков одинакового размера. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями, но некоторые — по часовой стрелке, а некоторые — против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что через некоторое время расположение шариков на окружности совпадет с исходным, если:
   (а) шарики неразличимы;
   (б) все шарики различны.

6. На доске написано натуральное число. Каждую минуту Лена вписывает плюсы между некоторыми его цифрами и записывает новое число, равное полученной сумме, а старое число стирает. Через час Лене надо на кружок. Успеет ли она получить однозначное число?

7. Сережа пришел домой и понял, что не помнит код от замка в подъезде. Но он знает, что код — последовательность четырех цифр, каждая от 0 до 9. Замок откроется, как только набран правильный код, неважно, какие цифры Сережа нажимал перед этим. Сколько цифр придется ввести Сереже перед тем как гарантированно попасть домой?

source:combinatorics/process-g7M.tex

Глава 3

8м1 (8м1)

Функция Эйлера

Определение. Для натурального n обозначим через $\varphi(n)$ количество чисел, взаимно простых с n и не превосходящих n. Функция $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера.*

0. В таблицу $a \times b$ выписаны все последовательные числа подряд начиная с 1, причем $(a, b) = 1$.

(а) Сколько в таблице чисел, взаимно простых с b?

(б) Сколько в каждом столбце чисел, взаимно простых с a?

(в) Докажите, что если a и b взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

(г) Докажите, что для $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ ($p_1, \ldots, p_k$ — различные простые) выполнено

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \ldots p_k^{\alpha_k-1} \cdot (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_k - 1) =$$
$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

1. Решите уравнение

(а) $\varphi(n) = \frac{n}{3}$; **(б)** $\varphi(n) = 10$; **(в)** $\varphi(n) = 14$.

2. **(а)** Докажите, что если $n > 2$, то число всех правильных несократимых дробей со знаменателем n — четно.

(б) Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.

3. Пусть $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ — все делители числа n. Докажите, что

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_k) = n.$$

4. Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такие, что $a_0 = 1$, $a_1 > 1$ и $a_n = \varphi(a_{n+1})$ при всех $n \geqslant 0$.

5. Между двумя единицами пишется двойка, затем между любыми двумя соседними числами пишется их сумма и т. д. Докажите, что число n в итоге будет выписано ровно $\varphi(n)$ раз.

6. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Доказать, что каждое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.

Теорема Эйлера

0. Пусть $1 = x_1 < \ldots < x_{\varphi(n)} \leqslant n$ — все остатки от деления на n, взаимно простые с n. Для взаимно простых a и n докажите, что

$$(ax_1) \cdot \ldots \cdot (ax_{\varphi(n)}) \equiv x_1 \ldots x_{\varphi(n)} \pmod{n}$$

и выведите из этого теорему Эйлера: $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

1. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если $(a, 561) = 1$, то выполняется сравнение $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.

2. Докажите, что $k^2 + k + 1$ не может делиться на 101 ни при каком целом k.

3. Докажите, что при любом четном n число $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$.

4. Докажите, что при любом натуральном n число
(а) $2^n - 1$ не делится на n.
(б) $3^n - 2^n$ не делится на n.

5. Дано простое нечётное число p.
(а) Докажите, что каждый простой делитель числа $a^p - 1$ является делителем числа $a - 1$ или имеет вид $2pk + 1$ для некоторого k.
(б) Докажите, что каждый простой делитель числа $a^{p-1} + \ldots + a + 1$ имеет вид $2pk + 1$ для некоторого k или равен p.
(в) Докажите, что простых чисел вида $2pk + 1$ бесконечно много.

6. Дано натуральное число n.
(а) Докажите, что каждый простой делитель числа $2^{2^n} + 1$ имеет вид $2^{n+1}k + 1$ для некоторого k.
(б) Докажите, что простых чисел вида $2^{n+1}k + 1$ бесконечно много.

7. Дано число 2^{2022}. Докажите, что можно приписать к нему слева несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.

8. Докажите, что для любого n существует число с суммой цифр n, делящееся на n.

source:algebra/number-theory/euler-thereom-g8M/2-r1.tex

Показатели

Определение. Для взаимно простых a и n показателем числа a по модулю n называется наименьшее натуральное d, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

0. Пусть d — показатель a по модулю n.
(а) Докажите, что числа $a^0, a^1, a^2 \ldots, a^{d-1}$ дают разные остатки при делении на n.
(б) Пусть $a^l \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что l делится на d.
(в) Докажите, что $a^s \equiv a^r \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $s \equiv r \pmod{d}$.
(г) Докажите, что d делит $\varphi(n)$.

1. Докажите, что если $a^m \equiv 1 \pmod{k}$ и $a^n \equiv 1 \pmod{k}$, то $a^{(m,n)} \equiv 1 \pmod{k}$.

2. Пусть $p = 3k + 2$ — простое число.
(а) Докажите, что сравнение $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$ имеет единственное решение по модулю p.
(б) Докажите, что для любого остатка a по модулю p сравнение $x^3 \equiv a \pmod{p}$ имеет единственное решение по модулю p.

3. Пусть p — простое число и $p > 5$. Пусть n — такое натуральное число, что $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ делится на p. Докажите, что $p - 1$ делится на 5.

4. p и q — простые числа, $q > 5$. Докажите, что если q делит $2^p + 3^p$, то $q > p$.

5. Найдите все простые p и q, для которых $5^q + 5^p$ делится на pq.

source:algebra/number-theory/multiplicative-order-g8M/r1.tex

Квадратный трёхчлен

1. Верно ли, что если $b > a + c > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня?

2. Корни уравнения $x^2 + ax + b + 1$ являются натуральными числами. Докажите, что $a^2 + b^2$ — составное число.

3. Лёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Юра стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4 и -5 в каком-то порядке. Восстановите стёртое число.

4. Учитель написал на доске квадратное уравнение $x^2+10x+20 = 0$, после чего каждый из учеников по очереди увеличивал или уменьшал на единицу либо коэффициент при x, либо слагаемое без x. В результата на доске оказалось написано уравнение $x^2 + 20x + 10 = 0$. Верно ли, что в некоторых момент на доске было написано уравнение с целыми корнями?

5. Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два различных действительных корня. Докажите, что уравнение $x^4 + ax^3 + (b - 2)x^2 - ax + 1 = 0$ имеет четыре различных действительных корня.

6. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение

$$f(2x - 3) + f(3x + 1) = 0$$

имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$.

7. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ — квадратный трехчлен, причем a, b, c — целые числа. Известно, что трехчлен $f(x)$ и многочлен $f(f(f(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что эти многочлены имеют общий целый корень.

source:algebra/polynomial/quadratic-g8M/1.tex

Квадратный трёхчлен. Добавка

8. Существует ли квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, у которого коэффициенты a, b, c и корни x_1, x_2 образуют (в некотором порядке) множество из пяти последовательных целых чисел?

9. Найдите все функции $f(x)$, определённые при всех действительных x, такие, что $f(x) + f(1 - x) = x^2$.

10. Различные натуральные числа m и n таковы, что у каждого из квадратных уравнений $x^2 - mx + n = 0$ и $x^2 - nx + m = 0$ по два различных натуральных корня. Найдите m и n.

11. Квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что и уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет корней.

12. На оси Ox выбраны различные точки $x_1, \ldots, x_n$ (n хотя бы 3). Рассматриваются все возможные приведённые квадратные трёхчлены $f_1, \ldots, f_m$, графики которых пересекают ось Ox в этих точках и не пересекают в других точках. Докажите, что уравнение

$$f_1 + \ldots + f_m = 0$$

имеет два корня.

source:algebra/polynomial/quadratic-g8M/2.tex

График квадратного трёхчлена

1. **(а)** Сколько общих точек могут иметь две параболы, являющиеся графиками квадратных трёхчленов в одной и той же системе координат?
   (б) Через точку A параболы проведены все возможные прямые. Сколько из них имеют с параболой только одну общую точку?
2. График приведённого квадратного трёхчлена пересекает ось Ox в двух целых точках, расположенных друг от друга на расстоянии 2. Чему равен дискриминант этого трёхчлена?
3. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$.
4. Докажите, что если $c(a+b+c) < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корень.
5. Длины сторон многоугольника равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + \ldots + a_n)$. Докажите, что если A — сумма длин нескольких сторон многоугольника, B — сумма длин остальных его сторон, то $f(A) = f(B)$.
6. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.
7. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$, имеет положительный корень. Докажите, что уравнение $f(f(\ldots f(x)\ldots)) = x$ (2000 итераций) имеет решение.

source:algebra/polynomial/quadratic-g8M/3-graph.tex

Вписанные углы. Счет дуг

Утверждение о центральном угле. Центральный угол в два раза больше вписанного.

Утверждение о вписанных углах. Углы, опирающиеся на равные дуги, равны.

Важный факт. Пусть точки A, B, C, D лежат на окружности Ω (именно в таком порядке!). Тогда угол между прямыми AC и BD равен полусумме мер дуг AB и CD, угол между прямыми AB CD равен полуразности дуг AB и CD.

1. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Доказать, что $\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$.

2. Точки M и N — середины «меньшей» и «большей» дуг BC описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC соответственно. Докажите, что прямая AM — биссектриса угла BAC, а прямая AN — биссектриса внешнего угла BAC.

3. Треугольник ABC вписан в окружность ω. Биссектрисы углов B и C пересекают ω в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что отрезок B_1C_1 отсекает от треугольника ABC равнобедренный треугольник.

4. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle APB = \angle AOB$.

5. В окружности ω проведена хорда AB, на которой отмечена точка K. Окружность, проходящая через точки O, A и K, вторично пересекает ω в точке X. Доказать, что треугольник BKX равнобедренный.

6. Точка D — отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно стороны BC. Отрезки BD и CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q соответственно. Докажите, что AD — биссектриса угла PAQ.

7. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка T, что

$$\angle BTC = \angle BAC + 60^\circ\,, \quad \angle CTA = \angle CBA + 60^\circ\,, \quad \angle ATB = \angle ACB + 60^\circ\,.$$

   Лучи AT, BT, CT продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что полученные точки пересечения образуют равносторонний треугольник.

8. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Противоположные стороны AB и CD при продолжении пересекаются в точке K, стороны BC и AD — в точке L. Докажите, что биссектрисы углов BKC и BLA перпендикулярны.

9. В треугольнике ABC ($AB < AC$) проведена биссектриса AL. Перпендикуляр из точки L на прямую AC пересекает «меньшую» дугу AC описанной окружности Ω треугольника ABC в точке D. Перпендикуляр из точки A на прямую BD пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что точки D, K и середина «меньшей» дуги BC окружности Ω лежат на одной прямой.

source:geometry/inscribed-angles-g8M/1-arc.tex

Вписанные углы и четырехугольники

1. Точка K — середина *«меньшей»* дуги AB вписанного четырехугольника $ABCD$. Хорды CK и AB пересекаются в точке P, хорды DK и AB пересекаются в точке Q. Доказать, что четырехугольник $CPQD$ вписанный.

2. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены лучи, образующие между собой угол 45°. Один из них пересекает диагональ BD в точке M, другой — сторону CD в точке N. Найти величину угла AMN.

3. В остроугольном треугольнике ABC с углом $\angle A = 60°$ отмечены точки H, I, O — ортоцентр и центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника HIO проходит через вершину B.

4. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD. На отрезке AB взяли точку M так, что $AM = AC$, а на отрезке CD — точку N так, что $DN = DB$. Докажите, что если точки M и N не совпадают, то прямая MN параллельна прямой AD.

5. В окружность вписан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AE = DE$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. На продолжении стороны AB за точку A отмечена такая точка Q, что $AQ = DP$. На продолжении стороны DC за точку D отмечена такая точка R, что $DR = AP$. Докажите, что $PE \perp QR$.

6. На описанной окружности ω треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Точки P и Q на окружности ω таковы, что $CP \perp AM$, $CQ \perp BM$. Доказать, что $PB \parallel QA$.

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC — точки N и M соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K — точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

source:geometry/inscribed-angles-g8M/2-quadrilateral.tex

Вписанные прямые углы

1. На высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка D. Пусть P и Q — проекции точки D на прямые AB и AC соответственно. Докажите, что точки B, C, P и Q лежат на одной окружности.

2. AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. W — точка, симметричная A_1 относительно стороны AC. Докажите, что B_1, C_1 и W лежат на одной прямой.

3. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка E — центр описанной окружности треугольника BHC. Докажите, что $EH \perp B_1C_1$.

4. Докажите, что четыре проекции основания A_1 высоты AA_1 остроугольного треугольника ABC на стороны AB, AC и на высоты BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

5. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC, P и Q — проекции точки A_1 на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что прямая PQ делит отрезок A_1B_1 пополам.

6. Докажите, что в любом остроугольном треугольнике середины двух высот, основание третьей и ортоцентр лежат на одной окружности.

7. Точка M — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC. Точка P такова, что прямые PA и BC параллельны. Точки X и Y выбраны на продолжениях PB и PC за точки B и C соответственно так, что $\angle PXM = \angle PYM$. Докажите, что четырехугольник $APXY$ вписан.

source:geometry/inscribed-angles-g8M/3-right-angle.tex

Про биссектрисы и серперы

1. В треугольнике ABC точка I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABI_a лежит на описанной окружности треугольника ABC.

2. Биссектриса внешнего угла A треугольника ABC ($AB < AC$) пересекает его описанную окружность в точке N. Точка X — проекция N на сторону AC. Докажите, что $AB + AX = XC$.

3. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такова, что $AB = BD$. На стороне AB нашлась такая точка K, что $CK = CD$. Докажите, что четырехугольник $BCDK$ можно вписать в окружность.

4. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка P, что выполняются равенства

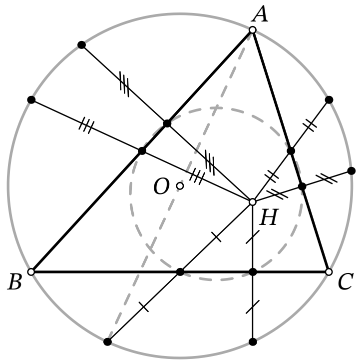
$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC .$$

Докажите, что внутренние биссектрисы углов $\angle ADP$ и $\angle BCP$ и серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекаются в одной точке.

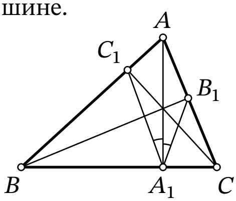
5. Окружность Ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне AC — точка E так, что $BC \parallel DE$. Точки P и Q на «меньшей» дуге BC окружности Ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QB и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XAY + \angle PAQ = 180°$.

source:geometry/arc-midpoint-g8M-1.tex

Ортоцентр и ортотреугольник



1. **Отражение ортоцентра.**
(а) Ортоцентр треугольника отразили относительно одной из его сторон. Докажите, что полученная точка попала на описанную окружность треугольника.
(б) Ортоцентр треугольника отразили относительно середины одной из его сторон. Докажите, что полученная точка попала на описанную окружность треугольника и диаметрально противоположна одной лежащей напротив вершине.

2. 

Высоты треугольника — это биссектрисы ортотреугольника.
Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что A_1A — биссектриса треугольника $A_1B_1C_1$.

3. Внимательно посмотрите на картинки выше и докажите, что
(а) радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC и AHC, равны между собой.
(б) расстояние от вершины A до ортоцентра вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до стороны BC.
(в) $\angle BAO = \angle CAH$.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. На отрезке A_1C_1 выбрали такие точки A_2 и C_2, что отрезок B_1A_2 делится высотой CC_1 пополам и пересекает высоту AA_1 в точке K, а отрезок B_1C_2 делится высотой AA_1 пополам и пересекает высоту CC_1 в точке L. Докажите, что $KL \parallel AC$.

5. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке K. Докажите, что прямая KH делит отрезок BC пополам.

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC нашлись такие точки M и N соответственно, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Докажите, что PA — биссектриса угла MPN.

7. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось, что центр окружности ω, описанной около треугольника B_1HC_1, лежит на прямой BC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается окружности ω.

source:geometry/orthocenter-g8M/1.tex

source:geometry/orthocenter-g8M/reflections.asy

source:geometry/orthocenter-g8M/altitude-bisector.asy

Добивка (ортоцентр)

1. В остроугольном треугольнике ABC отмечены ортоцентр H и середина M стороны BC. Прямая, проходящая через H и перпендикулярная HM, пересекает прямые AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что точка H — середина отрезка B_1C_1.

2. Прямая, проходящая через центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Известно, что $CP = CQ$. Докажите, что $\angle ACB = 60°$.

3. Точки U и V — проекции ортоцентра H треугольника ABC на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла A соответственно. Докажите, что прямая UV проходит через середину стороны BC.

`source:geometry/orthocenter-g8M/2.tex`

Лемма о трезубце

1. **Лемма о трезубце extended.**
   (а) Внутренняя биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную вокруг него окружность в точке W. Точка I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Доказать, что отрезки WB, WC и WI равны.
   (б) Внешняя биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную вокруг него окружность в точке N. Точки I_b и I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон AC и AB соответственно. Доказать, что отрезки BB, BC, NI_b и NI_c равны.

2. Отрезок, соединяющий середины «меньших» дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $APIQ$ — ромб, где I — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

3. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M — середина стороны AC, а точка W — середина не содержащей C дуги AB описанной окружности. Оказалось, что $\angle AIM = 90°$. В каком отношении I делит отрезок CW?

4. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Внутри треугольника выбрана точка P такая, что
   $$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$
   Докажите, что $AP \geqslant AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда P совпадает с I.

5. Через середины дуг ABC, ACB, BAC провели прямые, параллельные биссектрисам углов B, C, A соответственно. Докажите, что эти три прямые пересекаются на прямой, содержащей центры вписанной и описанной окружностей.

6. На «меньших» дугах AB и AC описанной окружности треугольника ABC отмечены точки S и T соответственно так, что $ST \parallel BC$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ASB и ATC равноудалены от середины дуги BAC.

source:geometry/arc-midpoint-g8M-2-trident.tex

Воспоминания о графах

1. Нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 3$), разбитый непересекающимися диагоналями на треугольники.

(а) Сколько диагоналей проведено?

(б) Могло ли так оказаться, что стороны и диагонали можно раскрасить в жёлтый и красный цвета так, чтобы жук мог проползти из каждой вершины в любую другую по жёлтым отрезкам, а клоп — по красным?

2. Изначально в противоположных углах шахматной доски стоят две фишки: красная и синяя. За одну операцию разрешается передвинуть любую из фишек в соседнюю по стороне пустую клетку.

(а) Можно ли из исходного расположения фишек вновь получить исходное за 1001 операцию?

(б) Можно ли серией таких операций получить ровно по одному разу все возможные расположения пары фишек на доске?

3. Из клетчатой доски, раскрашенной шахматным образом, вырезана связная по сторонам клеток фигура, содержащая n чёрных клеток.

(а) Сколько максимум у неё может быть белых клеток?

(б) У фигуры ровно $3n$ белых клеток. Докажите, что её можно разрезать на четырёхклеточные буквы «Т».

4. Какое наибольшее число клеток таблицы 20×20 можно отметить так, чтобы центры никаких трёх отмеченных клеток не являлись вершинами прямоугольного треугольника?

5. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепь, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов закрыть поверхность куба $3 \times 3 \times 3$?

6. Дано натуральное число n. На плоскости нарисовано n кругов, причём любые два круга не имеют общих внутренних точек, но могут касаться. Каково максимальное количество точек касания?

7. Поверхность кубика $5 \times 5 \times 5$ покрашена в три цвета (в чёрный и ещё в два) *правильным образом,* т. е. любые два квадратика, соседние по стороне, раскрашены в разные цвета. Какое минимальное число квадратиков могло быть покрашено в чёрный цвет?

`source:combinatorics/graph/mixture-g8M/1.tex`

Добавка к графам

1. В некоторых клетках доски 100×100 стоят фишки. Оказалось, что в объединении любой строки и любого столбца, за исключением их общей клетки, стоят хотя бы две фишки. Какое наименьшее число фишек могло быть на доске?

2. Даны различные взаимно простые натуральные числа p и q, большие 1. Есть две периодические последовательности из 0 и 1, минимальные периоды которых равны p и q соответственно. Обе последовательности без предпериодов. Определите, какое наибольшее число первых членов этих последовательностей могут совпадать.

source:combinatorics/graph/mixture-g8M/2.tex

Две модели

1. В бригаде работают 15 сварщиков различных разрядов. Разрешается выделить любую тройку сварщиков и узнать у бригадира, кто из тройки обладает высшим разрядом. За какое наименьшее число вопросов удастся гарантировано установить сварщика с
(а) максимальным; **(б)** минимальным
разрядом?

2. В центре одной из клеток поля 4×4 зарыт клад. Кот Матроскин бродит по клеткам с рацией. При каждом перемещении кота с клетки на соседнюю по стороне клетку ему по рации сообщают, приблизился он к кладу или отдалился. Голос на том конце рации либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Может ли Матроскин узнать, в какой именно клетке закопан клад?

3. **(а)** Есть 60 болельщиков: некоторые из них болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?
(б*) Та же задача, но дополнительно известно, что болельщиков разных команд поровну.

4. Имеется набор из 16 карточек. С тёмной стороны все карточки одинаковые, а на светлых сторонах карточки пронумерованы числами от 1 до 16. Маша выложила все карточки на стол тёмными сторонами вверх в виде квадрата 4×4 так, что любые две карточки с соседними числами имеют общую сторону. Можно ли так выбрать 7 карточек, что, одновременно перевернув их, можно было бы однозначно восстановить местоположение всех чисел?

5. Есть 100 гирек различных положительных весов. За одну операцию разрешается узнать суммарный вес любых двух гирек. Какое наименьшее число операций потребуется, чтобы наверняка выяснить, какая из гирек является самой тяжёлой?

6. Фальшивомонетчик изготовил 90 фальшивых монет весом 9 грамм каждая. Случайно он к ним добавил 10 настоящих монет весом по 10 грамм каждая. Все монеты перемешаны и неотличимы друг от друга. У него есть весы, на которых можно взвесить любое количество монет, но они показывают либо точный вес, либо вес, на 1 грамм больший истинного. Может ли он с помощью этих весов с гарантией найти хотя бы одну фальшивую монету?

7. Прямоугольный дачный кооператив разделён 9 горизонтальными и 9 вертикальными границами на $10 \times 10 = 100$ прямоугольных участков. Сотрудник земельного ведомства хочет вычислить площадь кооператива. За один вопрос он может выяснить у владельца одного из участков, чему равна площадь этого участка. Какого наименьшего числа вопросов ему хватит?

Игры

1. Петя и Вася играют в игру. Изначально на доске написано натуральное число n. За один ход игрок стирает текущее число на доске и записывает меньшее натуральное число, не являющееся делителем стёртого. Игроки ходят поочерёдно, начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто, из игроков, в зависимости от n, имеет выигрышную стратегию?

2. Два игрока поочерёдно закрашивают по одному единичному отрезку бесконечной клетчатой плоскости. Первый игрок красит отрезки в красный цвет, второй — в синий. Два раза красить один и тот же отрезок нельзя. Цель первого игрока — нарисовать замкнутую красную ломаную. Может ли второй игрок ему помешать?

3. Изначально в ряд выставлены 100 мешков с деньгами; на каждом мешке написано, сколько в нём денег. Два игрока ходят поочерёдно. За один ход игрок забирает себе один из мешков с краю текущего ряда. Верно ли, что при любом распределении денег по мешкам первый игрок может играть так, чтобы присвоить себе не менее половины денег?

4. На доске записано число 2023. За один ход Леди Баг приписывает справа к текущему числу на доске одну цифру, а Супер-Кот — две. Игроки ходят по очереди, начинает Леди Баг. Цель Супер-Кота — после своего хода получить число, кратное 111. Может ли Леди Баг ему помешать?

5. Пётр и Виктор по очереди подходят к доске, начинает Пётр. Он за свой ход пишет знак «+» или «−» в конец строки. Виктор своим ходом пишет в конец строки одно из натуральных чисел от 1 до 1001, не выписанное ранее. Через 1001 пару ходов Виктор получает выигрыш, равный модулю суммы, выписанной на доске. Какой наибольший выигрыш он может себе гарантировать?

source:combinatorics/game-g8M.tex

Информационные соображения

1. Имеется набор из 65 монет, среди которых ровно одна фальшивая и весит легче остальных. В нашем распоряжении есть *неуверенные двухчашечные весы,* при использовании которых можно определить, на какой из чаш груз не тяжелее, чем на противоположной (в случае равенства грузов на чашах весы могут показать на любую чашу). За какое наименьшее число взвешиваний нам гарантированно удастся найти фальшивую монету?

2. Есть двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая и легче она или тяжелее настоящей, если
(а) $k = 14$; **(б)** $k = 12$; **(в)** $k = 13$?

3. Таблица 4×4 разрезана невидимыми разрезами на доминошки. За одну операцию разрешается назвать пару соседних по стороне клеток таблица и узнать, присутствует ли такая доминошка в разрезании. За какое минимальное число операций можно гарантированно полностью восстановить исходное разрезание?

4. Даны 5 гирь разного веса. За одну операцию можно выбрать упорядоченную тройку гирь (A, B, C) и узнать, верно ли утверждение «$m(A) < m(B) < m(C)$» (где $m(X)$ обозначает вес гири X). Можно ли за 9 таких операций узнать порядок весов гирь?

5. В ряд выложены 18 визуально неразличимых деталей. Известно, что какие-то три подряд лежащие детали — бракованные, и весят по 99 г, а все остальные весят по 100 г. В нашем распоряжении есть электронные весы, на которые можно положить любой набор деталей, и они покажут суммарный вес. Как за два взвешивания выяснить, какие именно детали бракованные?

6. Есть клетчатая доска 2022×2022. Дима ставит в k клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500×1500. Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблем или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?

7. В магазине продаётся 100 дверей, пронумерованных числами от 1 до 100. Есть 100 ключей; у каждой двери свой ключ, отпирающий только эту дверь. Ключи тоже пронумерованы от 1 до 100, но с ошибками: номер любого ключа совпадает с номером открываемой им двери либо отличается на 1. За одно попытку разрешается попробовать открыть одну любую дверь одним любым ключом. За какое наименьшее число попыток можно гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает?

source:combinatorics/information-g8M-2.tex

Глава 4

8м2 (8м2)

Функция Эйлера

Определение. Для натурального n обозначим через $\varphi(n)$ количество чисел, взаимно простых с n и не превосходящих n. Функция $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера.*

0. В таблицу $a \times b$ выписаны все последовательные числа подряд начиная с 1, причем $(a, b) = 1$.

(а) Сколько в таблице чисел, взаимно простых с b?

(б) Сколько в каждом столбце чисел, взаимно простых с a?

(в) Докажите, что если a и b взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

(г) Докажите, что для $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ ($p_1, \ldots, p_k$ — различные простые) выполнено

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \ldots p_k^{\alpha_k-1} \cdot (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_k - 1) =$$
$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

1. Решите уравнение

(а) $\varphi(n) = \frac{n}{3}$; **(б)** $\varphi(n) = 10$; **(в)** $\varphi(n) = 14$.

2. **(а)** Докажите, что если $n > 2$, то число всех правильных несократимых дробей со знаменателем n — четно.

(б) Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.

3. Пусть $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ — все делители числа n. Докажите, что

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_k) = n.$$

4. Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такие, что $a_0 = 1$, $a_1 > 1$ и $a_n = \varphi(a_{n+1})$ при всех $n \geqslant 0$.

5. Между двумя единицами пишется двойка, затем между любыми двумя соседними числами пишется их сумма и т. д. Докажите, что число n в итоге будет выписано ровно $\varphi(n)$ раз.

6. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Доказать, что каждое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.

source:algebra/number-theory/euler-thereom-g8M/1-euler-function.tex

Теорема Эйлера

0. Пусть $1 = x_1 < \ldots < x_{\varphi(n)} \leqslant n$ — все остатки от деления на n, взаимно простые с n. Для взаимно простых a и n докажите, что

$$(ax_1) \cdot \ldots \cdot (ax_{\varphi(n)}) \equiv x_1 \ldots x_{\varphi(n)} \pmod{n}$$

и выведите из этого теорему Эйлера: $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

1. Найдите все такие a, что $a^{10} + 1$ делится на 10.

2. Докажите, что $n^{84} - n^4$ делится на 20400 для любого натурального n.

3. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если $(a, 561) = 1$, то выполняется сравнение $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.

4. Докажите, что $k^2 + k + 1$ не может делиться на 101 ни при каком целом k.

5. **(а)** Докажите, что при любом нечетном n число $2^{n!} - 1$ делится на n.
(б) Докажите, что при любом четном n число $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$.

6. Дано простое нечётное число p.
(а) Докажите, что каждый простой делитель числа $a^p - 1$ является делителем числа $a - 1$ или имеет вид $2pk + 1$ для некоторого k.
(б) Докажите, что каждый простой делитель числа $a^{p-1} + \ldots + a + 1$ имеет вид $2pk + 1$ для некоторого k или равен p.
(в) Докажите, что простых чисел вида $2pk + 1$ бесконечно много.

7. Докажите, что для любого n существует число с суммой цифр n, делящееся на n.

source:algebra/number-theory/euler-thereom-g8M/2-r2.tex

Показатели

Определение. Для взаимно простых a и n показателем числа a по модулю n называется наименьшее натуральное d, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

0. Пусть d — показатель a по модулю n.
(а) Докажите, что числа $a^0, a^1, a^2 \ldots, a^{d-1}$ дают разные остатки при делении на n.
(б) Пусть $a^l \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что l делится на d.
(в) Докажите, что $a^s \equiv a^r \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $s \equiv r \pmod{d}$.
(г) Докажите, что d делит $\varphi(n)$.

1. Докажите, что если $a^m \equiv 1 \pmod{k}$ и $a^n \equiv 1 \pmod{k}$, то $a^{(m,n)} \equiv 1 \pmod{k}$.

2. Найдите все такие простые p и q, что $2^p - 1$ делится на q и $2^q - 1$ делится на p.

3. Пусть $p = 3k + 2$ — простое число.
(а) Докажите, что сравнение $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$ имеет единственное решение по модулю p.
(б) Докажите, что для любого остатка a по модулю p сравнение $x^3 \equiv a \pmod{p}$ имеет единственное решение по модулю p.

4. **(а)** Пусть p — простое число и $p > 5$. Пусть n — такое натуральное число, что $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ делится на p. Докажите, что $p - 1$ делится на 5.
(б) Докажите, что среди чисел вида $5k + 1$ бесконечно много простых.

5. Докажите, что при любом натуральном n число $2^n - 1$ не делится на n.

6. Найти все натуральные n такие, что у n и $2^n + 1$ наборы простых делителей совпадают.

`source:algebra/number-theory/multiplicative-order-g8M/r2.tex`

Квадратный трёхчлен

1. Верно ли, что если $b > a + c > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня?

2. Корни уравнения $x^2 + ax + b + 1$ являются натуральными числами. Докажите, что $a^2 + b^2$ — составное число.

3. Лёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Юра стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4 и -5 в каком-то порядке. Восстановите стёртое число.

4. Учитель написал на доске квадратное уравнение $x^2+10x+20 = 0$, после чего каждый из учеников по очереди увеличивал или уменьшал на единицу либо коэффициент при x, либо слагаемое без x. В результата на доске оказалось написано уравнение $x^2 + 20x + 10 = 0$. Верно ли, что в некоторых момент на доске было написано уравнение с целыми корнями?

5. Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два различных действительных корня. Докажите, что уравнение $x^4 + ax^3 + (b - 2)x^2 - ax + 1 = 0$ имеет четыре различных действительных корня.

6. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение
$$f(2x - 3) + f(3x + 1) = 0$$
имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$.

7. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ — квадратный трехчлен, причем a, b, c — целые числа. Известно, что трехчлен $f(x)$ и многочлен $f(f(f(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что эти многочлены имеют общий целый корень.

source:algebra/polynomial/quadratic-g8M/1.tex

Квадратный трёхчлен. Добавка

8. Существует ли квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, у которого коэффициенты a, b, c и корни x_1, x_2 образуют (в некотором порядке) множество из пяти последовательных целых чисел?

9. Найдите все функции $f(x)$, определённые при всех действительных x, такие, что $f(x) + f(1-x) = x^2$.

10. Различные натуральные числа m и n таковы, что у каждого из квадратных уравнений $x^2-mx+n = 0$ и $x^2-nx+m = 0$ по два различных натуральных корня. Найдите m и n.

11. Квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что и уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет корней.

12. На оси Ox выбраны различные точки $x_1, \ldots, x_n$ (n хотя бы 3). Рассматриваются все возможные приведённые квадратные трёхчлены $f_1, \ldots, f_m$, графики которых пересекают ось Ox в этих точках и не пересекают в других точках. Докажите, что уравнение

$$f_1 + \ldots + f_m = 0$$

имеет два корня.

source:algebra/polynomial/quadratic-g8M/2.tex

График квадратного трёхчлена

1. **(а)** Сколько общих точек могут иметь две параболы, являющиеся графиками квадратных трёхчленов в одной и той же системе координат?
   (б) Через точку A параболы проведены все возможные прямые. Сколько из них имеют с параболой только одну общую точку?

2. График приведённого квадратного трёхчлена пересекает ось Ox в двух целых точках, расположенных друг от друга на расстоянии 2. Чему равен дискриминант этого трёхчлена?

3. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$.

4. Докажите, что если $c(a+b+c) < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корень.

5. Длины сторон многоугольника равны $a_1, a_2, \dots, a_n$. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + \ldots + a_n)$. Докажите, что если A — сумма длин нескольких сторон многоугольника, B — сумма длин остальных его сторон, то $f(A) = f(B)$.

6. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

7. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$, имеет положительный корень. Докажите, что уравнение $f(f(\ldots f(x)\ldots)) = x$ (2000 итераций) имеет решение.

`source:algebra/polynomial/quadratic-g8M/3-graph.tex`

Задачи про функции

1. Докажите неравенство $a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1)$.

2. Пусть a, b, c, d, e и f — некоторые числа, причем $ace \neq 0$. Известно, что значения выражений $|ax + b| + |cx + d|$ и $|ex + f|$ равны при всех значениях x. Докажите, что $ad = bc$.

3. Найдите все такие функции $f(x)$, определённые при всех $x \neq 1$, удовлетворяющие соотношению

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x\,.$$

4. Два приведённых квадратных трёхчлена $P(x)$ и $Q(x)$ подобраны так, что уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ не имеет корней. Могут ли эти трёхчлены иметь одинаковые свободные члены?

5. Дан квадратный трехчлен $P(x) = x^2 + px + q$ с вещественными коэффициентами. Известно, что $P(x)$ имеет два корня, оба его корня меньше -1, а модуль разности между корнями меньше 2. Докажите, что $P(P(x)) > 0$ для всех x.

source:algebra/mixture-g8M-functions.tex

Вписанные углы. Счет дуг

Утверждение о центральном угле. Центральный угол в два раза больше вписанного.

Утверждение о вписанных углах. Углы, опирающиеся на равные дуги, равны.

Важный факт. Пусть точки A, B, C, D лежат на окружности Ω (именно в таком порядке!). Тогда угол между прямыми AC и BD равен полусумме мер дуг AB и CD, угол между прямыми AB CD равен полуразности дуг AB и CD.

1. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Доказать, что $\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$.

2. Точки M и N — середины «меньшей» и «большей» дуг BC описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC соответственно. Докажите, что прямая AM — биссектриса угла BAC, а прямая AN — биссектриса внешнего угла BAC.

3. Треугольник ABC вписан в окружность ω. Биссектрисы углов B и C пересекают ω в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что отрезок B_1C_1 отсекает от треугольника ABC равнобедренный треугольник.

4. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle APB = \angle AOB$.

5. В окружности ω проведена хорда AB, на которой отмечена точка K. Окружность, проходящая через точки O, A и K, вторично пересекает ω в точке X. Доказать, что треугольник BKX равнобедренный.

6. Точка D — отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно стороны BC. Отрезки BD и CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q соответственно. Докажите, что AD — биссектриса угла PAQ.

7. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка T, что
$$\angle BTC = \angle BAC + 60^\circ\,, \quad \angle CTA = \angle CBA + 60^\circ\,, \quad \angle ATB = \angle ACB + 60^\circ\,.$$
Лучи AT, BT, CT продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что полученные точки пересечения образуют равносторонний треугольник.

8. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Противоположные стороны AB и CD при продолжении пересекаются в точке K, стороны BC и AD — в точке L. Докажите, что биссектрисы углов BKC и BLA перпендикулярны.

9. В треугольнике ABC ($AB < AC$) проведена биссектриса AL. Перпендикуляр из точки L на прямую AC пересекает «меньшую» дугу AC описанной окружности Ω треугольника ABC в точке D. Перпендикуляр из точки A на прямую BD пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что точки D, K и середина «меньшей» дуги BC окружности Ω лежат на одной прямой.

source:geometry/inscribed-angles-g8M/1-arc.tex

Вписанные углы и четырехугольники

1. Точка K — середина *«меньшей»* дуги AB вписанного четырехугольника $ABCD$. Хорды CK и AB пересекаются в точке P, хорды DK и AB пересекаются в точке Q. Доказать, что четырехугольник $CPQD$ вписанный.

2. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены лучи, образующие между собой угол 45°. Один из них пересекает диагональ BD в точке M, другой — сторону CD в точке N. Найти величину угла AMN.

3. В остроугольном треугольнике ABC с углом $\angle A = 60°$ отмечены точки H, I, O — ортоцентр и центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника HIO проходит через вершину B.

4. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD. На отрезке AB взяли точку M так, что $AM = AC$, а на отрезке CD — точку N так, что $DN = DB$. Докажите, что если точки M и N не совпадают, то прямая MN параллельна прямой AD.

5. В окружность вписан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AE = DE$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. На продолжении стороны AB за точку A отмечена такая точка Q, что $AQ = DP$. На продолжении стороны DC за точку D отмечена такая точка R, что $DR = AP$. Докажите, что $PE \perp QR$.

6. На описанной окружности ω треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Точки P и Q на окружности ω таковы, что $CP \perp AM$, $CQ \perp BM$. Доказать, что $PB \parallel QA$.

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC — точки N и M соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K — точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

source:geometry/inscribed-angles-g8M/2-quadrilateral.tex

Вписанные прямые углы

1. На высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка D. Пусть P и Q — проекции точки D на прямые AB и AC соответственно. Докажите, что точки B, C, P и Q лежат на одной окружности.
2. AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. W — точка, симметричная A_1 относительно стороны AC. Докажите, что B_1, C_1 и W лежат на одной прямой.
3. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка E — центр описанной окружности треугольника BHC. Докажите, что $EH \perp B_1C_1$.
4. Докажите, что четыре проекции основания A_1 высоты AA_1 остроугольного треугольника ABC на стороны AB, AC и на высоты BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.
5. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC, P и Q — проекции точки A_1 на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что прямая PQ делит отрезок A_1B_1 пополам.
6. Докажите, что в любом остроугольном треугольнике середины двух высот, основание третьей и ортоцентр лежат на одной окружности.
7. Точка M — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC. Точка P такова, что прямые PA и BC параллельны. Точки X и Y выбраны на продолжениях PB и PC за точки B и C соответственно так, что $\angle PXM = \angle PYM$. Докажите, что четырехугольник $APXY$ вписан.

source:geometry/inscribed-angles-g8M/3-right-angle.tex

Про биссектрисы и серперы

1. В треугольнике ABC точка I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABI_a лежит на описанной окружности треугольника ABC.

2. Биссектриса внешнего угла A треугольника ABC ($AB < AC$) пересекает его описанную окружность в точке N. Точка X — проекция N на сторону AC. Докажите, что $AB + AX = XC$.

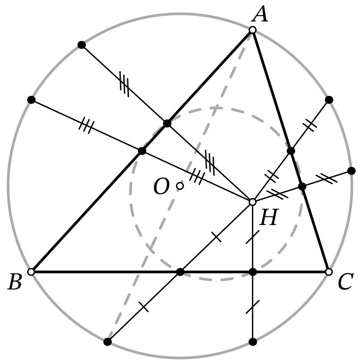
3. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такова, что $AB = BD$. На стороне AB нашлась такая точка K, что $CK = CD$. Докажите, что четырехугольник $BCDK$ можно вписать в окружность.

4. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка P, что выполняются равенства
$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC\,.$$
Докажите, что внутренние биссектрисы углов $\angle ADP$ и $\angle BCP$ и серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекаются в одной точке.

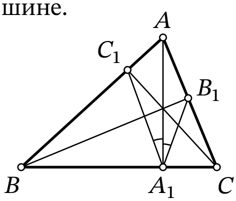
5. Окружность Ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне AC — точка E так, что $BC \parallel DE$. Точки P и Q на «меньшей» дуге BC окружности Ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QB и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XAY + \angle PAQ = 180°$.

`source:geometry/arc-midpoint-g8M-1.tex`

Ортоцентр и ортотреугольник



1. **Отражение ортоцентра.**
   (а) Ортоцентр треугольника отразили относительно одной из его сторон. Докажите, что полученная точка попала на описанную окружность треугольника.
   (б) Ортоцентр треугольника отразили относительно середины одной из его сторон. Докажите, что полученная точка попала на описанную окружность треугольника и диаметрально противоположна одной лежащей напротив вершине.

2. 

   Высоты треугольника — это биссектрисы ортотреугольника.
   Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что A_1A — биссектриса треугольника $A_1B_1C_1$.

3. Внимательно посмотрите на картинки выше и докажите, что
   (а) радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC и AHC, равны между собой.
   (б) расстояние от вершины A до ортоцентра вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до стороны BC.
   (в) $\angle BAO = \angle CAH$.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. На отрезке A_1C_1 выбрали такие точки A_2 и C_2, что отрезок B_1A_2 делится высотой CC_1 пополам и пересекает высоту AA_1 в точке K, а отрезок B_1C_2 делится высотой AA_1 пополам и пересекает высоту CC_1 в точке L. Докажите, что $KL \parallel AC$.

5. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке K. Докажите, что прямая KH делит отрезок BC пополам.

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC нашлись такие точки M и N соответственно, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Докажите, что PA — биссектриса угла MPN.

7. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось, что центр окружности ω, описанной около треугольника B_1HC_1, лежит на прямой BC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается окружности ω.

source:geometry/orthocenter-g8M/1.tex

source:geometry/orthocenter-g8M/reflections.asy

source:geometry/orthocenter-g8M/altitude-bisector.asy

Добивка (ортоцентр)

1. В остроугольном треугольнике ABC отмечены ортоцентр H и середина M стороны BC. Прямая, проходящая через H и перпендикулярная HM, пересекает прямые AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что точка H — середина отрезка B_1C_1.

2. Прямая, проходящая через центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Известно, что $CP = CQ$. Докажите, что $\angle ACB = 60°$.

3. Точки U и V — проекции ортоцентра H треугольника ABC на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла A соответственно. Докажите, что прямая UV проходит через середину стороны BC.

source:geometry/orthocenter-g8M/2.tex

Лемма о трезубце

1. **Лемма о трезубце extended.**
(а) Внутренняя биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную вокруг него окружность в точке W. Точка I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Доказать, что отрезки WB, WC и WI равны.
(б) Внешняя биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную вокруг него окружность в точке N. Точки I_b и I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон AC и AB соответственно. Доказать, что отрезки BB, BC, NI_b и NI_c равны.

2. Отрезок, соединяющий середины «меньших» дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $APIQ$ — ромб, где I — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

3. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M — середина стороны AC, а точка W — середина не содержащей C дуги AB описанной окружности. Оказалось, что $\angle AIM = 90°$. В каком отношении I делит отрезок CW?

4. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Внутри треугольника выбрана точка P такая, что
$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$
Докажите, что $AP \geqslant AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда P совпадает с I.

5. Через середины дуг ABC, ACB, BAC провели прямые, параллельные биссектрисам углов B, C, A соответственно. Докажите, что эти три прямые пересекаются на прямой, содержащей центры вписанной и описанной окружностей.

6. На «меньших» дугах AB и AC описанной окружности треугольника ABC отмечены точки S и T соответственно так, что $ST \parallel BC$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ASB и ATC равноудалены от середины дуги BAC.

source:geometry/arc-midpoint-g8M-2-trident.tex

Воспоминания о графах

1. Нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 3$), разбитый непересекающимися диагоналями на треугольники.
(а) Сколько диагоналей проведено?
(б) Могло ли так оказаться, что стороны и диагонали можно раскрасить в жёлтый и красный цвета так, чтобы жук мог проползти из каждой вершины в любую другую по жёлтым отрезкам, а клоп — по красным?

2. Изначально в противоположных углах шахматной доски стоят две фишки: красная и синяя. За одну операцию разрешается передвинуть любую из фишек в соседнюю по стороне пустую клетку.
(а) Можно ли из исходного расположения фишек вновь получить исходное за 1001 операцию?
(б) Можно ли серией таких операций получить ровно по одному разу все возможные расположения пары фишек на доске?

3. Из клетчатой доски, раскрашенной шахматным образом, вырезана связная по сторонам клеток фигура, содержащая n чёрных клеток.
(а) Сколько максимум у неё может быть белых клеток?
(б) У фигуры ровно $3n$ белых клеток. Докажите, что её можно разрезать на четырёхклеточные буквы «Т».

4. Какое наибольшее число клеток таблицы 20×20 можно отметить так, чтобы центры никаких трёх отмеченных клеток не являлись вершинами прямоугольного треугольника?

5. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепь, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов закрыть поверхность куба $3 \times 3 \times 3$?

6. Дано натуральное число n. На плоскости нарисовано n кругов, причём любые два круга не имеют общих внутренних точек, но могут касаться. Каково максимальное количество точек касания?

7. Поверхность кубика $5 \times 5 \times 5$ покрашена в три цвета (в чёрный и ещё в два) *правильным образом,* т. е. любые два квадратика, соседние по стороне, раскрашены в разные цвета. Какое минимальное число квадратиков могло быть покрашено в чёрный цвет?

source:combinatorics/graph/mixture-g8M/1.tex

Добавка к графам

1. В некоторых клетках доски 100×100 стоят фишки. Оказалось, что в объединении любой строки и любого столбца, за исключением их общей клетки, стоят хотя бы две фишки. Какое наименьшее число фишек могло быть на доске?

2. Даны различные взаимно простые натуральные числа p и q, большие 1. Есть две периодические последовательности из 0 и 1, минимальные периоды которых равны p и q соответственно. Обе последовательности без предпериодов. Определите, какое наибольшее число первых членов этих последовательностей могут совпадать.

source:combinatorics/graph/mixture-g8M/2.tex

Две модели

1. В бригаде работают 15 сварщиков различных разрядов. Разрешается выделить любую тройку сварщиков и узнать у бригадира, кто из тройки обладает высшим разрядом. За какое наименьшее число вопросов удастся гарантировано установить сварщика с
(а) максимальным; **(б)** минимальным
разрядом?

2. В центре одной из клеток поля 4×4 зарыт клад. Кот Матроскин бродит по клеткам с рацией. При каждом перемещении кота с клетки на соседнюю по стороне клетку ему по рации сообщают, приблизился он к кладу или отдалился. Голос на том конце рации либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Может ли Матроскин узнать, в какой именно клетке закопан клад?

3. **(а)** Есть 60 болельщиков: некоторые из них болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?
(б*) Та же задача, но дополнительно известно, что болельщиков разных команд поровну.

4. Имеется набор из 16 карточек. С тёмной стороны все карточки одинаковые, а на светлых сторонах карточки пронумерованы числами от 1 до 16. Маша выложила все карточки на стол тёмными сторонами вверх в виде квадрата 4×4 так, что любые две карточки с соседними числами имеют общую сторону. Можно ли так выбрать 7 карточек, что, одновременно перевернув их, можно было бы однозначно восстановить местоположение всех чисел?

5. Есть 100 гирек различных положительных весов. За одну операцию разрешается узнать суммарный вес любых двух гирек. Какое наименьшее число операций потребуется, чтобы наверняка выяснить, какая из гирек является самой тяжёлой?

6. Фальшивомонетчик изготовил 90 фальшивых монет весом 9 грамм каждая. Случайно он к ним добавил 10 настоящих монет весом по 10 грамм каждая. Все монеты перемешаны и неотличимы друг от друга. У него есть весы, на которых можно взвесить любое количество монет, но они показывают либо точный вес, либо вес, на 1 грамм больший истинного. Может ли он с помощью этих весов с гарантией найти хотя бы одну фальшивую монету?

7. Прямоугольный дачный кооператив разделён 9 горизонтальными и 9 вертикальными границами на $10 \times 10 = 100$ прямоугольных участков. Сотрудник земельного ведомства хочет вычислить площадь кооператива. За один вопрос он может выяснить у владельца одного из участков, чему равна площадь этого участка. Какого наименьшего числа вопросов ему хватит?

Игры

1. Петя и Вася играют в игру. Изначально на доске написано натуральное число n. За один ход игрок стирает текущее число на доске и записывает меньшее натуральное число, не являющееся делителем стёртого. Игроки ходят поочерёдно, начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто, из игроков, в зависимости от n, имеет выигрышную стратегию?

2. Два игрока поочерёдно закрашивают по одному единичному отрезку бесконечной клетчатой плоскости. Первый игрок красит отрезки в красный цвет, второй — в синий. Два раза красить один и тот же отрезок нельзя. Цель первого игрока — нарисовать замкнутую красную ломаную. Может ли второй игрок ему помешать?

3. Изначально в ряд выставлены 100 мешков с деньгами; на каждом мешке написано, сколько в нём денег. Два игрока ходят поочерёдно. За один ход игрок забирает себе один из мешков с краю текущего ряда. Верно ли, что при любом распределении денег по мешкам первый игрок может играть так, чтобы присвоить себе не менее половины денег?

4. На доске записано число 2023. За один ход Леди Баг приписывает справа к текущему числу на доске одну цифру, а Супер-Кот — две. Игроки ходят по очереди, начинает Леди Баг. Цель Супер-Кота — после своего хода получить число, кратное 111. Может ли Леди Баг ему помешать?

5. Пётр и Виктор по очереди подходят к доске, начинает Пётр. Он за свой ход пишет знак «+» или «−» в конец строки. Виктор своим ходом пишет в конец строки одно из натуральных чисел от 1 до 1001, не выписанное ранее. Через 1001 пару ходов Виктор получает выигрыш, равный модулю суммы, выписанной на доске. Какой наибольший выигрыш он может себе гарантировать?

source:combinatorics/game-g8M.tex

Информационные соображения

1. Имеется набор из 65 монет, среди которых ровно одна фальшивая и весит легче остальных. В нашем распоряжении есть *неуверенные двухчашечные весы,* при использовании которых можно определить, на какой из чаш груз не тяжелее, чем на противоположной (в случае равенства грузов на чашах весы могут показать на любую чашу). За какое наименьшее число взвешиваний нам гарантированно удастся найти фальшивую монету?

2. Есть двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая и легче она или тяжелее настоящей, если
(а) $k = 14$; **(б)** $k = 12$; **(в)** $k = 13$?

3. Таблица 4×4 разрезана невидимыми разрезами на доминошки. За одну операцию разрешается назвать пару соседних по стороне клеток таблица и узнать, присутствует ли такая доминошка в разрезании. За какое минимальное число операций можно гарантированно полностью восстановить исходное разрезание?

4. Даны 5 гирь разного веса. За одну операцию можно выбрать упорядоченную тройку гирь (A, B, C) и узнать, верно ли утверждение «$m(A) < m(B) < m(C)$» (где $m(X)$ обозначает вес гири X). Можно ли за 9 таких операций узнать порядок весов гирь?

5. В ряд выложены 18 визуально неразличимых деталей. Известно, что какие-то три подряд лежащие детали — бракованные, и весят по 99 г, а все остальные весят по 100 г. В нашем распоряжении есть электронные весы, на которые можно положить любой набор деталей, и они покажут суммарный вес. Как за два взвешивания выяснить, какие именно детали бракованные?

6. Есть клетчатая доска 2022×2022. Дима ставит в k клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500×1500. Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблем или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?

7. В магазине продаётся 100 дверей, пронумерованных числами от 1 до 100. Есть 100 ключей; у каждой двери свой ключ, отпирающий только эту дверь. Ключи тоже пронумерованы от 1 до 100, но с ошибками: номер любого ключа совпадает с номером открываемой им двери либо отличается на 1. За одно попытку разрешается попробовать открыть одну любую дверь одним любым ключом. За какое наименьшее число попыток можно гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает?

source:combinatorics/information-g8M-2.tex