$$\int\limits_{\text{01 июня 2017}}^{\text{14 июня 2017}} \left(\begin{array}{c} \text{Московские сборы} \\ \text{секция математики} \end{array} \right) \mathrm{d}t$$

Немного о структуре

Материалы разбиты по группам, в пределах каждой группы отсортированы по темам:

- *тренировочные олимпиады;*
- алгебра;
- геометрия;
- комбинаторика;

Материалы, общие для нескольких групп, дублируются. Все материалы сопровождаются ссылками на исходные файлы LaTeX.

`source:integral.tex`

Оглавление

Глава 1

8-1

Устная вступительная олимпиада

Довывод

1. Можно ли шахматную доску 8×8 разрезать на 15 горизонтальных и 17 вертикальных доминошек?

2. Петя перемножил все нечётные натуральные числа, меньшие 1000. Какая цифра стоит в произведении в разряде десятков?

3. Две дворовые команды играют в футбол до 10 голов (игра прекращается, когда одна из команд забьёт 10 голов). В процессе игры ведётся протокол, в который вносится счёт после каждого гола. Сколько различных протоколов может получиться?

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы углов B и C. Основания перпенидикуляров, опущенных из вершины A на эти биссектрисы, обозначены P и Q. Докажите, что PQ и BC параллельны.

5. Андрей и Борис играют в следующую игру: они по очереди проводят прямые плоскости, проходящие через фиксированную точку S. Запрещается проводить одну и ту же прямую два раза. Проигрывает тот, после чьего хода угол между какими-то из проведённых прямых окажется меньше $1°$. Первым ходит Андрей. Может ли кто-либо из игроков обеспечить себе победу вне зависимости от игры соперника? Если да, то кто?

source:olympiad/intro-g8/1.tex

Вывод

6. Натуральные числа от 1 до 100 раскрасили в три цвета. Докажите, что найдутся два одноцветных числа, разность между которыми является квадратом натурального числа.

7. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки M и N (N между M и B) такие, что $\angle MCN = 45°$. Докажите, что $MN^2 = AM^2 + NB^2$.

8. На острове Кокос проживает 2017 аборигенов, каждый из которых либо всегда говорит правду (рыцарь), либо всегда обманывает (лжец), причем не все из них лжецы. Путешественник хочет узнать количество рыцарей на этом острове. Ему разрешено один раз в день собирать на берегу любую группу островитян, каждый из которых назовет количество рыцарей среди собравшихся. За какое наименьшее число дней путешественник сможет выяснить точное число рыцарей?

source:olympiad/intro-g8/2.tex

Послевывод

9. Дан треугольник ABC, у которого $\angle A = 60°$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. На стороне AB отмечена такая точка X, что $AX = IX$. Пусть P — точка на стороне BC со свойством $2BP = CP$. Докажите, что $\angle ABC = 2\angle BXP$.

10. В Графландии 60 городов, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно покрасить четыре города в красный цвет, а другие четыре — в зеленый так, чтобы каждая дорога, соединяющая красный город с зеленым, была направлена от красного к зеленому.

source:olympiad/intro-g8/3.tex

НОД и НОК

Пусть a и b — два целых числа, не равные одновременно нулю. Рассмотрим все числа, на которые делятся и a и b одновременно, т. е. все общие делители a и b. Выберем из них наибольший и назовем его *наибольшим общим делителем*. Будем обозначать наибольший общий делитель чисел a и b через $\text{НОД}(a, b)$ или, для краткости, (a, b). Наименьшим общим кратным чисел a и b ($\text{НОК}(a, b)$ или, для краткости, $[a, b]$) называется наименьшее натуральное число, которое делится на a и b.

Аналогично определяется НОД и НОК трех и более чисел. Например, пусть даны n чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — это наибольшее число, на которое делится каждое из данных n чисел.

Если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то числа a и b называются *взаимно простыми*.

1. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство $ab = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b)$.

2. Верно ли равенство $abc = \text{НОД}(a, b, c) \cdot \text{НОК}(a, b, c)$?

3. Известно, что $\text{НОД}(a, b, c) = 1$. Верно ли, что среди трех чисел a, b, c найдутся два таких, что их НОД равен 1?

4. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел a и b, если известно, что $ab = 6000$?

5. a и b — натуральные числа. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.

6. Замените знаки ? в выражении подходящими буквами (Д или К) и докажите получившееся равенство:

$$\text{НО?}(a, b) \cdot \text{НО?}(b, c) \cdot \text{НО?}(c, a) = \frac{abc \cdot \text{НО?}(a, b, c)}{\text{НО?}(a, b, c)}.$$

7. a, b, c — натуральные числа, $\text{НОД}(a, b, c) = 1$ и $\frac{ab}{a-b} = c$. Докажите, что $a - b$ является точным квадратом.

8. Пусть a, b и c — попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число целое.

9. Найдите все такие пары натуральных чисел (x, y), что оба числа $x^3 + y$ и $y^3 + x$ делятся на $x^2 + y^2$.

10. Последовательность натуральных чисел a_i такова, что $\text{НОД}(a_i, a_j) = \text{НОД}(i, j)$ для всех $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для всех натуральных i.

source:algebra/number-theory/GCD-and-LCM-g8/r1.tex

Алгоритм Евклида

НОД(a, b) = НОД$(a, b - a)$.

Алгоритм Евклида — правило, которое позволяет по двум натуральным числам a и b найти НОД(a, b). Если имеются два натуральных числа $a > b > 0$, то сначала делим a на b, и получаем остаток r_1, который меньше, чем b. Затем делим число b на r_1, находим остаток r_2, который меньше, чем r_1. Далее делим число r_1 на r_2, находим остаток r_3, меньший, чем r_2, и так далее. Указанный процесс обязательно закончится, поскольку каждый следующий остаток меньше предыдущего, а все остатки — неотрицательные числа. В конце концов какой-то остаток r_{n-1} разделится на остаток r_n нацело, без остатка. Последний остаток r_n и есть НОД(a, b), так как

$$r_n = \text{НОД}(r_n, r_{n-1}) = \text{НОД}(r_{n-1}, r_{n-2}) = \ldots = \text{НОД}(r_2, r_1) = \text{НОД}(r_1, b) = \text{НОД}(b, a).$$

1. На доске написаны числа 24 и 36. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число — разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

2. Найдите НОД всех чисел, в записи каждого из которых все цифры $1, 2, \ldots, 9$ использованы по одному разу.

3. Найдите НОД$(11\ldots1, 11\ldots1)$, где в первом числе n единиц, а во втором m.

4. Докажите, что НОД$(a^m - 1, a^n - 1) = a^d - 1$, где d = НОД(m, n).

5. **(a)** Найдите НОД двух чисел Ферма $2^{2^n} + 1$ и $2^{2^m} + 1$. (Докажите, что число $2^{2^n} - 1$ имеет хотя бы n различных простых делителей.)
(b) Найдите НОД двух чисел Фибоначчи F_n и F_m.

6. Функция $f(a, b)$, определенная для всех натуральных a и b, обладает следующими тремя свойствами:
(1) $f(a, a) = a$;
(2) $f(a, b) = f(b, a)$;
(3) $(a + b) \cdot f(a, b) = b \cdot f(a, a + b)$.
Докажите, что $f(a, b)$ = НОК(a, b).

7. Пусть a, b, c — натуральные числа. Могут ли НОК(a, b) и НОК$(a + c, b + c)$ быть равны?

8. На доске написаны натуральные числа $a_1, \ldots, a_k$ такие, что НОД$(a_1, \ldots, a_k) = 1$. Разрешается взять два числа и из большего вычесть меньшее. Докажите, что такими операциями можно получить число 1.

9. На доске написаны два различных натуральных числа a и b. Меньшее из них стирают, и вместо него пишут число $\frac{ab}{|a-b|}$ (которое может уже оказаться нецелым). С полученной парой чисел делают ту же операцию и т. д. Докажите, что в некоторый момент на доске окажутся два равных натуральных числа.

10. Аня нашла себе интересное занятие. Она написала на доске две единички, потом между ними написала их сумму. Ее это так захватило, что она продолжила: брала ряд чисел, который у нее получился на предыдущем шаге, и между двумя соседними числами писала их сумму (старые числа при этом не стирала). Сколько раз она выписала произвольное число n?

source:algebra/number-theory/euclid-algorithm-g8/r1.tex

Линейное представление НОД

1. *Линейное представление НОД.*
(a) Докажите, что для любых двух натуральных чисел a, b существуют целые числа x, y такие, что $ax + by = (a, b)$. Как можно получить такие x, y и сколько существует таких пар чисел?
(b) Докажите, что для любого набора натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n найдутся целые числа x_1, x_2, ..., x_n такие, что $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

2. У Пети есть уголок с углом 82°. Сколько раз ему нужно воспользоваться этим уголком, чтобы нарисовать угол в 2°?

3. В банке 500 долларов. Разрешаются две операции: взять из банка 300 долларов или положить в него 198 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банка и как это сделать?

4. На острове Мумбо-Юмбо есть монеты достоинством в 252, 315 и 350 тугриков. Какую наименьшую сумму можно оплатить на этом острове, если в любом магазине на сдачу есть неограниченное число монет. Какое наименьшее число монет может участвовать в оплате этой суммы?

5. В классе химии имеются 25 пробирок объема 1, 2, ..., 25 мл. Когда химики стали собираться на летнюю практику, оказалось, что у них осталось мало места, и они могут взять только набор из 10 пробирок. Химики хотят, чтобы с помощью любых двух пробирок из набора можно было отмерить 1 мл. Сколькими способами можно составить такой набор?

6. У ресторана, где проводится торжественный вечер, есть столы на 12 и на 7 человек. На торжественный вечер организаторы хотят пригласить лучших работников, однако помимо работников на этот вечер хочет прийти неизвестное число гостей из городской администрации. По соображениям безопасности, все столы, использованные для вечера должны быть заняты полностью. Какое наименьшее число работников должны пригласить организаторы, чтобы независимо от количества людей из администрации вечер не сорвался?

7. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явились 28 членов профсоюза и 37 не членов, причём Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну — не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?

8. Бильярдный стол имеет форму прямоугольника $m \times n$, в углах которого расположены лунки. Из левого нижнего угла выпускают шар под углом 45° к сторонам стола.
(a) Сколько раз шарик ударится о края стола прежде чем упасть в лунку?
(b) Через какие точки стола пролетит шар прежде чем упасть в лунку?

Натуральные уравнения

1. *Задача о размене монет.* Пусть в некоторой стране есть монеты достоинством a и b тугриков, где a и b взаимно просты. Докажите, что:

(a) любую сумму, не меньшую, чем $(a-1)(b-1)$ тугриков, можно заплатить без сдачи;

(b) если x тугриков можно заплатить без сдачи, то $ab-a-b-x$ тугриков заплатить без сдачи нельзя;

(c) если $x<(a-1)(b-1)$ тугриков нельзя заплатить без сдачи, то $ab-a-b-x$ — можно.

(d) Не пользуясь соображениями двух предыдущих пунктов докажите, что сумм, которые меньше, чем $(a-1)(b-1)$ и которые можно заплатить без сдачи, ровно $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$.

2. При каких N уравнение $5x+8y=N$ имеет 6 решений в натуральных числах?

3. При каком наибольшем N уравнение $99x+100y+101z=N$ имеет единственное решение в натуральных числах x, y, z?

4. При каком наименьшем n квадрат $n\times n$ можно разрезать на квадраты 40×40 и 49×49 так, чтобы квадраты обоих видов присутствовали?

source:algebra/number-theory/diophantine-equation-g8/r1.tex

Китайская теорема об остатках

1. Найдите остаток от деления натурального числа на 30, если при делении на 15 оно дает остаток 7, а при делении на 6 остаток 4.

2. Пусть a и b — взаимно простые числа, а m и n дают одинаковые остатки при делении на a и при делении на b. Докажите, что $m - n$ делится на ab.

3. У генерала не более 5000 солдат. Сначала он пытался построить их в две равные шеренги, но ему не хватило одного солдата. Потом он пытался сделать тоже самое для трех, четырех, ..., десяти шеренг и все время у него не хватало одного солдата. Докажите, что он сможет построить солдат в 11 равных шеренг.

4. **(a)** Лев загадал число от 0 до 60 и сказал, что при делении на 5 оно даёт остаток 3, при делении на 4 даёт 2 и делится на 3. Денис Владимирович уверен, что точно знает загаданное число. Прав ли он?
(b) А если задумано число от 1 до 180?

5. **Китайская теорема об остатках (КТО).** Пусть $m_1, m_2, ..., m_n$ — попарно взаимно простые числа. Тогда для любых целых $r_1, r_2, \ldots, r_n$ существует натуральное x такое, что

$$x \equiv_{m_1} r_1, \quad x \equiv_{m_2} r_2, \quad \ldots, \quad x \equiv_{m_n} r_n.$$

Более того, среди чисел, не превосходящих $m_1 m_2 \ldots m_n$, такое число единственно.
(a) Докажите КТО для $n = 2$.
(b) Докажите КТО для произвольного n методом математической индукции.
(c) Пусть x и y дают одинаковые остатки при делении на $m_1, ..., m_n$. Докажите, что $x - y \vdots m_1 m_2 \ldots m_n$ и выведите отсюда КТО.
(d) С помощью линейного представления НОД докажите, что такое x существует при $r_1 = 1, r_2 = 0, r_3 = 0, ..., r_n = 0$. Используя это соображение, докажите КТО.
(e) С помощью функции Эйлера найдите какое-нибудь x, дающее остаток 1 при делении на m_1 и остаток 0 при делении на $m_2, m_3, ..., m_n$. Докажите КТО.

6. Попробуем избавится от условия взаимной простоты в условии КТО. Пусть есть натуральные $m_1, ..., m_n$, и для любых i, j есть x такое, что $x \equiv_{m_i} r_i$ и $x \equiv_{m_j} r_j$. Докажите, что тогда утверждение КТО выполнено.

7. Пусть для натуральных $m_1, ..., m_n$, и целых $r_1, \ldots, r_n$ нашлось натуральное x такое, что

$$x \equiv_{m_1} r_1, \quad x \equiv_{m_2} r_2, \quad \ldots, \quad x \equiv_{m_n} r_n.$$

А сколько существует таких x среди чисел от 1 до $m_1 m_2 \ldots m_n$?

8. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — попарно взаимно простые числа. Тогда для любых целых $r_1, r_2, \ldots, r_n$ существует натуральное x такое, что

$$x + 1 \equiv_{m_1} r_1, \quad x + 2 \equiv_{m_2} r_2, \quad \ldots, \quad x + n \equiv_{m_n} r_n.$$

9. Существует ли в сутках момент, когда расположенные на общей оси часовая, минутная и секундная стрелки правильно идущих часов образуют попарно углы в 120°?

source:algebra/number-theory/chinese-remainder-theorem-g8.tex

Неравенство средних

1. Пусть $x > 0$. Докажите, что верно $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

2. Что больше: $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ или $2\sqrt{n}$?

3. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше четырех.

4. При каких x дробь $\frac{81+16x^4}{x^2}$ принимает наименьшее значение?

5. Пусть $x + y = 1$. Докажите, что $x^8 + y^8 \geqslant \frac{1}{128}$.

6. Для положительных a, b докажите, что

$$2a^2 + \frac{b}{a} \geqslant \frac{8a^2b}{2a^3 + b}\,.$$

7. Решите уравнение $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

8. Докажите, что для положительных x, y, z верно неравенство

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz\,.$$

9. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9\,.$$

10. Докажите, что среди прямоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет квадрат.

11. Теплоход прошел путь от пункта A до пункта B и обратно. Докажите, что собственная скорость теплохода больше, чем средняя скорость этого движения.

12. У продавца есть чашечные весы с неравными плечами и гири. Сначала он взвешивает товар на одной чашке, затем — на другой и берет среднее арифметическое двух показаний. Определите, в чью пользу такое «взвешивание»: продавца или покупателя?

13. Пусть a, b, c и d такие положительные числа, что $ab = 1$ и $ac + bd = 2$. Докажите, что $cd \leqslant 1$.

14. Для положительных x, y докажите, что

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{xy}\,.$$

source:algebra/inequality/mean-g8.tex

Индукция в неравенствах

1. Докажите, что есть такое n, что $1{,}001^n \geqslant 2017$.

2. Определим L_n как $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Докажите, что $L_n \geqslant 2\sqrt{n+3} - 3$.

3. Определим гармонический ряд H_n как $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Докажите, что найдется такой n, что $H_n \geqslant 2017$.

4. Положим величину T_n равной $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)$. Докажите, что $T_n \geqslant \sqrt{2n+1}$.

5. Положим величину S_n равной $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$.
(a) Докажите, что $S_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.
(b) Докажите, что $S_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$.

6. Сформулируем неравенство средних для n переменных:
для любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ верно:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

(a) Докажите неравенство, когда n — степень двойки.
(b) Докажите, что если неравенство верно для любых n переменных, то оно верно и для любых $n-1$ переменных.
(c) Докажите, что неравенство выполнено для любых n переменных.

7. Докажите, что для любого n выполнено неравенство
(a) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} < 1$;
(b) $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < 2$.

source:algebra/inequality/induction-g8/r1.tex

Винегрет из неравенств

1. **(a)** Разложите $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ на множители.
(b) Из предыдущего пункта выведите, что если a, b, c неотрицательные, то верно неравенство $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$.

2. Натуральные a, b, c таковы, что $a + b + c = 100$. Какое наибольшее значение может принимать величина $ab + bc + ca$?

3. *(Неравенство Несбитта)* Для положительных a, b, c докажите, что верно

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

4. Известно, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$. Докажите, что
(a) $a^2b + b^2c + c^2a \geqslant ab^2 + bc^2 + ca^2$;
(b) $a^3b + b^3c + c^3a \geqslant ab^3 + bc^3 + ca^3$.

source:algebra/inequality/mixture-g8.tex

Центральная симметрия

1. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A'B'C'$ равны стороны $BA = B'A'$ и $BC = B'C'$ и медианы $BM = B'M'$, то эти треугольники равны.

2. В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение медианы BM к стороне BC.

3. В треугольнике ABC точка M — середина AC. На стороне BC взяли точку K так, что угол BMK прямой. Оказалось, что $BK = AB$. Найдите $\angle MBC$, если $\angle ABC = 110°$.

4. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол MKN — прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

5. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC и CD равны, M — середина стороны AD. Известно, что угол BMC равен $90°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

7. В центре квадратного пруда плавает ученик. Внезапно к вершине квадрата подошёл учитель. Учитель не умеет плавать, но бегает в 4 раза быстрее, чем ученик плавает. Ученик бегает быстрее. Сможет ли он убежать?

8. Даны выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка O внутри его. Докажите, что через точку O нельзя провести более n прямых, каждая из которых делит площадь n-угольника пополам.

source:geometry/point-reflection-g8/r1.tex

Крутой поворот

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABK и BCL. Докажите, что отрезки AL и KC имеют одинаковую длину и найдите угол между ними.

2. Внутри квадрата $ABCD$ дана точка P. Докажите, что прямая, проходящая через точку A перпендикулярно BP, прямая, проходящая через точку B перпендикулярно CP, прямая, проходящая через точку C перпендикулярно DP, и прямая, проходящая через точку D перпендикулярно AP, пересекаются в одной точке.

3. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

4. На сторонах AB и BC дельтоида $ABCD$ ($AB = AD$, $CB = CD$) построены правильные треугольники ABE (наружу) и BCF (внутрь). Докажите, что точки D, E и F лежат на одной прямой.

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно. Оказалось, что $AP + CQ = AC$. Докажите, что точки P и Q равноудалены от точки пересечения биссектрис треугольника ABC.

6. Внутри треугольника ABC нашлась точка T такая, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Докажите, что для любой точки P верно неравенство $AP + BP + CP \geqslant AT + BT + CT$.

7. На двух сторонах AB и BC правильного $2n$-угольника взяты соответственно точки K и N, причем угол KEN, где E — вершина, противоположная B, равен $\frac{180°}{2n}$. Докажите, что NE — биссектриса угла KNC.

8. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен $120°$. Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом $60°$ друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны в точки M и N. Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ.

9. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причем $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

source:geometry/rotation-g8/r1.tex

Перекладывание отрезков

1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выполнено $\angle ABD = 90°$ и $AD = BC + CD$. Найдите отношение AD к BC.

2. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Известно, что $\angle ABC = 2\angle ACB + \angle BAC$. Докажите, что $AB + CL = AC$.

3. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I. Известно, что $CA + AI = BC$. Найдите отношение углов BAC и CBA.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено $\angle B = \angle C = 120^{circ}$ и $BC + CD = AB$. Докажите, что $AC = AD$.

5. В треугольнике ABC угол B вдвое больше угла C, а угол A — тупой. Точка K на стороне BC такова, что угол KAC — прямой. Докажите, что $KC = 2AB$.

6. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BC = CD$. На катете BC взята такая точка E, что $DE = CE$. Докажите равенство $AD + BE = DE$.

7. Диагональ AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ делится точкой пересечения диагоналей пополам. Известно, что $\angle ADB = 2\angle CBD$. На диагонали BD нашлась такая точка K, что $CK = KD + AD$. Докажите, что $\angle BKC = 2\angle ABD$.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняются равенства $\angle B = \angle C$ и $CD = 2AB$. На стороне BC выбрана точка X такая, что $\angle BAX = \angle CDA$. Докажите, что $AX = AD$.

9. Дан прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A = 90°$. BL — биссектриса угла B, а точка K на стороне BC такова, что $\angle BLK = 90°$. Оказалось, что $3KC = 2(BC - AB)$.‘ Найдите $\angle C$.

source:geometry/equal-segments-g8/r1.tex

Задачи

1. В равностороннем пятиугольнике $KLMNP$ верно соотношение $\angle KLM = 2\angle NLP$. Найдите угол KLM.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и CF. Докажите, что если $\angle CFL = 30°$, то либо $\angle A = 60°$, либо $\angle B = 120°$.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны такие точки K и L соответственно, что $\angle KCB = \angle LAB = 17°$. Из точки B опущены перпендикуляры BD и BE на прямые AL и CK соответственно. Точка F — середина стороны AC. Найдите углы треугольника DEF.

4. Внутри треугольника ABC дана точка X. Ее проекции на стороны треугольника обозначим через K, L и M. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам KL и LM лежит внутри треугольника ABC.

5. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K такая, что $AK = 2KC$, и $\angle ABK = 2\angle KBC$. Пусть F — середина стороны AC, а L — проекция A на BK. Докажите, что прямые FL и BC перпендикулярны.

6. Дан центрально-симметричный многоугольник Φ и треугольник Δ внутри него. Треугольник Δ' получается из треугольника Δ центральной симметрией относительно некоторой точки X, лежащей внутри треугольника Δ. Докажите, что хотя бы одна из вершин треугольника Δ' лежит внутри или на границе многоугольника Φ.

source:geometry/mixture-g8/r1.tex

Перекладывание треугольников

1. Пусть даны два треугольника, ABC и DEF, у которых равны две стороны $AB = DE$ и $BC = EF$ и угол не между ними $\angle A = \angle D$. Докажите, что тогда верно одно из следующих утверждений: либо эти треугольники равны, либо треугольники различны, но их соответственные углы $\angle C$ и $\angle F$ дополняют друг друга до $180°$.

2. Пусть даны два треугольника, ABC и DEF, у которых углы $\angle C$ и $\angle F$ дополняют друг друга до $180°$ и $BC = EF$. Докажите, что $AB = DE$ тогда и только тогда, когда $\angle A = \angle D$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ внешний угол при вершине A равен $\angle BCD$, а $AD = CD$. Докажите, что BD — биссектриса угла ABC.

4. Пусть K — середина стороны BC треугольника ABC. На лучах AB и AC взяты точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = AY$ и точка K лежит на отрезке XY. Докажите, что $BX = CY$.

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$, на сторонах AB и CD соответственно выбраны точки K и M. Оказалось, что $AM = KC$, $BM = KD$. Докажите, что угол между прямыми AB и KM равен углу между прямыми KM и CD.

6. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I. Найдите $\angle C$, если $A_1I = B_1I$.

7. Обязательно ли треугольник равнобедренный, если точка пересечения биссектрис одинаково удалена от середин двух сторон?

8. На сторонах BC и AB треугольника ABC выбраны точки A' и C' соответственно. Прямые AA' и CC' пересекаются в точке K. Оказалось, что $AC' = CA'$ и $\angle ABC = \angle A'KC$. На отрезке KC' выбрана точка P такая, что $2PK = A'K + KC'$. Докажите, что $\angle APC = 90°$.

source:geometry/equal-triangles-g8/r1.tex

Принцип крайнего

1. Можно ли на клетчатой плоскости расставить конечное число ладей таким образом, чтобы каждая из них била не менее трех других?

2. В каждой клетке
(a) таблицы 100×100 **(b)** бесконечной клетчатой плоскости
расставлены числа, причем число в любой клетке равно среднему арифметическому чисел во всех соседних по стороне клетках. Верно ли, что все числа обязательно равны друг другу?

3. Банда из 25 гангстеров устроила перестрелку, в которой каждый из них получил пулю от ближайшего гангстера (они сидели в укрытиях и не перемещались, все попарные расстояния между ними были различны). Докажите, что какой-то гангстер не подстрелил никого.

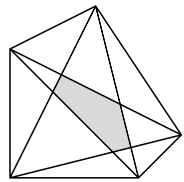
4. В вершинах n-угольника расставлены m фишек ($m > n > 2$). За ход можно выбрать какую-нибудь вершину, снять с нее две фишки (если они там есть) и добавить по одной фишке к ее соседним вершинам. Докажите, что если через несколько ходов в каждой вершине будет находиться столько же фишек, сколько в ней было изначально, то количество совершённых ходов будет кратно n.

5. На столе лежат (необязательно одинаковые) монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не задевая остальных.

6. Докажите, что у выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

7. На плоскости проведено несколько (больше одной) прямых *общего положения*, т. е. попарно непараллельных прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Эти прямые разбивают плоскость на части. Докажите, что среди частей разбиения есть хотя бы
(a) одна часть **(b)** три части
являющиеся внутренностями угла.

8. На клетчатой плоскости нарисован выпуклый пятиугольник, все вершины которого находятся в узлах решетки.
(a) Докажите, что строго внутри пятиугольника есть по крайней мере один узел решетки.
(b) Докажите, что внутри или на границе пятиугольника, образованного диагоналями исходного, есть по крайней мере один узел решетки.



9. *Теорема Сильвестра.* **(a)** На плоскости дано конечное множество точек. Известно, что любая прямая, соединяющая какие-то две точки множества, содержит по крайней мере еще одну точку множества. Докажите, что все точки множества лежат на одной прямой.

(b) На плоскости дано конечное множество непараллельных друг другу прямых. Известно, что через любую точку пересечения прямых множества проходит по крайней мере еще одна прямая множества. Докажите, что все прямые множества пересекаются в одной точке.

source:combinatorics/extreme-principle-g8/r1.tex

source:combinatorics/extreme-principle-g8/pentagon.asy

Графы. Пути и расстояния

Определение. *Расстоянием* $\rho(u, v)$ между двумя вершинами u и v одной компоненты связности графа G назовём минимальное возможное число рёбер в маршруте из u в v. *Диаметром* $d(G)$ связного графа G назовём максимальное расстояние между его вершинами.

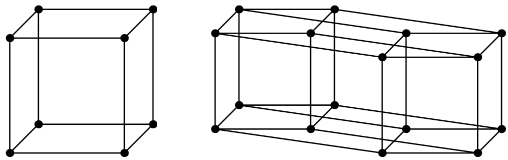
1. Каждая вершина графа имеет степень не менее k, где $k > 1$. Докажите, что в графе найдётся простой цикл длины не менее $k + 1$.
2. Диаметр связного графа G больше 2. Докажите, что диаметр антиграфа к G не больше 3.
3. В графе между любыми двумя вершинами существует простая цепь чётной длины. Докажите, что между любыми двумя вершинами существует простая цепь нечётной длины.
4. В некотором графе 100 вершин, 200 рёбер и нет простых циклов длины 3 и 4. Докажите, что в графе найдутся два простых цикла, не имеющих общих вершин.
5. В графе 100 вершин; степень каждой вершины не меньше 3. Докажите, что в графе существует простой цикл длины не более 12.
6. Несколько деревень соединены дорогами, причём длина каждой дороги меньше 10 км. Известно, что из любой деревни до любой другой можно добраться, проехав меньше 10 км. Одну дорогу закрыли, но всё ещё можно добраться из любой деревни до любой другой. Докажите, что это можно сделать, проехав меньше 30 км.
7. В связном графе диаметра d минимальная длина простого цикла равна $2d + 1$ (хотя бы один простой цикл есть). Докажите, что степени всех вершин равны.

source:combinatorics/graph/distance-g8/r1.tex

Неявные графы

1. Куб $n \times n \times n$ разбит на кубики $1 \times 1 \times 1$. Какое минимальное количество граней 1×1 необходимо в нем убрать, чтобы из любой его части можно было пробраться наружу?

2. На какое наименьшее число частей надо разрезать проволоку длиной
(a) 12 **(b)** 32,
чтобы из них можно было сложить каркас
(a) трехмерного **(b)** четырехмерного
кубика с ребром 1?



3. В каждой клетке доски $m \times n$ прорезали одну из диагоналей. На какое минимальное число частей она могла распасться?

4. В городе Прямоугольницке схема улиц представляет из себя прямоугольную сетку $m \times n$. На некоторых улицах (но не на перекрестках) стоят полицейские и записывают направление и момент времени проезжающих мимо машин. Какое минимальное число полицейских должно стоять на улицах города, чтобы можно было однозначно восстановить любой замкнутый маршрут и направление движения автомобиля (машина не ездит по одной улице дважды)?

5. Дан прямоугольник. Провели $n-1$ горизонтальных разрезов и $n-1$ вертикальных, изначальный прямоугольник разрезался на n^2 прямоугольников. На каждый из этих n^2 прямоугольников положили карточку с написанной на ней площадью этого маленького прямоугольника числом вниз. Какое минимальное число карточек нужно перевернуть, чтобы узнать площадь изначального прямоугольника?

6. На плоскости нарисовано n кругов, причем любые два круга не пересекаются, но могут касаться. Каково максимальное количество точек касания?

7. Поверхность кубика $5 \times 5 \times 5$ покрашена в три цвета (в черный и еще в два) *правильным образом*, т. е. любые два квадратика, соседние по стороне, раскрашены в разные цвета. Какое минимальное число квадратиков могло быть покрашено в черный цвет?

8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось четное количество фишек.

source:combinatorics/graph/hidden-g8/cube.asy

source:combinatorics/graph/hidden-g8/cube4.asy

Индукция, спуск и минимальный контрпример

1. Выпуклый n-угольник ($n \geqslant 3$) разбит непересекающимися диагоналями на треугольники (диагонали могут иметь общие концы). Докажите, что найдутся хотя бы две вершины, из которых не выходит ни одной диагонали.

2. На плоскости дано $n \geqslant 3$ точек, любые две из которых соединены ровно одной стрелкой.
(a) Докажите, что можно выбрать некоторую точку и, двигаясь по стрелкам, обойти все точки ровно по одному разу.
(b) Известно, что из любой точки можно добраться до любой другой, двигаясь по стрелкам. Докажите, что существует цикл, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу.

3. Дана таблица $m \times n$. Какое наибольшее число клеток в ней можно отметить так, чтобы никакие три центра отмеченных клеток не образовывали прямоугольный треугольник?

4. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета таким образом, что в любом квадрате $2{\times}2$ все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.

5. В каждой из n вершин связного графа лежат монеты, причем общее число монет кратно n. За одну операцию разрешается переложить из любой вершины несколько монет в соседнюю вершину. Докажите, что не более чем за $n - 1$ операций можно добиться того, чтобы во всех вершинах графа стало поровну монет.

6. Даны n точек, некоторые из которых соединены стрелками, причем любые две точки соединены не более чем одной стрелкой. Известно, что из любой точки можно добраться до любой другой, двигаясь по стрелкам. Докажите, что можно выкинуть несколько стрелок, оставив не более $2n - 3$, так, чтобы по-прежнему из любой точки можно было добраться до любой другой.

7. *Письменная задача.* В углу изначально белой доски $n \times n$ стоит ладья. За один ход разрешается непрерывно передвинуть ладью по горизонтали или по вертикали, причем как только ладья покидает клетку, она окрашивается в черный цвет («ладья оставляет черный шлейф»). Ладье запрещено передвигаться через черные клетки, в том числе останавливаться на них. Два игрока по очереди делают ходы, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывет при правильной игре: начинающий, или его соперник?

source:combinatorics/descent-g8/r1.tex

Глава 2

8-2

Устная вступительная олимпиада

Довывод

1. Можно ли шахматную доску 8×8 разрезать на 15 горизонтальных и 17 вертикальных доминошек?

2. Петя перемножил все нечётные натуральные числа, меньшие 1000. Какая цифра стоит в произведении в разряде десятков?

3. Две дворовые команды играют в футбол до 10 голов (игра прекращается, когда одна из команд забьёт 10 голов). В процессе игры ведётся протокол, в который вносится счёт после каждого гола. Сколько различных протоколов может получиться?

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы углов B и C. Основания перпенидикуляров, опущенных из вершины A на эти биссектрисы, обозначены P и Q. Докажите, что PQ и BC параллельны.

5. Андрей и Борис играют в следующую игру: они по очереди проводят прямые плоскости, проходящие через фиксированную точку S. Запрещается проводить одну и ту же прямую два раза. Проигрывает тот, после чьего хода угол между какими-то из проведённых прямых окажется меньше $1°$. Первым ходит Андрей. Может ли кто-либо из игроков обеспечить себе победу вне зависимости от игры соперника? Если да, то кто?

source:olympiad/intro-g8/1.tex

Вывод

6. Натуральные числа от 1 до 100 раскрасили в три цвета. Докажите, что найдутся два одноцветных числа, разность между которыми является квадратом натурального числа.

7. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки M и N (N между M и B) такие, что $\angle MCN = 45°$. Докажите, что $MN^2 = AM^2 + NB^2$.

8. На острове Кокос проживает 2017 аборигенов, каждый из которых либо всегда говорит правду (рыцарь), либо всегда обманывает (лжец), причем не все из них лжецы. Путешественник хочет узнать количество рыцарей на этом острове. Ему разрешено один раз в день собирать на берегу любую группу островитян, каждый из которых назовет количество рыцарей среди собравшихся. За какое наименьшее число дней путешественник сможет выяснить точное число рыцарей?

source:olympiad/intro-g8/2.tex

Послевывод

9. Дан треугольник ABC, у которого $\angle A = 60°$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. На стороне AB отмечена такая точка X, что $AX = IX$. Пусть P — точка на стороне BC со свойством $2BP = CP$. Докажите, что $\angle ABC = 2\angle BXP$.

10. В Графландии 60 городов, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно покрасить четыре города в красный цвет, а другие четыре — в зеленый так, чтобы каждая дорога, соединяющая красный город с зеленым, была направлена от красного к зеленому.

source:olympiad/intro-g8/3.tex

НОД и НОК

Пусть a и b — два целых числа, не равные одновременно нулю. Рассмотрим все числа, на которые делятся и a и b одновременно, т. е. все общие делители a и b. Выберем из них наибольший и назовем его *наибольшим общим делителем*. Будем обозначать наибольший общий делитель чисел a и b через НОД(a, b) или, для краткости, (a, b). Наименьшим общим кратным чисел a и b (НОК(a, b) или, для краткости, $[a, b]$) называется наименьшее натуральное число, которое делится на a и b.

Аналогично определяется НОД и НОК трех и более чисел. Например, пусть даны n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — это наибольшее число, на которое делится каждое из данных n чисел.

Если НОД$(a, b) = 1$, то числа a и b называются *взаимно простыми*.

1. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство $ab = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b)$.

2. Верно ли равенство $abc = \text{НОД}(a, b, c) \cdot \text{НОК}(a, b, c)$?

3. **(a)** Известно, что НОД$(a, b, c) = 1$. Верно ли, что среди трех чисел a, b, c найдутся два таких, что их НОД равен 1?
(b) Верно ли, что, если НОД$(a, b) = $ НОД$(b, c) = d$, то и НОД$(a, c) = d$?

4. Может ли так быть, что НОК$(a, b) = a + b$?

5. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел a и b, если известно, что $ab = 6000$?

6. a и b — натуральные числа. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.

7. Замените знаки ? в выражении подходящими буквами (Д или К) и докажите получившееся равенство:

$$\text{НО?}(a, b) \cdot \text{НО?}(b, c) \cdot \text{НО?}(c, a) = \frac{abc \cdot \text{НО?}(a, b, c)}{\text{НО?}(a, b, c)}.$$

8. a, b, c — натуральные числа, НОД$(a, b, c) = 1$ и $\frac{ab}{a-b} = c$. Докажите, что $a - b$ является точным квадратом.

9. Пусть a, b и c — попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число целое.

10. Последовательность натуральных чисел a_i такова, что НОД$(a_i, a_j) = $ НОД(i, j) для всех $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для всех натуральных i.

source:algebra/number-theory/GCD-and-LCM-g8/r2.tex

Алгоритм Евклида

`lost, reconstructed`

НОД(a, b) = НОД$(a, b - a)$.

Алгоритм Евклида — правило, которое позволяет по двум натуральным числам a и b найти НОД(a, b). Если имеются два натуральных числа $a > b > 0$, то сначала делим a на b, и получаем остаток r_1, который меньше, чем b. Затем делим число b на r_1, находим остаток r_2, который меньше, чем r_1. Далее делим число r_1 на r_2, находим остаток r_3, меньший, чем r_2, и так далее. Указанный процесс обязательно закончится, поскольку каждый следующий остаток меньше предыдущего, а все остатки — неотрицательные числа. В конце концов какой-то остаток r_{n-1} разделится на остаток r_n нацело, без остатка. Последний остаток r_n и есть НОД(a, b), так как

$$r_n = \text{НОД}(r_n, r_{n-1}) = \text{НОД}(r_{n-1}, r_{n-2}) = \ldots = \text{НОД}(r_2, r_1) = \text{НОД}(r_1, b) = \text{НОД}(b, a)\,.$$

1. На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число — разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

2. Докажите, что для каждого натурального числа n дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

3. Найдите НОД всех чисел, в записи каждого из которых все цифры $1, 2, \ldots, 9$ использованы по одному разу.

4. Найдите НОД$(11{\ldots}1, 11{\ldots}1)$, где в первом числе n единиц, а во втором m.

5. Докажите, что НОД$(2^m - 1, 2^n - 1) = a^d - 1$, где d = НОД(m, n).

6. **(a)** Найдите НОД двух чисел Ферма $2^{2^n} + 1$ и $2^{2^m} + 1$. (Докажите, что число $2^{2^n} - 1$ имеет хотя бы n различных простых делителей.)
(b) Найдите НОД двух чисел Фибоначчи F_n и F_m.

7. Функция $f(a, b)$, определенная для всех натуральных a и b, обладает следующими тремя свойствами:
(1) $f(a, a) = a$;
(2) $f(a, b) = f(b, a)$;
(3) $(a + b) \cdot f(a, b) = b \cdot f(a, a + b)$.
Докажите, что $f(a, b)$ = НОК(a, b).

8. Пусть a, b, c — натуральные числа. Могут ли НОК(a, b) и НОК$(a + c, b + c)$ быть равны?

9. На доске написаны два различных натуральных числа a и b. Меньшее из них стирают, и вместо него пишут число $\frac{ab}{|a-b|}$ (которое может уже оказаться нецелым). С полученной парой чисел делают ту же операцию и т. д. Докажите, что в некоторый момент на доске окажутся два равных натуральных числа.

10. Аня нашла себе интересное занятие. Она написала на доске две единички, потом между ними написала их сумму. Ее это так захватило, что она продолжила: брала ряд чисел, который у нее получился на предыдущем шаге, и между двумя соседними числами писала их сумму (старые числа при этом не стирала). Сколько раз она выписала произвольное число n?

source:algebra/number-theory/euclid-algorithm-g8/r2.tex

Линейное представление НОД

1. *Линейное представление НОД.*
(a) Докажите, что для любых двух натуральных чисел a, b существуют целые числа x, y такие, что $ax + by = (a, b)$. Как можно получить такие x, y и сколько существует таких пар чисел?
(b) Докажите, что для любого набора натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n найдутся целые числа x_1, x_2, ..., x_n такие, что $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

2. У Пети есть уголок с углом 82°. Сколько раз ему нужно воспользоваться этим уголком, чтобы нарисовать угол в 2°?

3. В классе химии имеются 25 пробирок объема 1, 2, ..., 25 мл. Когда химики стали собираться на летнюю практику, оказалось, что у них осталось мало места, и они могут взять только набор из 10 пробирок. Химики хотят, чтобы с помощью любых двух пробирок из набора можно было отмерить 1 мл. Сколькими способами можно составить такой набор?

4. В банке 500 долларов. Разрешаются две операции: взять из банка 300 долларов или положить в него 198 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банка и как это сделать?

5. На острове Мумбо-Юмбо есть монеты достоинством в 252, 315 и 350 тугриков. Какую наименьшую сумму можно оплатить на этом острове, если в любом магазине на сдачу есть неограниченное число монет. Какое наименьшее число монет может участвовать в оплате этой суммы?

6. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явились 28 членов профсоюза и 37 не членов, причём Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну — не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?

7. У ресторана, где проводится торжественный вечер, есть столы на 12 и на 7 человек. На торжественный вечер организаторы хотят пригласить лучших работников, однако помимо работников на этот вечер хочет прийти неизвестное число гостей из городской администрации. По соображениям безопасности, все столы, использованные для вечера должны быть заняты полностью. Какое наименьшее число работников должны пригласить организаторы, чтобы независимо от количества людей из администрации вечер не сорвался?

8. Бильярдный стол имеет форму прямоугольника $m \times n$, в углах которого расположены лунки. Из левого нижнего угла выпускают шар под углом 45° к сторонам стола.
(a) Сколько раз шарик ударится о края стола прежде чем упасть в лунку?
(b) Через какие точки стола пролетит шар прежде чем упасть в лунку?

Натуральные уравнения

1. *Задача о размене монет.* Пусть в некоторой стране есть монеты достоинством a и b тугриков, где a и b взаимно просты. Докажите, что:

(a) любую сумму, не меньшую, чем $(a-1)(b-1)$ тугриков, можно заплатить без сдачи;

(b) если x тугриков можно заплатить без сдачи, то $ab-a-b-x$ тугриков заплатить без сдачи нельзя;

(c) если $x<(a-1)(b-1)$ тугриков нельзя заплатить без сдачи, то $ab-a-b-x$ — можно.

(d) Не пользуясь соображениями двух предыдущих пунктов докажите, что сумм, которые меньше, чем $(a-1)(b-1)$ и которые можно заплатить без сдачи, ровно $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$.

2. При каких N уравнение $5x+8y=N$ имеет 6 решений в натуральных числах?

3. При каком наибольшем N уравнение $99x+100y+101z=N$ имеет единственное решение в натуральных числах x, y, z?

4. При каком наименьшем n квадрат $n\times n$ можно разрезать на квадраты 40×40 и 49×49 так, чтобы квадраты обоих видов присутствовали?

source:algebra/number-theory/diophantine-equation-g8/r1.tex

Китайская теорема об остатках

1. Найдите остаток от деления натурального числа на 30, если при делении на 15 оно дает остаток 7, а при делении на 6 остаток 4.

2. Пусть a и b — взаимно простые числа, а m и n дают одинаковые остатки при делении на a и при делении на b. Докажите, что $m - n$ делится на ab.

3. У генерала не более 5000 солдат. Сначала он пытался построить их в две равные шеренги, но ему не хватило одного солдата. Потом он пытался сделать тоже самое для трех, четырех, ..., десяти шеренг и все время у него не хватало одного солдата. Докажите, что он сможет построить солдат в 11 равных шеренг.

4. **(a)** Лев загадал число от 0 до 60 и сказал, что при делении на 5 оно даёт остаток 3, при делении на 4 даёт 2 и делится на 3. Денис Владимирович уверен, что точно знает загаданное число. Прав ли он?
(b) А если задумано число от 1 до 180?

5. **Китайская теорема об остатках (КТО).** Пусть $m_1, m_2, ..., m_n$ — попарно взаимно простые числа. Тогда для любых целых $r_1, r_2, \dots, r_n$ существует натуральное x такое, что

$$x \equiv_{m_1} r_1, \quad x \equiv_{m_2} r_2, \quad \dots, \quad x \equiv_{m_n} r_n.$$

Более того, среди чисел, не превосходящих $m_1 m_2 \dots m_n$, такое число единственно.
(a) Докажите КТО для $n = 2$.
(b) Докажите КТО для произвольного n методом математической индукции.
(c) Пусть x и y дают одинаковые остатки при делении на $m_1, ..., m_n$. Докажите, что $x - y \mathrel{\vdots} m_1 m_2 \dots m_n$ и выведите отсюда КТО.
(d) С помощью линейного представления НОД докажите, что такое x существует при $r_1 = 1, r_2 = 0, r_3 = 0, ..., r_n = 0$. Используя это соображение, докажите КТО.
(e) С помощью функции Эйлера найдите какое-нибудь x, дающее остаток 1 при делении на m_1 и остаток 0 при делении на $m_2, m_3, ..., m_n$. Докажите КТО.

6. Попробуем избавится от условия взаимной простоты в условии КТО. Пусть есть натуральные $m_1, ..., m_n$, и для любых i, j есть x такое, что $x \equiv_{m_i} r_i$ и $x \equiv_{m_j} r_j$. Докажите, что тогда утверждение КТО выполнено.

7. Пусть для натуральных $m_1, ..., m_n$, и целых $r_1, \dots, r_n$ нашлось натуральное x такое, что

$$x \equiv_{m_1} r_1, \quad x \equiv_{m_2} r_2, \quad \dots, \quad x \equiv_{m_n} r_n.$$

А сколько существует таких x среди чисел от 1 до $m_1 m_2 \dots m_n$?

8. Пусть $m_1, m_2, \dots, m_n$ — попарно взаимно простые числа. Тогда для любых целых $r_1, r_2, \dots, r_n$ существует натуральное x такое, что

$$x + 1 \equiv_{m_1} r_1, \quad x + 2 \equiv_{m_2} r_2, \quad \dots, \quad x + n \equiv_{m_n} r_n.$$

9. Существует ли в сутках момент, когда расположенные на общей оси часовая, минутная и секундная стрелки правильно идущих часов образуют попарно углы в $120°$?

source:algebra/number-theory/chinese-remainder-theorem-g8.tex

Неравенство средних

1. Пусть $x > 0$. Докажите, что верно $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

2. Что больше: $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ или $2\sqrt{n}$?

3. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше четырех.

4. При каких x дробь $\frac{81+16x^4}{x^2}$ принимает наименьшее значение?

5. Пусть $x + y = 1$. Докажите, что $x^8 + y^8 \geqslant \frac{1}{128}$.

6. Для положительных a, b докажите, что

$$2a^2 + \frac{b}{a} \geqslant \frac{8a^2b}{2a^3 + b}\,.$$

7. Решите уравнение $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

8. Докажите, что для положительных x, y, z верно неравенство

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz\,.$$

9. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9\,.$$

10. Докажите, что среди прямоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет квадрат.

11. Теплоход прошел путь от пункта A до пункта B и обратно. Докажите, что собственная скорость теплохода больше, чем средняя скорость этого движения.

12. У продавца есть чашечные весы с неравными плечами и гири. Сначала он взвешивает товар на одной чашке, затем — на другой и берет среднее арифметическое двух показаний. Определите, в чью пользу такое «взвешивание»: продавца или покупателя?

13. Пусть a, b, c и d такие положительные числа, что $ab = 1$ и $ac + bd = 2$. Докажите, что $cd \leqslant 1$.

14. Для положительных x, y докажите, что

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{xy}\,.$$

Индукция в неравенствах

1. Докажите, что есть такое n, что $1{,}001^n \geqslant 2017$.

2. Определим L_n как $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Докажите, что $L_n \geqslant 2\sqrt{n+3} - 3$.

3. Определим гармонический ряд H_n как $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Докажите, что найдется такой n, что $H_n \geqslant 2017$.

4. Положим величину T_n равной $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$. Докажите, что $T_n \geqslant \sqrt{2n+1}$.

5. Положим величину S_n равной $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2n}\right)$.

(a) Докажите, что $S_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

(b) Докажите, что $S_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$.

6. Сформулируем неравенство средних для n переменных:
для любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ верно:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

(a) Докажите неравенство, когда n — степень двойки.

(b) Докажите, что если неравенство верно для любых n переменных, то оно верно и для любых $n-1$ переменных.

(c) Докажите, что неравенство выполнено для любых n переменных.

7. Докажите, что для любого n выполнено неравенство

(a) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} < 1;$

(b) $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < 2.$

source:algebra/inequality/induction-g8/r1.tex

Винегрет из неравенств

1. **(a)** Разложите $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ на множители.
(b) Из предыдущего пункта выведите, что если a, b, c неотрицательные, то верно неравенство $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$.

2. Натуральные a, b, c таковы, что $a + b + c = 100$. Какое наибольшее значение может принимать величина $ab + bc + ca$?

3. *(Неравенство Несбитта)* Для положительных a, b, c докажите, что верно

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

4. Известно, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$. Докажите, что
(a) $a^2b + b^2c + c^2a \geqslant ab^2 + bc^2 + ca^2$;
(b) $a^3b + b^3c + c^3a \geqslant ab^3 + bc^3 + ca^3$.

source:algebra/inequality/mixture-g8.tex

Центральная симметрия

1. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A'B'C'$ равны стороны $BA = B'A'$ и $BC = B'C'$ и медианы $BM = B'M'$, то эти треугольники равны.

2. В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение медианы BM к стороне BC.

3. В треугольнике ABC точка M — середина AC. На стороне BC взяли точку K так, что угол BMK прямой. Оказалось, что $BK = AB$. Найдите $\angle MBC$, если $\angle ABC = 110°$.

4. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол MKN — прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

5. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC и CD равны, M — середина стороны AD. Известно, что угол BMC равен $90°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

7. В центре квадратного пруда плавает ученик. Внезапно к вершине квадрата подошёл учитель. Учитель не умеет плавать, но бегает в 4 раза быстрее, чем ученик плавает. Ученик бегает быстрее. Сможет ли он убежать?

8. Даны выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка O внутри его. Докажите, что через точку O нельзя провести более n прямых, каждая из которых делит площадь n-угольника пополам.

source:geometry/point-reflection-g8/r1.tex

Крутой поворот

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABK и BCL. Докажите, что отрезки AL и KC имеют одинаковую длину и найдите угол между ними.

2. Внутри квадрата $ABCD$ дана точка P. Докажите, что прямая, проходящая через точку A перпендикулярно BP, прямая, проходящая через точку B перпендикулярно CP, прямая, проходящая через точку C перпендикулярно DP, и прямая, проходящая через точку D перпендикулярно AP, пересекаются в одной точке.

3. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

4. На сторонах AB и BC дельтоида $ABCD$ ($AB = AD$, $CB = CD$) построены правильные треугольники ABE (наружу) и BCF (внутрь). Докажите, что точки D, E и F лежат на одной прямой.

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно. Оказалось, что $AP + CQ = AC$. Докажите, что точки P и Q равноудалены от точки пересечения биссектрис треугольника ABC.

6. Внутри треугольника ABC нашлась точка T такая, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Докажите, что для любой точки P верно неравенство $AP + BP + CP \geqslant AT + BT + CT$.

7. На двух сторонах AB и BC правильного $2n$-угольника взяты соответственно точки K и N, причем угол KEN, где E — вершина, противоположная B, равен $\frac{180°}{2n}$. Докажите, что NE — биссектриса угла KNC.

8. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен $120°$. Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом $60°$ друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны в точки M и N. Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ.

9. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причем $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

source:geometry/rotation-g8/r1.tex

Перекладывание отрезков

1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выполнено $\angle ABD = 90°$ и $AD = BC + CD$. Найдите отношение AD к BC.

2. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Известно, что $\angle ABC = 2\angle ACB + \angle BAC$. Докажите, что $AB + CL = AC$.

3. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I. Известно, что $CA + AI = BC$. Найдите отношение углов BAC и CBA.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено $\angle B = \angle C = 120^{circ}$ и $BC + CD = AB$. Докажите, что $AC = AD$.

5. В треугольнике ABC угол B вдвое больше угла C, а угол A — тупой. Точка K на стороне BC такова, что угол KAC — прямой. Докажите, что $KC = 2AB$.

6. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BC = CD$. На катете BC взята такая точка E, что $DE = CE$. Докажите равенство $AD + BE = DE$.

7. Диагональ AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ делится точкой пересечения диагоналей пополам. Известно, что $\angle ADB = 2\angle CBD$. На диагонали BD нашлась такая точка K, что $CK = KD + AD$. Докажите, что $\angle BKC = 2\angle ABD$.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняются равенства $\angle B = \angle C$ и $CD = 2AB$. На стороне BC выбрана точка X такая, что $\angle BAX = \angle CDA$. Докажите, что $AX = AD$.

9. Дан прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A = 90°$. BL — биссектриса угла B, а точка K на стороне BC такова, что $\angle BLK = 90°$. Оказалось, что $3KC = 2(BC - AB)$.‘ Найдите $\angle C$.

source:geometry/equal-segments-g8/r1.tex

Перекладывание треугольников

1. Пусть даны два треугольника, ABC и DEF, у которых равны две стороны $AB = DE$ и $BC = EF$ и угол не между ними $\angle A = \angle D$. Докажите, что тогда верно одно из следующих утверждений: либо эти треугольники равны, либо треугольники различны, но их соответственные углы $\angle C$ и $\angle F$ дополняют друг друга до $180°$.

2. Пусть даны два треугольника, ABC и DEF, у которых углы $\angle C$ и $\angle F$ дополняют друг друга до $180°$ и $BC = EF$. Докажите, что $AB = DE$ тогда и только тогда, когда $\angle A = \angle D$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ внешний угол при вершине A равен $\angle BCD$, а $AD = CD$. Докажите, что BD — биссектриса угла ABC.

4. Пусть K — середина стороны BC треугольника ABC. На лучах AB и AC взяты точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = AY$ и точка K лежит на отрезке XY. Докажите, что $BX = CY$.

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$, на сторонах AB и CD соответственно выбраны точки K и M. Оказалось, что $AM = KC$, $BM = KD$. Докажите, что угол между прямыми AB и KM равен углу между прямыми KM и CD.

6. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I. Найдите $\angle C$, если $A_1I = B_1I$.

7. Обязательно ли треугольник равнобедренный, если точка пересечения биссектрис одинаково удалена от середин двух сторон?

8. На сторонах BC и AB треугольника ABC выбраны точки A' и C' соответственно. Прямые AA' и CC' пересекаются в точке K. Оказалось, что $AC' = CA'$ и $\angle ABC = \angle A'KC$. На отрезке KC' выбрана точка P такая, что $2PK = A'K + KC'$. Докажите, что $\angle APC = 90°$.

source:geometry/equal-triangles-g8/r1.tex

Задачи

1. В равностороннем пятиугольнике $KLMNP$ верно соотношение $\angle KLM = 2\angle NLP$. Найдите угол KLM.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и CF. Докажите, что если $\angle CFL = 30°$, то либо $\angle A = 60°$, либо $\angle B = 120°$.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны такие точки K и L соответственно, что $\angle KCB = \angle LAB = 17°$. Из точки B опущены перпендикуляры BD и BE на прямые AL и CK соответственно. Точка F — середина стороны AC. Найдите углы треугольника DEF.

4. Внутри треугольника ABC дана точка X. Ее проекции на стороны треугольника обозначим через K, L и M. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам KL и LM лежит внутри треугольника ABC.

5. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K такая, что $AK = 2KC$, и $\angle ABK = 2\angle KBC$. Пусть F — середина стороны AC, а L — проекция A на BK. Докажите, что прямые FL и BC перпендикулярны.

6. Дан центрально-симметричный многоугольник Φ и треугольник Δ внутри него. Треугольник Δ' получается из треугольника Δ центральной симметрией относительно некоторой точки X, лежащей внутри треугольника Δ. Докажите, что хотя бы одна из вершин треугольника Δ' лежит внутри или на границе многоугольника Φ.

source:geometry/mixture-g8/r1.tex

Принцип крайнего

1. Можно ли на клетчатой плоскости расставить конечное число ладей таким образом, чтобы каждая из них била не менее трех других?

2. В каждой клетке
(a) таблицы 100×100 **(b)** бесконечной клетчатой плоскости
расставлены числа, причем число в любой клетке равно среднему арифметическому чисел во всех соседних по стороне клетках. Верно ли, что все числа обязательно равны друг другу?

3. Банда из 25 гангстеров устроила перестрелку, в которой каждый из них получил пулю от ближайшего гангстера (они сидели в укрытиях и не перемещались, все попарные расстояния между ними были различны). Докажите, что какой-то гангстер не подстрелил никого.

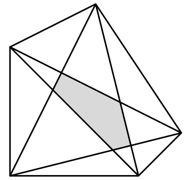
4. В вершинах n-угольника расставлены m фишек ($m > n > 2$). За ход можно выбрать какую-нибудь вершину, снять с нее две фишки (если они там есть) и добавить по одной фишке к ее соседним вершинам. Докажите, что если через несколько ходов в каждой вершине будет находиться столько же фишек, сколько в ней было изначально, то количество совершённых ходов будет кратно n.

5. На столе лежат (необязательно одинаковые) монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не задевая остальных.

6. Докажите, что у выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

7. На плоскости проведено несколько (больше одной) прямых *общего положения*, т. е. попарно непараллельных прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Эти прямые разбивают плоскость на части. Докажите, что среди частей разбиения есть хотя бы
(a) одна часть **(b)** три части
являющиеся внутренностями угла.

8. На клетчатой плоскости нарисован выпуклый пятиугольник, все вершины которого находятся в узлах решетки.
(a) Докажите, что строго внутри пятиугольника есть по крайней мере один узел решетки.
(b) Докажите, что внутри или на границе пятиугольника, образованного диагоналями исходного, есть по крайней мере один узел решетки.



9. *Теорема Сильвестра.* **(a)** На плоскости дано конечное множество точек. Известно, что любая прямая, соединяющая какие-то две точки множества, содержит по крайней мере еще одну точку множества. Докажите, что все точки множества лежат на одной прямой.

(b) На плоскости дано конечное множество непараллельных друг другу прямых. Известно, что через любую точку пересечения прямых множества проходит по крайней мере еще одна прямая множества. Докажите, что все прямые множества пересекаются в одной точке.

source:combinatorics/extreme-principle-g8/r1.tex

source:combinatorics/extreme-principle-g8/pentagon.asy

Графы. Пути и расстояния

Определение. *Расстоянием* $\rho(u, v)$ между двумя вершинами u и v одной компоненты связности графа G назовём минимальное возможное число рёбер в маршруте из u в v. *Диаметром* $d(G)$ связного графа G назовём максимальное расстояние между его вершинами.

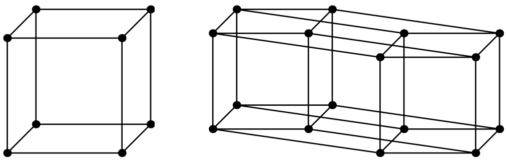
1. Каждая вершина графа имеет степень не менее k, где $k > 1$. Докажите, что в графе найдётся простой цикл длины не менее $k + 1$.
2. Диаметр связного графа G больше 2. Докажите, что диаметр антиграфа к G не больше 3.
3. В графе между любыми двумя вершинами существует простая цепь чётной длины. Докажите, что между любыми двумя вершинами существует простая цепь нечётной длины.
4. В некотором графе 100 вершин, 200 рёбер и нет простых циклов длины 3 и 4. Докажите, что в графе найдутся два простых цикла, не имеющих общих вершин.
5. В графе 100 вершин; степень каждой вершины не меньше 3. Докажите, что в графе существует простой цикл длины не более 12.
6. Несколько деревень соединены дорогами, причём длина каждой дороги меньше 10 км. Известно, что из любой деревни до любой другой можно добраться, проехав меньше 10 км. Одну дорогу закрыли, но всё ещё можно добраться из любой деревни до любой другой. Докажите, что это можно сделать, проехав меньше 30 км.
7. В связном графе диаметра d минимальная длина простого цикла равна $2d + 1$ (хотя бы один простой цикл есть). Докажите, что степени всех вершин равны.

source:combinatorics/graph/distance-g8/r1.tex

Неявные графы

1. Куб $n \times n \times n$ разбит на кубики $1 \times 1 \times 1$. Какое минимальное количество граней 1×1 необходимо в нем убрать, чтобы из любой его части можно было пробраться наружу?

2. На какое наименьшее число частей надо разрезать проволоку длиной
(a) 12 **(b)** 32,
чтобы из них можно было сложить каркас
(a) трехмерного **(b)** четырехмерного
кубика с ребром 1?



3. В каждой клетке доски $m \times n$ прорезали одну из диагоналей. На какое минимальное число частей она могла распасться?

4. В городе Прямоугольницке схема улиц представляет из себя прямоугольную сетку $m \times n$. На некоторых улицах (но не на перекрестках) стоят полицейские и записывают направление и момент времени проезжающих мимо машин. Какое минимальное число полицейских должно стоять на улицах города, чтобы можно было однозначно восстановить любой замкнутый маршрут и направление движения автомобиля (машина не ездит по одной улице дважды)?

5. Дан прямоугольник. Провели $n-1$ горизонтальных разрезов и $n-1$ вертикальных, изначальный прямоугольник разрезался на n^2 прямоугольников. На каждый из этих n^2 прямоугольников положили карточку с написанной на ней площадью этого маленького прямоугольника числом вниз. Какое минимальное число карточек нужно перевернуть, чтобы узнать площадь изначального прямоугольника?

6. На плоскости нарисовано n кругов, причем любые два круга не пересекаются, но могут касаться. Каково максимальное количество точек касания?

7. Поверхность кубика $5 \times 5 \times 5$ покрашена в три цвета (в черный и еще в два) *правильным образом*, т. е. любые два квадратика, соседние по стороне, раскрашены в разные цвета. Какое минимальное число квадратиков могло быть покрашено в черный цвет?

8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось четное количество фишек.

source:combinatorics/graph/hidden-g8/cube.asy

source:combinatorics/graph/hidden-g8/cube4.asy

Индукция, спуск и минимальный контрпример

1. Выпуклый n-угольник ($n \geqslant 3$) разбит непересекающимися диагоналями на треугольники (диагонали могут иметь общие концы). Докажите, что найдутся хотя бы две вершины, из которых не выходит ни одной диагонали.

2. На плоскости дано $n \geqslant 3$ точек, любые две из которых соединены ровно одной стрелкой.
(a) Докажите, что можно выбрать некоторую точку и, двигаясь по стрелкам, обойти все точки ровно по одному разу.
(b) Известно, что из любой точки можно добраться до любой другой, двигаясь по стрелкам. Докажите, что существует цикл, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу.

3. Дана таблица $m \times n$. Какое наибольшее число клеток в ней можно отметить так, чтобы никакие три центра отмеченных клеток не образовывали прямоугольный треугольник?

4. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета таким образом, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.

5. В каждой из n вершин связного графа лежат монеты, причем общее число монет кратно n. За одну операцию разрешается переложить из любой вершины несколько монет в соседнюю вершину. Докажите, что не более чем за $n-1$ операций можно добиться того, чтобы во всех вершинах графа стало поровну монет.

6. Даны n точек, некоторые из которых соединены стрелками, причем любые две точки соединены не более чем одной стрелкой. Известно, что из любой точки можно добраться до любой другой, двигаясь по стрелкам. Докажите, что можно выкинуть несколько стрелок, оставив не более $2n-3$, так, чтобы по-прежнему из любой точки можно было добраться до любой другой.

7. *Письменная задача.* В углу изначально белой доски $n \times n$ стоит ладья. За один ход разрешается непрерывно передвинуть ладью по горизонтали или по вертикали, причем как только ладья покидает клетку, она окрашивается в черный цвет («ладья оставляет черный шлейф»). Ладье запрещено передвигаться через черные клетки, в том числе останавливаться на них. Два игрока по очереди делают ходы, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий, или его соперник?

source:combinatorics/descent-g8/r1.tex

Глава 3

8-3

Устная вступительная олимпиада

Довывод

1. Можно ли шахматную доску 8×8 разрезать на 15 горизонтальных и 17 вертикальных доминошек?

2. Петя перемножил все нечётные натуральные числа, меньшие 1000. Какая цифра стоит в произведении в разряде десятков?

3. Две дворовые команды играют в футбол до 10 голов (игра прекращается, когда одна из команд забьёт 10 голов). В процессе игры ведётся протокол, в который вносится счёт после каждого гола. Сколько различных протоколов может получиться?

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы углов B и C. Основания перпенидикуляров, опущенных из вершины A на эти биссектрисы, обозначены P и Q. Докажите, что PQ и BC параллельны.

5. Андрей и Борис играют в следующую игру: они по очереди проводят прямые плоскости, проходящие через фиксированную точку S. Запрещается проводить одну и ту же прямую два раза. Проигрывает тот, после чьего хода угол между какими-то из проведённых прямых окажется меньше $1°$. Первым ходит Андрей. Может ли кто-либо из игроков обеспечить себе победу вне зависимости от игры соперника? Если да, то кто?

source:olympiad/intro-g8/1.tex

Вывод

6. Натуральные числа от 1 до 100 раскрасили в три цвета. Докажите, что найдутся два одноцветных числа, разность между которыми является квадратом натурального числа.

7. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки M и N (N между M и B) такие, что $\angle MCN = 45°$. Докажите, что $MN^2 = AM^2 + NB^2$.

8. На острове Кокос проживает 2017 аборигенов, каждый из которых либо всегда говорит правду (рыцарь), либо всегда обманывает (лжец), причем не все из них лжецы. Путешественник хочет узнать количество рыцарей на этом острове. Ему разрешено один раз в день собирать на берегу любую группу островитян, каждый из которых назовет количество рыцарей среди собравшихся. За какое наименьшее число дней путешественник сможет выяснить точное число рыцарей?

source:olympiad/intro-g8/2.tex

Послевывод

9. Дан треугольник ABC, у которого $\angle A = 60°$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. На стороне AB отмечена такая точка X, что $AX = IX$. Пусть P — точка на стороне BC со свойством $2BP = CP$. Докажите, что $\angle ABC = 2\angle BXP$.

10. В Графландии 60 городов, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно покрасить четыре города в красный цвет, а другие четыре — в зеленый так, чтобы каждая дорога, соединяющая красный город с зеленым, была направлена от красного к зеленому.

source:olympiad/intro-g8/3.tex

НОД и НОК

Пусть a и b — два целых числа, не равные одновременно нулю. Рассмотрим все числа, на которые делятся и a и b одновременно, т. е. все общие делители a и b. Выберем из них наибольший и назовем его *наибольшим общим делителем*. Будем обозначать наибольший общий делитель чисел a и b через НОД(a, b) или, для краткости, (a, b). Наименьшим общим кратным чисел a и b (НОК(a, b) или, для краткости, $[a, b]$) называется наименьшее натуральное число, которое делится на a и b.

Аналогично определяется НОД и НОК трех и более чисел. Например, пусть даны n чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда НОД$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — это наибольшее число, на которое делится каждое из данных n чисел.

Если НОД$(a, b) = 1$, то числа a и b называются *взаимно простыми*.

1. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство $ab = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b)$.

2. Верно ли равенство $abc = \text{НОД}(a, b, c) \cdot \text{НОК}(a, b, c)$?

3. Замените знаки ? в выражении подходящими буквами (Д или К) и докажите получившееся равенство:

$$\text{НО?}(a, b) \cdot \text{НО?}(b, c) \cdot \text{НО?}(c, a) = \frac{abc \cdot \text{НО?}(a, b, c)}{\text{НО?}(a, b, c)}.$$

4. **(a)** Известно, что НОД$(a, b, c) = 1$. Верно ли, что среди трех чисел a, b, c найдутся два таких, что их НОД равен 1?
(b) Верно ли, что, если НОД$(a, b) =$ НОД$(b, c) = d$, то и НОД$(a, c) = d$?

5. **(a)** Может ли так быть, что НОК$(a, b) = a + b$?
(b) Может ли так быть, что НОК$(a, b, c) = a + b + c$?

6. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел a и b, если известно, что $ab = 6000$?

7. Денис посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Лев — НОК всех чисел от 500 до 1000. У кого получилось большее число?

8. a и b — натуральные числа. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.

9. a, b, c — натуральные числа, НОД$(a, b, c) = 1$ и $\frac{ab}{a-b} = c$. Докажите, что $a - b$ является точным квадратом.

10. Пусть a, b и c — попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число целое.

source:algebra/number-theory/GCD-and-LCM-g8/r3.tex

Алгоритм Евклида

НОД$(a, b) =$ НОД$(a, b - a)$.

Алгоритм Евклида — правило, которое позволяет по двум натуральным числам a и b найти НОД(a, b). Если имеются два натуральных числа $a > b > 0$, то сначала делим a на b, и получаем остаток r_1, который меньше, чем b. Затем делим число b на r_1, находим остаток r_2, который меньше, чем r_1. Далее делим число r_1 на r_2, находим остаток r_3, меньший, чем r_2, и так далее. Указанный процесс обязательно закончится, поскольку каждый следующий остаток меньше предыдущего, а все остатки — неотрицательные числа. В конце концов какой-то остаток r_{n-1} разделится на остаток r_n нацело, без остатка. Последний остаток r_n и есть НОД(a, b), так как

$$r_n = \text{НОД}(r_n, r_{n-1}) = \text{НОД}(r_{n-1}, r_{n-2}) = \ldots = \text{НОД}(r_2, r_1) = \text{НОД}(r_1, b) = \text{НОД}(b, a)\,.$$

1. На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число — разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

2. Докажите, что для каждого натурального числа n дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

3. Найдите НОД всех чисел, в записи каждого из которых все цифры $1, 2, \ldots, 9$ использованы по одному разу.

4. Найдите НОД$(11\ldots1, 11\ldots1)$, где в первом числе n единиц, а во втором m.

5. Докажите, что НОД$(2^m - 1, 2^n - 1) = a^d - 1$, где $d =$ НОД(m, n).

6. На доске написаны натуральные числа $a_1, \ldots, a_k$ такие, что НОД$(a_1, \ldots, a_k) = 1$. Разрешается взять два числа и из большего вычесть меньшее. Докажите, что такими операциями можно получить число 1.

7. Докажите, что числа $2^{2^n} + 1$ и $2^{2^m} + 1$ взаимно просты.

8. Пусть a, b, c — натуральные числа. Могут ли НОК(a, b) и НОК$(a + c, b + c)$ быть равны?

9. На доске написаны два различных натуральных числа a и b. Меньшее из них стирают, и вместо него пишут число $\frac{ab}{|a-b|}$ (которое может уже оказаться нецелым). С полученной парой чисел делают ту же операцию и т. д. Докажите, что в некоторый момент на доске окажутся два равных натуральных числа.

Линейное представление НОД

1. Сколько существует пар целых чисел (x, y) таких, что $ax + by = (a, b)$?

2. На прямой сидит блоха, которая может прыгать либо на 15 сантиметров влево, либо на 21 сантиметр вправо. В каких точках прямой она может побывать?

3. **(a)** Пусть $au+bv = 1$, где a, b, u и v — некоторые целые числа. Докажите, что НОД$(a, b) = 1$.

(b) Пусть $au + bv = 2$. Верно ли, что НОД$(a, b) = 2$?

4. У Пети есть уголок с углом 82°. Сколько раз ему нужно воспользоваться этим уголком, чтобы нарисовать угол в 2°?

5. В банке 500 долларов. Разрешаются две операции: взять из банка 300 долларов или положить в него 198 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банка и как это сделать?

6. В классе химии имеются 25 пробирок объема 1, 2, ..., 25 мл. Когда химики стали собираться в ЛМШ, оказалось, что у них осталось мало места, и они могут взять только набор из 10 пробирок. Химики хотят, чтобы с помощью любых двух пробирок из набора можно было отмерить 1 мл. Сколькими способами можно составить такой набор?

7. У ресторана, где проводится торжественный вечер, есть столы на 12 и на 7 человек. На торжественный вечер организаторы хотят пригласить лучших работников, однако помимо работников на этот вечер хочет прийти неизвестное число гостей из городской администрации. По соображениям безопасности, все столы, использованные для вечера должны быть заняты полностью. Какое наименьшее число работников должны пригласить организаторы, чтобы независимо от количества людей из администрации вечер не сорвался?

8. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явились 28 членов профсоюза и 37 не членов, причём Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну — не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?

9. Бильярдный стол имеет форму прямоугольника $m \times n$, в углах которого расположены лунки. Из левого нижнего угла выпускают шар под углом 45° к сторонам стола. Сколько раз шарик ударится о края стола прежде чем упасть в лунку?

source:algebra/number-theory/bezout-identity-g8/r3.tex

Китайская теорема об остатках

1. Найдите остаток от деления натурального числа на 30, если при делении на 15 оно дает остаток 7, а при делении на 6 остаток 4.

2. Пусть a и b — взаимно простые числа, а m и n дают одинаковые остатки при делении на a и при делении на b. Докажите, что $m - n$ делится на ab.

3. У генерала не более 5000 солдат. Сначала он пытался построить их в две равные шеренги, но ему не хватило одного солдата. Потом он пытался сделать тоже самое для трех, четырех, ..., десяти шеренг и все время у него не хватало одного солдата. Докажите, что он сможет построить солдат в 11 равных шеренг.

4. **(a)** Лев загадал число от 0 до 60 и сказал, что при делении на 5 оно даёт остаток 3, при делении на 4 даёт 2 и делится на 3. Денис Владимирович уверен, что точно знает загаданное число. Прав ли он?
(b) А если задумано число от 1 до 180?

5. **Китайская теорема об остатках (КТО).** Пусть $m_1, m_2, ..., m_n$ — попарно взаимно простые числа. Тогда для любых целых $r_1, r_2, \dots, r_n$ существует натуральное x такое, что

$$x \equiv_{m_1} r_1, \quad x \equiv_{m_2} r_2, \quad \dots, \quad x \equiv_{m_n} r_n.$$

Более того, среди чисел, не превосходящих $m_1 m_2 \dots m_n$, такое число единственно.
(a) Докажите КТО для $n = 2$.
(b) Докажите КТО для произвольного n методом математической индукции.
(c) Пусть x и y дают одинаковые остатки при делении на $m_1, ..., m_n$. Докажите, что $x - y \,\vdots\, m_1 m_2 \dots m_n$ и выведите отсюда КТО.
(d) С помощью линейного представления НОД докажите, что такое x существует при $r_1 = 1, r_2 = 0, r_3 = 0, ..., r_n = 0$. Используя это соображение, докажите КТО.
(e) С помощью функции Эйлера найдите какое-нибудь x, дающее остаток 1 при делении на m_1 и остаток 0 при делении на $m_2, m_3, ..., m_n$. Докажите КТО.

6. Попробуем избавится от условия взаимной простоты в условии КТО. Пусть есть натуральные $m_1, ..., m_n$, и для любых i, j есть x такое, что $x \equiv_{m_i} r_i$ и $x \equiv_{m_j} r_j$. Докажите, что тогда утверждение КТО выполнено.

7. Пусть для натуральных $m_1, ..., m_n$, и целых $r_1, \dots, r_n$ нашлось натуральное x такое, что

$$x \equiv_{m_1} r_1, \quad x \equiv_{m_2} r_2, \quad \dots, \quad x \equiv_{m_n} r_n.$$

А сколько существует таких x среди чисел от 1 до $m_1 m_2 \dots m_n$?

8. Пусть $m_1, m_2, \dots, m_n$ — попарно взаимно простые числа. Тогда для любых целых $r_1, r_2, \dots, r_n$ существует натуральное x такое, что

$$x + 1 \equiv_{m_1} r_1, \quad x + 2 \equiv_{m_2} r_2, \quad \dots, \quad x + n \equiv_{m_n} r_n.$$

9. Существует ли в сутках момент, когда расположенные на общей оси часовая, минутная и секундная стрелки правильно идущих часов образуют попарно углы в 120°?

source:algebra/number-theory/chinese-remainder-theorem-g8.tex

Натуральные уравнения

1. *Задача о размене монет.* Пусть в некоторой стране есть монеты достоинством a и b тугриков, где a и b взаимно просты. Докажите, что:

(a) любую сумму, не меньшую, чем $(a-1)(b-1)$ тугриков, можно заплатить без сдачи;

(b) если x тугриков можно заплатить без сдачи, то $ab-a-b-x$ тугриков заплатить без сдачи нельзя;

(c) если $x < (a-1)(b-1)$ тугриков нельзя заплатить без сдачи, то $ab-a-b-x$ — можно.

(d) Не пользуясь соображениями двух предыдущих пунктов докажите, что сумм, которые меньше, чем $(a-1)(b-1)$ и которые можно заплатить без сдачи, ровно $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$.

2. При каких N уравнение $5x+8y=N$ имеет 6 решений в натуральных числах?

3. При каком наибольшем N уравнение $99x+100y+101z=N$ имеет единственное решение в натуральных числах x, y, z?

source:algebra/number-theory/diophantine-equation-g8/r3.tex

Неравенство средних

1. Пусть $x > 0$. Докажите, что верно $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

2. Что больше: $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ или $2\sqrt{n}$?

3. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше четырех.

4. При каких x дробь $\frac{81+16x^4}{x^2}$ принимает наименьшее значение?

5. Пусть $x + y = 1$. Докажите, что $x^8 + y^8 \geqslant \frac{1}{128}$.

6. Для положительных a, b докажите, что

$$2a^2 + \frac{b}{a} \geqslant \frac{8a^2b}{2a^3 + b}\,.$$

7. Решите уравнение $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

8. Докажите, что для положительных x, y, z верно неравенство

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz\,.$$

9. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9\,.$$

10. Докажите, что среди прямоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет квадрат.

11. Теплоход прошел путь от пункта A до пункта B и обратно. Докажите, что собственная скорость теплохода больше, чем средняя скорость этого движения.

12. У продавца есть чашечные весы с неравными плечами и гири. Сначала он взвешивает товар на одной чашке, затем — на другой и берет среднее арифметическое двух показаний. Определите, в чью пользу такое «взвешивание»: продавца или покупателя?

13. Пусть a, b, c и d такие положительные числа, что $ab = 1$ и $ac + bd = 2$. Докажите, что $cd \leqslant 1$.

14. Для положительных x, y докажите, что

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{xy}\,.$$

Индукция в неравенствах

1. Докажите, что есть такое n, что $1{,}001^n \geqslant 2017$.

2. Определим L_n как $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Докажите, что $L_n \geqslant 2\sqrt{n+3} - 3$.

3. Определим гармонический ряд H_n как $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.
(a) Докажите, что $H_7 \geqslant 1{,}5$.
(b) Докажите, что $H_{15} \geqslant 2$.
(c) Докажите, что найдется такой n, что $H_n \geqslant 2017$.

4. Положим величину T_n равной $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)$. Докажите, что $T_n \geqslant \sqrt{2n+1}$.

5. Сформулируем неравенство средних для n переменных:
для любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ верно:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

(a) Докажите неравенство, когда n — степень двойки.
(b) Докажите, что если неравенство верно для любых n переменных, то оно верно и для любых $n-1$ переменных.
(c) Докажите, что неравенство выполнено для любых n переменных.

6. Докажите, что для любого n выполнено неравенство
(a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} < 1$;
(b) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$.

source:algebra/inequality/induction-g8/r3.tex

Винегрет из неравенств

1. **(a)** Разложите $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ на множители.
(b) Из предыдущего пункта выведите, что если a, b, c неотрицательные, то верно неравенство $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$.

2. Натуральные a, b, c таковы, что $a + b + c = 100$. Какое наибольшее значение может принимать величина $ab + bc + ca$?

3. *(Неравенство Несбитта)* Для положительных a, b, c докажите, что верно

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

4. Известно, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$. Докажите, что
(a) $a^2b + b^2c + c^2a \geqslant ab^2 + bc^2 + ca^2$;
(b) $a^3b + b^3c + c^3a \geqslant ab^3 + bc^3 + ca^3$.

source:algebra/inequality/mixture-g8.tex

Центральная симметрия

1. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A'B'C'$ равны стороны $BA = B'A'$ и $BC = B'C'$ и медианы $BM = B'M'$, то эти треугольники равны.

2. В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение медианы BM к стороне BC.

3. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол MKN — прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

4. В треугольнике ABC точка M — середина AC. На стороне BC взяли точку K так, что угол BMK прямой. Оказалось, что $BK = AB$. Найдите $\angle MBC$, если $\angle ABC = 110°$.

5. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

6. В треугольнике ABC медиана, проведённая из вершины A к стороне BC, в четыре раза меньше стороны AB и образует с ней угол $60°$. Найдите угол BAC.

7. В центре квадратного пруда плавает ученик. Внезапно к вершине квадрата подошёл учитель. Учитель не умеет плавать, но бегает в 4 раза быстрее, чем ученик плавает. Ученик бегает быстрее. Сможет ли он убежать?

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC и CD равны, M — середина стороны AD. Известно, что угол BMC равен $90°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

source:geometry/point-reflection-g8/r3.tex

Крутой поворот

1. В ромбе $ABCD$ угол ABC равен $120°$. На сторонах AB и BC взяты точки P и Q так, что $AP = BQ$. Докажите, что треугольник PQD равносторонний.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABK и BCL. Докажите, что отрезки AL и KC имеют одинаковую длину и найдите угол между ними.

3. Внутри квадрата $ABCD$ дана точка P. Докажите, что прямая, проходящая через точку A перпендикулярно BP, прямая, проходящая через точку B перпендикулярно CP, прямая, проходящая через точку C перпендикулярно DP, и прямая, проходящая через точку D перпендикулярно AP, пересекаются в одной точке.

4. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

5. На сторонах AB и BC дельтоида $ABCD$ ($AB = AD$, $CB = CD$) построены правильные треугольники ABE (наружу) и BCF (внутрь). Докажите, что точки D, E и F лежат на одной прямой.

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно. Оказалось, что $AP + CQ = AC$. Докажите, что точки P и Q равноудалены от точки пересечения биссектрис треугольника ABC.

7. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что точка A и середины отрезков BD и EF являются вершинами правильного треугольника.

8. Внутри треугольника ABC нашлась точка T такая, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Докажите, что для любой точки P верно неравенство $AP + BP + CP \geqslant AT + BT + CT$.

9. На двух сторонах AB и BC правильного $2n$-угольника взяты соответственно точки K и N, причем угол KEN, где E — вершина, противоположная B, равен $\frac{180°}{2n}$. Докажите, что NE — биссектриса угла KNC.

source:geometry/rotation-g8/r3.tex

Перекладывание отрезков

1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выполнено $\angle ABD = 90°$ и $AD = BC + CD$. Найдите отношение AD к BC.

2. В треугольнике ABC биссектриса AE равна по длине отрезку CE. Также известно, что $2AB = AC$. Найдите величину угла B.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на боковую сторону BC опущена высота AH. Точка L — основание перпендикуляра из H на сторону AB. Оказалось, что $AL = AB/4$. Найдите угол ABC.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено $\angle B = \angle C = 120^{circ}$ и $BC + CD = AB$. Докажите, что $AC = AD$.

5. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Известно, что $\angle ABC = 2\angle ACB + \angle BAC$. Докажите, что $AB + CL = AC$.

6. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I. Известно, что $CA + AI = BC$. Найдите отношение углов BAC и CBA.

7. В треугольнике ABC угол B вдвое больше угла C, а угол A — тупой. Точка K на стороне BC такова, что угол KAC — прямой. Докажите, что $KC = 2AB$.

8. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BC = CD$. На катете BC взята такая точка E, что $DE = CE$. Докажите равенство $AD + BE = DE$.

9. Диагональ AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ делится точкой пересечения диагоналей пополам. Известно, что $\angle ADB = 2\angle CBD$. На диагонали BD нашлась такая точка K, что $CK = KD + AD$. Докажите, что $\angle BKC = 2\angle ABD$.

source:geometry/equal-segments-g8/r3.tex

Перекладывание треугольников

1. Пусть даны два треугольника, ABC и DEF, у которых равны две стороны $AB = DE$ и $BC = EF$ и угол не между ними $\angle A = \angle D$. Докажите, что тогда верно одно из следующих утверждений: либо эти треугольники равны, либо треугольники различны, но их соответственные углы $\angle C$ и $\angle F$ дополняют друг друга до 180°.

2. Пусть даны два треугольника, ABC и DEF, у которых углы $\angle C$ и $\angle F$ дополняют друг друга до 180° и $BC = EF$. Докажите, что $AB = DE$ тогда и только тогда, когда $\angle A = \angle D$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ внешний угол при вершине A равен $\angle BCD$, а $AD = CD$. Докажите, что BD — биссектриса угла ABC.

4. Пусть K — середина стороны BC треугольника ABC. На лучах AB и AC взяты точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = AY$ и точка K лежит на отрезке XY. Докажите, что $BX = CY$.

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$, на сторонах AB и CD соответственно выбраны точки K и M. Оказалось, что $AM = KC$, $BM = KD$. Докажите, что угол между прямыми AB и KM равен углу между прямыми KM и CD.

6. На стороне AC равностороннего треугольника ABC взяли точку D, а на продолжении стороны BC за точку C взяли точку F так, что $BD = DF$. Докажите, что $AD = CF$.

7. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I. Найдите $\angle C$, если $A_1I = B_1I$.

8. Обязательно ли треугольник равнобедренный, если точка пересечения биссектрис одинаково удалена от середин двух сторон?

source:geometry/equal-triangles-g8/r3.tex

Закрепление навыков

1. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен $108°$. Перпендикуляр к биссектрисе AD этого треугольника, проходящий через точку D, пересекает основание AC в точке E. Докажите, что $BD = DE$.

2. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC, точка N — середина стороны CD, P — точка пересечения отрезков BN и MD. Докажите, что $\angle BPM = \angle MAN$.

3. В равностороннем пятиугольнике $KLMNP$ верно соотношение $\angle KLM = 2\angle NLP$. Найдите угол KLM.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняются равенства $\angle B = \angle C$ и $CD = 2AB$. На стороне BC выбрана точка X такая, что $\angle BAX = \angle CDA$. Докажите, что $AX = AD$.

5. Дан прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A = 90°$. BL — биссектриса угла B, а точка K на стороне BC такова, что $\angle BLK = 90°$. Оказалось, что $3KC = 2(BC - AB)$. Найдите $\angle C$.

6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и CF. Докажите, что если $\angle CFL = 30°$, то либо $\angle A = 60°$, либо $\angle B = 120°$.

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Оказалось, что $AB + AD = CD$ и $AC + AD = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

source:geometry/mixture-g8/r3.tex

Принцип крайнего

1. Можно ли на клетчатой плоскости расставить конечное число ладей таким образом, чтобы каждая из них била не менее трех других?

2. В каждой клетке
(a) таблицы 100×100 **(b)** бесконечной клетчатой плоскости
расставлены числа, причем число в любой клетке равно среднему арифметическому чисел во всех соседних по стороне клетках. Верно ли, что все числа обязательно равны друг другу?

3. Банда из 25 гангстеров устроила перестрелку, в которой каждый из них получил пулю от ближайшего гангстера (они сидели в укрытиях и не перемещались, все попарные расстояния между ними были различны). Докажите, что какой-то гангстер не подстрелил никого.

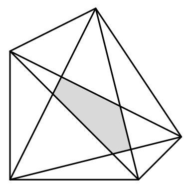
4. В вершинах n-угольника расставлены m фишек ($m > n > 2$). За ход можно выбрать какую-нибудь вершину, снять с нее две фишки (если они там есть) и добавить по одной фишке к ее соседним вершинам. Докажите, что если через несколько ходов в каждой вершине будет находиться столько же фишек, сколько в ней было изначально, то количество совершённых ходов будет кратно n.

5. На столе лежат (необязательно одинаковые) монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не задевая остальных.

6. Докажите, что у выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

7. На плоскости проведено несколько (больше одной) прямых *общего положения*, т. е. попарно непараллельных прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Эти прямые разбивают плоскость на части. Докажите, что среди частей разбиения есть хотя бы
(a) одна часть **(b)** три части
являющиеся внутренностями угла.

8. На клетчатой плоскости нарисован выпуклый пятиугольник, все вершины которого находятся в узлах решетки.



(a) Докажите, что середина некоторой стороны или диагонали находится в узле решетки.
(b) Докажите, что строго внутри пятиугольника есть по крайней мере один узел решетки.
(c) Докажите, что внутри или на границе пятиугольника, образованного диагоналями исходного, есть по крайней мере один узел решетки.

9. *Теорема Сильвестра.* **(a)** На плоскости дано конечное множество точек. Известно, что любая прямая, соединяющая какие-то две точки множества, содержит по крайней мере

еще одну точку множества. Докажите, что все точки множества лежат на одной прямой.
(b) На плоскости дано конечное множество непараллельных друг другу прямых. Известно, что через любую точку пересечения прямых множества проходит по крайней мере еще одна прямая множества. Докажите, что все прямые множества пересекаются в одной точке.

source:combinatorics/extreme-principle-g8/r3.tex

source:combinatorics/extreme-principle-g8/pentagon.asy

Графы. Пути и расстояния

Определение. *Расстоянием* $\rho(u, v)$ между двумя вершинами u и v одной компоненты связности графа G назовём минимальное возможное число рёбер в маршруте из u в v. *Диаметром* $d(G)$ связного графа G назовём максимальное расстояние между его вершинами.

1. Каждая вершина графа имеет степень не менее k, где $k > 1$. Докажите, что в графе найдётся простой цикл длины не менее $k + 1$.

2. Диаметр связного графа G больше 2. Докажите, что диаметр антиграфа к G не больше 3.

3. В графе между любыми двумя вершинами существует простая цепь чётной длины. Докажите, что между любыми двумя вершинами существует простая цепь нечётной длины.

4. В некотором графе 100 вершин, 200 рёбер и нет простых циклов длины 3 и 4. Докажите, что в графе найдутся два простых цикла, не имеющих общих вершин.

5. В графе 100 вершин; степень каждой вершины не меньше 3. Докажите, что в графе существует простой цикл длины не более 12.

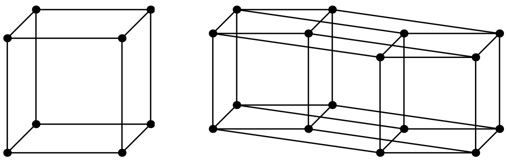
6. Несколько деревень соединены дорогами, причём длина каждой дороги меньше 10 км. Известно, что из любой деревни до любой другой можно добраться, проехав меньше 10 км. Одну дорогу закрыли, но всё ещё можно добраться из любой деревни до любой другой. Докажите, что это можно сделать, проехав меньше 30 км.

source:combinatorics/graph/distance-g8/r3.tex

Неявные графы

1. Куб $n \times n \times n$ разбит на кубики $1 \times 1 \times 1$. Какое минимальное количество граней 1×1 необходимо в нем убрать, чтобы из любой его части можно было пробраться наружу?

2. На какое наименьшее число частей надо разрезать проволоку длиной
(a) 12 **(b)** 32,
чтобы из них можно было сложить каркас
(a) трехмерного **(b)** четырехмерного
кубика с ребром 1?



3. Дана таблица $m \times n$, некоторые ее клетки закрашены. За одну операцию разрешается выделить четыре клетки в пересечении двух (не обязательно соседних) строк и двух столбцов, три из которых закрашены, и закрасить четвертую клетку. Какое наименьшее число закрашенных клеток надо иметь в начале, чтобы закрасить всю таблицу?

4. В каждой клетке доски $m \times n$ прорезали одну из диагоналей. На какое минимальное число частей она могла распасться?

5. В городе Прямоугольницке схема улиц представляет из себя прямоугольную сетку $m \times n$. На некоторых улицах (но не на перекрестках) стоят полицейские и записывают направление и момент времени проезжающих мимо машин. Какое минимальное число полицейских должно стоять на улицах города, чтобы можно было однозначно восстановить любой замкнутый маршрут и направление движения автомобиля (машина не ездит по одной улице дважды)?

6. Дан прямоугольник. Провели $n-1$ горизонтальных разрезов и $n-1$ вертикальных, изначальный прямоугольник разрезался на n^2 прямоугольников. На каждый из этих n^2 прямоугольников положили карточку с написанной на ней площадью этого маленького прямоугольника числом вниз. Какое минимальное число карточек нужно перевернуть, чтобы узнать площадь изначального прямоугольника?

7. Поверхность кубика $5 \times 5 \times 5$ покрашена в три цвета (в черный и еще в два) *правильным образом*, т. е. любые два квадратика, соседние по стороне, раскрашены в разные цвета. Какое минимальное число квадратиков могло быть покрашено в черный цвет?

source:combinatorics/graph/hidden-g8/r3.tex

source:combinatorics/graph/hidden-g8/cube.asy

source:combinatorics/graph/hidden-g8/cube4.asy

Индукция, спуск и минимальный контрпример

1. Выпуклый n-угольник ($n \geqslant 3$) разбит непересекающимися диагоналями на треугольники (диагонали могут иметь общие концы).
(a) Сколько диагоналей проведено?
(b) Докажите, что найдутся хотя бы две вершины, из которых не выходит ни одной диагонали.

2. В каждой клетке доски $3 \times n$ стоит фишка одного из трех цветов, причем всего фишек каждого цвета на доске поровну. Внутри каждой из трех строк разрешается переставлять фишки в любом порядке. Докажите, что их можно расставить так, что в каждом столбце будут фишки всех трех цветов.

3. На плоскости дано $n \geqslant 3$ точек, любые две из которых соединены ровно одной стрелкой.
(a) Докажите, что можно выбрать некоторую точку и, двигаясь по стрелкам, обойти все точки ровно по одному разу.
(b) Известно, что из любой точки можно добраться до любой другой, двигаясь по стрелкам. Докажите, что существует цикл, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу.

4. Дана таблица $m \times n$. Какое наибольшее число клеток в ней можно отметить так, чтобы никакие три центра отмеченных клеток не образовывали прямоугольный треугольник?

5. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета таким образом, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.

6. В каждой из n вершин связного графа записаны два целых неотрицательных числа: красное и синее; известно, что сумма всех красных чисел равна сумме всех синих. Изначально в каждую вершину графа кладут монеты, количество которых совпадает с красным числом. За одну операцию разрешается переложить из любой вершины несколько монет в соседнюю вершину. Докажите, что не более чем за $n-1$ операций можно добиться того, чтобы количества монет в вершинах совпали с синими числами.

7. *Письменная задача.* Петя и Вася играют в игру на клетчатой доске $n \times n$. Изначально вся доска белая, за исключением угловой клетки — она черная, и в ней стоит ладья. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок передвигает ладью по горизонтали или вертикали, при этом все клетки, через которые ладья перемещается (включая ту, в которую она попадает), перекрашиваются в черный цвет. Ладья не должна передвигаться через черные клетки или останавливаться на них. Проигрывает тот, кто не может сделать ход; первым ходит Петя. Кто выиграет при правильной игре?

source:combinatorics/descent-g8/r3.tex

Глава 4

9-1

Письменная вступительная олимпиада

1. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H, а биссектрисы AA_2 и CC_2 в точке I. Оказалось, что $\angle AHC = \angle AIC$. Найдите угол ABC.

2. 6 команд играют между собой чемпионат. В каждом туре встречаются какие-то 3 пары команд, не игравшие между собой ранее. В какой-то момент выяснилось, что очередной тур провести невозможно. Определите наименьший номер тура, в котором это могло произойти.

3. Найдите все натуральные x, y, z такие, что $4^x + 3^y = z^2$.

4. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки X и Z соответственно. Отрезки CX и BZ пересекаются в точке Y. Оказалось, что пятиугольник $AXYZD$ — вписанный. Докажите, что $AY = DY$.

5. Вася написал на доске 99 вещественных чисел. Пусть A — квадрат суммы Васиных чисел, а B — сумма их квадратов, умноженная на 100. Докажите, что Петя может поменять знаки у некоторых Васиных чисел так, чтобы квадрат суммы всех чисел стал не больше, чем $B - A$.

6. Дан клетчатый квадрат $n \times n$, в котором стерли все клетки выше главной диагонали (идущей из левого верхнего угла в правый нижний). В каждой клетке оставшейся фигуры записывают 0 или 1. При этом, если в какой-то клетке написана единица, то и в соседних с ней по стороне слева и сверху также должна стоять единица. Сколькими способами это можно сделать?

source:olympiad/intro-g9.tex

Приветственный разнобой по теории чисел

1. Дано натуральное число a. Докажите, что при некотором натуральном n у числа $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$ больше миллиона различных простых делителей.

2. Докажите, что $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$.

3. Докажите, что при $m \neq n$ будут взаимно простыми числа:
(a) $a^{2^m} + 1$ и $a^{2^n} + 1$ для чётных a;
(b) $a^{2^{m+1}} - a^{2^m} + 1$ и $a^{2^{n+1}} - a^{2^n} + 1$.

4. Саша перемножил все делители натурального числа n. Федя увеличил каждый делитель на 1, а потом перемножил результаты. Федино произведение нацело делится на Сашино. Чему может быть равно n?

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ делится на $a + b + c$.

6. Существуют ли 10 попарно взаимно простых натуральных чисел, сумма любых двух из которых делится на квадрат некоторого простого числа?

7. Натуральные числа n, a и b таковы, что $(a-1)(b-1)$ не делится на n, однако a^3-1 и b^5-1 делятся на n. Докажите, что если для некоторого натурального k число $a^k b^k - 1$ делится на n, то k делится на 15.

8. Дано конечное множество простых чисел P. Докажите, что найдётся такое натуральное число x , что оно представляется в виде $x = a^p + b^p$ (с натуральными a, b) при всех $p \in P$ и не представляется в таком виде для любого простого $p \notin P$.

9. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, у которых сумма делителей — точный квадрат.

source:algebra/number-theory/remainders-g9/r1.tex

Мультипликативные функции. Функция Эйлера

Теория

Определение. Функция f, определенная на натуральных числах, называется *мультипликативной,* если для любых натуральных взаимно простых a и b выполнено $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$.

1. **(a)** Докажите, что $\sigma(n)$, сумма делителей числа n, является мультипликативной функцией.
(b) Найдите явную формулу для $\sigma(n)$.

2. **(a)** Докажите, что $\varphi(n)$ является мультипликативной функцией.
(b) Найдите явную формулу для $\varphi(n)$.

3. Отметим на бумаге произвольным образом $\varphi(n)$ точек. Каждой точке сопоставим какой-то обратимый остаток при делении на n. Проведем из остатка k стрелочку в остаток ka.
(a) Убедитесь, что из каждой точки выходит одна стрелочка, и в кажду точку входит одна стрелочка.
(b) Поймите, что тогда все точки разбиваются на циклические маршруты.
(c) Докажите, что у всех циклических маршртутов одна и та же длина и она делит $\varphi(n)$.
(d) Выведите отсюда теорему Эйлера.

4. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$. Рассмотрим число

$$M = \left[p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1),\ p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1),\ \ldots,\ p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)\right].$$

Докажите, что если $(a, n) = 1$, то $a^M \equiv 1 \pmod{n}$.

Задачи

5. Найдите все натуральные n, для которых
(a) $\varphi(n) = 12$; **(b)** $\varphi(n) = 14$; **(c)** $\varphi(n) = \frac{n}{2}$; **(d)** $\varphi(n) = \frac{n}{4}$.

6. Докажите, что существует лишь конечное количество таких n, что $\varphi(n) < 10^9$.

7. Найдите остаток числа $4^{5^{6^7}}$ при делении на 2017.

Сложные задачи

8. Назовем натуральное число *совершенным,* если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, не считая самого числа. Докажите, что любое четное совершенное число имеет вид $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, где p и $2^p - 1$ — простые числа.

9. Докажите, что сумма квадратов делителей натурального числа меньше его квадрата.

Показатели

1. **Важно запомнить.** Пусть d — показатель a по модулю n.
(a) Докажите, что числа $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{d-1}$ дают разные остатки при делении на n.
(b) Пусть $a^l \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что $l \,\vdots\, d$.

Кто-то видел, кто-то нет, но полезно знать

2. Докажите, что если показатель числа a по модулю n равен $n-1$, то n — простое число.

3. Докажите, что если $a > 1$, то n делит $\varphi(a^n - 1)$.

4. **(a)** Пусть p — нечетное простое число. Докажите, что любой простой делитель числа $a^p - 1$ или делит $a-1$, или имеет вид $2px+1$.
(b) Выведите отсюда, что для любого простого p среди чисел вида $2pk+1$ бесконечно много простых.

5. **(a)** Докажите, что любой нечетный простой делитель числа $a^{2^k}+1$ имеет вид $2^{k+1}x+1$.
(b) Докажите, что для любого k простых чисел вида $2^{k+1}x+1$ бесконечно много.

Разное

6. Чему равен показатель 2017 по модулю 2^{2017}?

7. Докажите, что если $n > 1$, то $2^n - 1$ не делится на n.

8. Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^p + q^q + 1$ делится на pq.

9. Найдите все тройки простых чисел p, q и r такие, что $q^r + 1 \,\vdots\, p$, $r^p + 1 \,\vdots\, q$, $p^q + 1 \,\vdots\, r$.

source:algebra/number-theory/exponent-g9/r1.tex

Уравнения в целых числах — 1

1. Найдите все такие натуральные m, n и k, что $m! + n! = 5^k$.

2. Докажите, что не существует таких натуральных x, y и z, что:
(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 7^{2017}$;
(b) $x^2 + y^2 = 437 \cdot 2^{100}$.

3. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2^{2017}$?

4. Решите в натуральных числах $3^n + 1 = 2^m$.

5. При каких p существуют такие натуральные m и n, что $m^6 - 4n^3 + 3^p = 0$?

6. Решите в натуральных числах $(3x + 4y)(25x + 24y) = 7^{2017}$.

7. Существует ли такое простое число p и натуральные x, y, z, что $(12x + 5)(12y + 7) = p^z$?

8. Решите в целых неотрицательных числах $2^x \cdot 3^y + 1 = 7^z$.

9. Существуют ли такие целые x, y, z, что:
(a) $x^3 + y^3 + z^3 = 2011$;
(b) $x^3 + y^3 + z^3 = 2016$?

10. Найдите все такие натуральные m и k, что $1^m + 2^m + 3^m = 6^k$.

11. Найдите такие простые p и q, что $p^2 + 1 \mid 2003^q + 1$ и $q^2 + 1 \mid 2003^p + 1$.

source:algebra/number-theory/diophantine-equation-g9/1-r1.tex

Уравнения в целых числах — 2. Одна идея + разное

1. Решите в натуральных числах $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

2. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых выражение $p^2 + 5pq + 4q^2$ является квадратом натурального числа.

3. Для каких натуральных n число $n^{10} + n^5 + 1$ простое?

4. Для каких простых p существуют такие натуральные a, b, c, что

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\,?$$

5. Найдите все такие натуральные n, при которых число $5^n - 1$ можно представить в виде произведения четного числа последовательных натуральных чисел.

6. При каких натуральных n число $n^3 + 2n^2 + 11$ является кубом натурального числа?

7. При каком основании системы счисления число 11010 является полным квадратом?

8. Найдите все пары натуральных a и b таких, что числа $a^3 + 6ab + 1$ и $b^3 + 6ab + 1$ являются точными кубами?

9. Для какого наименьшего t существуют такие натуральные x_1, x_2, ..., x_t, что

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_t^3 = 2002^{2002}\,?$$

10. Докажите, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов нескольких различных целых чисел.

`source:algebra/number-theory/diophantine-equation-g9/2-r1.tex`

Касательные к окружности

1. Дан треугольник ABC.

(a) Вписанная окружность касается его стороны AC в точке X, а вневписанная окружность касается этой стороны в точке Y. Докажите, что $AX = CY$.

(b) Вневписанные окружности касаются его сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что $AK = CL$.

2. **(a)** Дан описанный четырехугольник $ABCD$. В треугольники ABC и ACD вписаны окружности. Докажите, что они касаются диагонали AC в одной и той же точке.

(b) Дан произвольный четырехугольник $ABCD$. В треугольники ABC и ACD вписаны окружности, которые касаются диагонали AC в точках K и L. В треугольники ABD и BCD вписаны окружности, которые касаются диагонали BD в точках M и N. Докажите, что $KL = MN$.

3. Из центра каждой из двух данных окружностей проведены касательные к другой окружности. Докажите, что хорды, соединяющие точки пересечения касательных с окружностями, равны.

4. Дан правильный треугольник ABC. Через вершину B проводится проводится произвольная прямая l, лежащая вне треугольника. Окружность α касается прямой l, стороны AB и продолжения CA за точку A. Окружность β касается прямой l, стороны BC и продолжения CA за точку C. Докажите, что сумма радиусов окружностей α и β не зависит от прямой l.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. В треугольники ABC и ACD вписаны окружности с радиусами r_1 и r_2. В треугольники ABD и BCD вписаны окружности с радиусами r_3 и r_4. Докажите, что

(a) центры этих окружностей образуют прямоугольник;

(b) $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$.

6. D — точка на стороне BC треугольника ABC. В треугольники ABD, ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K. Докажите, что длина отрезка AK не зависит от положения точки D на BC.

7. Внутри угла AOD проведены лучи OB и OC, причем $\angle AOB = \angle COD$. В углы AOB и COD вписаны непересекающиеся окружности. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных к этим окружностям лежит на биссектрисе угла AOD.

8. Дан треугольник ABC. Вневписанные окружности касаются сторон AB и BC в точках X и Y. Точки M и N — середины отрезков AC и XY. Докажите, что MN параллельна биссектрисе угла B.

Геометрический винегрет

1. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане CL. Докажите, что в треугольнике BKL также одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
2. Из листа бумаги в клетку вырезали квадрат 2×2. Используя только линейку без делений и не выходя за пределы квадрата, разделите его диагональ на 6 равных частей.
3. Квадрат и прямоугольник одинакового периметра имеют общий угол. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника лежит на диагонали квадрата.
4. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC и углом $A = 50°$. На катете CB взяли точки X и Y такие, что $\angle CAX = \angle BAY = 10°$. Докажите, что $CX : YB = 2 : 1$.
5. В остроугольном треугольнике один из углов равен 60 градусов. Докажите, что прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения высот, отсекает от него равносторонний треугольник.
6. Дан треугольник ABC. Обозначим через A', B' и C' основания внешних биссектрис данного треугольника. Докажите, что данные точки лежат на одной прямой.
7. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом α при вершине A. Дуга BC с градусной мерой β построена вовсе треугольника. Нашлись два луча, проходящие через вершину B, которые делят сторону BC и дугу BC на три равные части. Найдите отношение α и β.

source:geometry/mixture-2-g9.tex

Перечислительная комбинаторика

1. В городе n городов, соединённых попарно дорогами. Скольким количеством способов на каждой из дорог можно выбрать направление движения так, чтобы существовал хотя бы один циклический маршрут (возможно, проходящий не по всем городам)?

2. Сколькими способами в классе из 20 человек можно выбрать две непересекающиеся группы?

3. **(a)** Сколькими способами можно выстроить класс из 20 человек в хоровод, чтобы Петя был на одинаковом расстоянии от Кати и Маши?
(b) Сколькими способами можно выстроить класс из 20 человек в очередь, чтобы Петя находился на одного человека ближе к Кате, чем к Маше?

4. Назовем девятизначное число *хорошим,* если в нем можно переставить одну цифру на другое место и получить девятизначное число, в котором цифры идут строго по убыванию. Сколько всего хороших чисел?

5. Имеется 20 человек — 10 юношей и 10 девушек. Сколько существует способов составить компанию, в которой было бы одинаковое число юношей и девушек?

6. Сколько существует десятизначных чисел, в которых цифры не возрастают?

7. Сколькими способами можно выставить от 0 до 100 баллов за ЕГЭ отличнице Кате и двоечнику Пете, чтобы у Кати было баллов больше, чем у Пети, и не меньше 50?

8. Сколькими способами можно разрезать палку длины 2017 на 3 части целой длины так, чтобы потом из этих частей можно было бы сложить треугольник?

9. В обществе из n членов каждое непустое подмножество считается комиссией. В каждой комиссии нужно выбрать одного из членов председателем, соблюдая правило: если комиссия C является объединением нескольких меньших комиссий (возможно, пересекающихся), то председателем C должен быть один из председателей этих меньших комиссий. Сколькими способами можно выбрать председателей?

10. Назовем натуральное число *интересным,* если оно — степень тройки или представимо в виде суммы различных степеней тройки. Интересные числа занумеровали по возрастанию. Найдите сотое интересное число.

11. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается тройка, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

source:combinatorics/counting-g9/r1.tex

Соответствия

1. Сколько существует разных способов разбить число 2014 на натуральные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются *приблизительно равными,* если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

2. Докажите, что число всех цифр в последовательности 1, 2, 3, ..., 10^k равно числу всех нулей в последовательности 1, 2, 3, ..., 10^{k+1}.

3. Десятизначное число назовем *хорошим,* если у него сумма первой и последней цифр равна сумме второй и предпоследней, равна сумме третьих с конца и с начала, и т. д. Каких хороших чисел больше: четных, или нечетных?

4. Для каждого трехзначного числа берем произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех трехзначных чисел, складываем. Сколько получится? (Разумеется, если хотя бы одна из цифр числа — ноль, то и произведение равно нулю).

5. **(a)** Докажите, что количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых равно количеству разбиений числа n в сумму слагаемых, не превосходящих k.
(b) Докажите, что количество разбиений числа n равно количеству разбиений числа $2n$ в сумму ровно n слагаемых.
(c) Докажите, что количество разбиений числа n в сумму различных слагаемых, равно количеству разбиений числа n в сумму нечетных слагаемых.

6. В школе учатся 400 человек, из них 200 двоечников и 200 отличников. На Новый Год Дед Мороз привез мешок, в котором есть 800 конфет «Миндаль Иванович». Он хочет раздать их все детям, причем каждый двоечник должен получить не больше одной конфеты, а каждый отличник — хотя бы 2 конфеты, причем четное количество. Директор школы решил, кроме того, поощрить отличников, приготовив 600 мандаринов, которые хочет раздать так, чтобы каждому отличнику досталось не менее одного. У кого больше способов раздать свои подарки?

7. Строчку, в которой выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до n, будем называть *ненаглядной,* если для любого k выполнено одно из следующих условий:
(i) число k выписано первым;
(ii) среди чисел, написанных левее k, встречается или $k-1$, или $k+1$.
Найдите число всех ненаглядных строк длины n.

8. Рассмотрим последовательность из n натуральных чисел. Будем называть ее *уморительной,* если вместе с каждым $k \geqslant 2$ в последовательность входит также и число $k-1$, причем первое вхождение $k-1$ встречается до последнего вхождения k. Докажите, что количество уморительных последовательностей равно $n!$.

source:combinatorics/correspondence-g9/r1.tex

Соответствия. Добавка

1. Петя загадал произвольное 23-значное число. Вася утверждает, что может посчитать количество 2017-значных чисел, из которых Петя может получить свое число зачеркиванием нескольких цифр. (Вася не знает Петино число.) Прав ли Вася?

2. По кругу расставили 2017 чисел. Проведем стрелки между числами так, чтобы из каждого числа выходило ровно по 1 стрелке, и в каждое число входило ровно по 1 стрелке. Докажите, что количество способов расставить стрелки так, чтобы числа разбились на 23 цикла, равно количеству способов расставить эти числа в ряд так, чтобы было ровно 23 числа, которые больше всех чисел, стоящих перед ним.

3. Обозначим за $A(n)$ число последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_k$, для которых $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k > 0$ и $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$, причем каждое число $a_i + 1$ является степенью двойки. Обозначим за $B(n)$ число последовательностей $b_1, \ldots, b_m$, для которых $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_m > 0$ и $b_1 + \ldots + b_m = n$, причем $b_j \geqslant 2b_{j+1}$ при всех j от 1 до $m-1$. Докажите, что $A(n) = B(n)$ для всех натуральных n.

source:combinatorics/correspondence-g9/r1-more.tex

Графы

1. В доме отдыха 1999 отдыхающих. Некоторые из них знакомы между собой, причем любые двое незнакомых имеют среди отдыхающих общего знакомого. Каково наименьшее возможное число пар знакомых отдыхающих?

Гамильтоновость

Степень вершины v графа G обозначается $d_G(v)$. Наименьшая из степеней вершин графа G обозначается $\delta(G)$.

Простым путем в графе называется путь, не имеющий самопересечений по вершинам (то есть никакая вершина не встречается в нем дважды). Аналогично, *простым циклом* называется цикл, не имеющий самопересечений по вершинам.

Длиной пути (цикла) называется количество его ребер.

2. Пусть $\delta(G) \geqslant 2$. Докажите, что
(a) в графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$;
(b) в графе G есть простой цикл длины хотя бы $\delta(G) + 1$.

3. Пусть $n > 2$, $v_1 \dots v_n$ — максимальный простой путь в графе G, причем $d_G(v_1)+d_G(v_n) \geqslant n$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины n.

Гамильтоновым путем называется путь, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз. *Гамильтоновым циклом* называется цикл, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз.

4. **Теорема Оре.** В графе n вершин.
(a) Сумма степеней любых двух несмежных вершин больше либо равна $n-1$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.
(b) Сумма степеней любых двух несмежных вершин больше либо равна n. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.

Выведите из этого теорему Дирака:

Теорема Дирака. Пусть в графе N вершин. Тогда
(a) если степени всех вершин не меньше $\frac{N-1}{2}$, то в данном графе существует гамильтонов путь;
(b) если степени всех вершин не меньше $\frac{N}{2}$, то в данном графе существует гамильтонов цикл.

5. Каждый из 4034 человек знаком не менее чем с k из остальных. При каком наименьшем k их гарантированно можно поселить в двухместные номера гостиницы так, чтобы каждый был поселен со своим знакомым?

Антиграф

6. В группе из 100 людей среди любых троих есть человек, знающих обоих других. Докажите, что найдутся 50 попарно знакомых людей.

7. В группе из 100 человек среди любых 50 человек есть человек, который знает всех из этих 50. Докажите, что найдутся 50 попарно знакомых людей.

8. На вечеринку пришло 19 гостей, причем среди любых трех из них есть двое знакомых. Докажите, что гости могут разбиться на 5 групп, в каждой из которых все попарно знакомы.

Подвешивание

9. В государстве 2001 город, некоторые (но не все!) пары городов соединены беспосадочными авиалиниями, причем из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что министерство авиации может открыть новую авиалинию между какими-то двумя городами так, что после этого из любого города в любой другой можно будет долететь, сделав менее 1400 пересадок.

10. В стране 120 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, не проходящими через другие города. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий не более, чем из 11 городов.

source:combinatorics/graph/mixture-g9/r1-1.tex

Графы. Индукция

1. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — набор натуральных чисел, сумма которых равна $2n-2$. Докажите, что существует граф с n вершинами, степени которых равны $a_1, \ldots, a_n$.

2. Докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$.

3. Правительство одной страны разработало 2 типа чипов, которое хочет вживить каждому человеку. Чипы первого типа заставляют людей всегда говорить правду, а чипы второго типа заставляют всегда лгать. Можно ли сделать так, чтобы после того как чипы вживят, каждый человек мог сказать: «У меня есть друг с чипом второго типа»? (Все люди будут знать, у кого какой чип.)

4. В стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением.
(a) Докажите, что существует маршрут, проходящий по всем городам по одному разу.
(b) Оказалось, что из любого города, проехав по дорогам, можно попасть в любой другой. Докажите, что можно проехать по городам, побывав в каждом по разу и вернувшись в начальный город.

5. В компании из n человек среди любых четверых есть человек, знакомый с остальными тремя. Докажите, что есть человек, который знает всех остальных.

6. В вершинах некоторого графа с n вершинами записано по два положительных числа: синее и красное, причем сумма синих равна сумме красных. За один ход можно изменить два синих числа в концах любого одного ребра так, чтобы чтобы они остались положительными и их сумма сохранилась. Докажите, что не более чем за $n-1$ ход можно добиться, чтобы в каждой вершине синее число стало равно красному.

source:combinatorics/graph/mixture-g9/r1-2-induction.tex

Зацикливание

1. Школьник решил сдать Владимиру Алексеевичу зачет по спецкурсу. В. А. оставил на дверях всех комнат школы записки вида «Я в кабинете №...» и исчез в неизвестном направлении. (Разные записки могут сообщать разную информацию.) Школьник начал поиски В. А. с 5-го кабинета, руководствуясь этими указаниями.
(a) Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.
(b) Можно ли утверждать, что школьник когда-нибудь вернется в 5-й кабинет? Верно ли это утверждение, если все записки различны?

2. Докажите, что если натуральное число n не делится ни на 2, ни на 5, то десятичное разложение дроби $1/n$ не имеет предпериода (то есть зацикливание начинается с первого же знака после запятой).

3. Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из собранного положения. Докажите, что кубик можно снова собрать, повторив эту же комбинацию еще несколько раз.

4. Докажите, что для любого n в ряде Фибоначчи существует бесконечно много членов
(a) имеющих остаток 1 при делении на n;
(b) делящихся на n.

5. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан «периодический» текст, например:
...мамамыларамумамамылараму...

6. Назовем сочетанием цифр несколько цифр, записанных подряд. В стране Роботландии некоторые сочетания цифр объявлены запрещенными. Известно, что запрещенных сочетаний конечное число и существует бесконечная десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний. Докажите, что существует бесконечная периодическая десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний.

7. В тридесятом царстве ни одна из дорог не заканчивается тупиком. Рыцарь, Любящий Постоянство, выезжает из своего замка и, доезжая до любого перекрестка, едет по самой левой дороге. Докажите, что в конце концов он попадет таким образом обратно в свой замок.

8. По кругу стоит несколько коробочек. Каждая из них может быть пустой или содержать один или несколько шариков. Сначала из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т. д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

9. На проволоку, имеющую форму окружности, насажено несколько стальных шариков одинакового размера. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями, но некоторые — по часовой стрелке, а некоторые — против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что через некоторое время расположение шариков на окружности совпадет с исходным, если:

(a) шарики неразличимы;

(b) все шарики различны.

source:combinatorics/cycling-g9/r1.tex

Глава 5

9-2

Письменная вступительная олимпиада

1. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H, а биссектрисы AA_2 и CC_2 в точке I. Оказалось, что $\angle AHC = \angle AIC$. Найдите угол ABC.

2. 6 команд играют между собой чемпионат. В каждом туре встречаются какие-то 3 пары команд, не игравшие между собой ранее. В какой-то момент выяснилось, что очередной тур провести невозможно. Определите наименьший номер тура, в котором это могло произойти.

3. Найдите все натуральные x, y, z такие, что $4^x + 3^y = z^2$.

4. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки X и Z соответственно. Отрезки CX и BZ пересекаются в точке Y. Оказалось, что пятиугольник $AXYZD$ — вписанный. Докажите, что $AY = DY$.

5. Вася написал на доске 99 вещественных чисел. Пусть A — квадрат суммы Васиных чисел, а B — сумма их квадратов, умноженная на 100. Докажите, что Петя может поменять знаки у некоторых Васиных чисел так, чтобы квадрат суммы всех чисел стал не больше, чем $B - A$.

6. Дан клетчатый квадрат $n\times n$, в котором стерли все клетки выше главной диагонали (идущей из левого верхнего угла в правый нижний). В каждой клетке оставшейся фигуры записывают 0 или 1. При этом, если в какой-то клетке написана единица, то и в соседних с ней по стороне слева и сверху также должна стоять единица. Сколькими способами это можно сделать?

source:olympiad/intro-g9.tex

Разнобой по сравнениям

1. **(a)** Докажите, что $a^n - b^n$ делится на $a - b$.
   (b) Докажите, что $a^{2k+1} + b^{2k+1}$ делится на $a + b$.

2. Докажите, что при любом натуральном n число $(4^n - 1)^n - 5$ делится на $4^n - 5$.

3. Вася выписал в тетрадку числа вида 100…01 (иными словами, числа вида $10^k + 1$), меньшие 10^{2017}. Докажите, что простых из них не более 1% от общего числа.

4. Натуральные числа a и b таковы, что числа $a^{84} + b^{84}$ и $a^{2017} + b^{2017}$ делятся на 101. Докажите, что $a^{300} + b^{300}$ делится на 101.

5. Докажите, что $29^{113} - 1$ делится на 227.

6. Какой остаток даёт число $4^{5^{6^7}}$ при делении на 2017?

7. При каких натуральных k число $a^3 + b^3 + c^3 - kabc$ делится на $a + b + c$ при всех тройках a, b, c, сумма которых не равна нулю?

8. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ делится на $a + b + c$.

9. Натуральные числа n, a и b таковы, что $(a-1)(b-1)$ не делится на n, однако $a^3 - 1$ и $b^5 - 1$ делятся на n. Докажите, что если для некоторого натурального k число $a^k b^k - 1$ делится на n, то k делится на 15.

source:algebra/number-theory/remainders-g9/r2.tex

Теорема Эйлера. Функция Эйлера

Малая теорема Ферма. Если p — простое число, а a не делится на p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Теорема Эйлера. Если a и n — взаимно простые числа, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

1. Зафиксируем ненулевой остаток a при делении на p. Отметим на бумаге произвольным образом $p-1$ точек. Каждой точке сопоставим какой-то ненулевой остаток при делении на p. Проведем из остатка k стрелочку в остаток ka.
(a) Убедитесь, что из каждой точки выходит одна стрелочка, и в каждую точку входит одна стрелочка.
(b) Поймите, что тогда все точки разбиваются на циклические маршруты.
(c) Докажите, что у всех циклических маршртутов одна и та же длина и она делит $p-1$.
(d) Выведите отсюда малую теорему Ферма.

2. Аналогично докажите теорему Эйлера.

3. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Рассмотрим число

$$M = \left[p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1),\ p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1),\ \dots,\ p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)\right].$$

Докажите, что если $(a, n) = 1$, то $a^M \equiv 1 \pmod{n}$.

4. **(a)** Докажите, что $n^{84} - n^4$ делится на 20400 для любого натурального n.
(b) Можно ли вместо 20400 доказать для какого-то большего числа?

Определение. Функция f, определенная на натуральных числах, называется *мультипликативной,* если для любых натуральных взаимно простых a и b выполнено $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$.

5. **(a)** Докажите, что $\varphi(n)$ является мультипликативной функцией.
(b) Найдите явную формулу для $\varphi(n)$.

6. Найдите все натуральные n, для которых
(a) $\varphi(n) = 12$; **(b)** $\varphi(n) = 14$; **(c)** $\varphi(n) = \frac{n}{2}$; **(d)** $\varphi(n) = \frac{n}{4}$.

7. Докажите, что существует лишь конечное количество таких n, что $\varphi(n) < 10^9$.

source:algebra/number-theory/euler-theorem-g9r2.tex

Вокруг теоремы Эйлера. Показатели

1. При каких n число $7^n - 7$ делится на 15?

2. Докажите, что если $(a, 2016) = 1$, то
(a) $a^{48} - 1$; **(b)** $a^{24} - 1$
делится на 2016.

3. Докажите, что $n^{561} - n$ делится на 561 при всех натуральных n.

4. Докажите, что $2^{32} + 1$ делится на $641 = 2^4 + 5^4 = 5 \cdot 2^7 + 1$.

Зафиксируем взаимно простые числа a и n. Пусть d — наименьшее такое натуральное число, что $a^d - 1$ делится на n. Число d называется *показателем a по модулю n*.

5. **Важно запомнить.** Пусть d — показатель a по модулю n.
(a) Докажите, что числа $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{d-1}$ дают разные остатки при делении на n.
(b) Пусть $a^l \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что $l \,\vdots\, d$.
(c) Докажите, что показатель любого числа по модулю n (взаимно простого с n, конечно) делит $\varphi(n)$.

6. Какие значения могут принимать показатели по модулю 13?

7. Докажите, что если $n - 1$ — это показатель числа a по модулю n, то n — простое число.

8. Докажите, что если $a > 1$, то n делит $\varphi(a^n - 1)$.

9. **(a)** Докажите, что любой нечетный простой делитель числа $a^{2^k} + 1$ имеет вид $2^{k+1}x + 1$.
(b) Докажите, что простых чисел вида $2^{2017}k + 1$ бесконечно много.

10. Чему равен показатель 2017 по модулю 2^{2017}?

`source:algebra/number-theory/exponent-g9/r2.tex`

Уравнения в целых числах. Смотрим по модулю

1. Найдите все такие натуральные m, n и k, что $m! + n! = 5^k$.

2. Докажите, что не существует таких натуральных x, y и z, что:
(a) $x^2 + y^2 = 20152015$;
(b) $x^2 + y^2 + z^2 = 7^{2017}$;
(c) $x^2 + y^2 = 437 \cdot 2^{100}$.

3. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2^{2017}$?

4. Решите в натуральных числах $3^n + 1 = 2^m$.

5. Существуют ли такие целые x, y, z, что:
(a) $x^3 + y^3 + z^3 = 2011$;
(b) $x^3 + y^3 + z^3 = 2016$?

6. Решите в натуральных числах $(3x + 4y)(25x + 24y) = 7^{2017}$.

7. Существует ли такое простое число p и натуральные x, y, z, что $(12x + 5)(12y + 7) = p^z$?

8. Найдите все такие натуральные m и k, что $1^m + 2^m + 3^m = 6^k$.

9. Решите в целых неотрицательных числах $2^x \cdot 3^y + 1 = 7^z$.

source:algebra/number-theory/diophantine-equation-g9/1-r2.tex

Уравнения в целых числах. Делаем алгебраические преобразования

1. Решите в натуральных числах $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.
2. Найдите все такие простые p и q, что $p^2 - 2q^2 = 1$.
3. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых выражение $p^2 + 5pq + 4q^2$ является квадратом натурального числа.
4. Найдите все такие натуральные n, при которых число $5^n - 1$ можно представить в виде произведения четного числа последовательных натуральных чисел.
5. **(a)** Для каких натуральных n число $n^4 + n^2 + 1$ простое?
   (b) Для каких натуральных n число $n^{10} + n^5 + 1$ простое?
6. При каких натуральных n число $n^3 + 2n^2 + 11$ является кубом натурального числа?
7. Решите в натуральных числах $4k^4 + 4k^3 + k + 6 = l^2$.

source:algebra/number-theory/diophantine-equation-g9/2-r2.tex

Касательные к окружности

1. Дан треугольник ABC.

(a) Вписанная окружность касается его стороны AC в точке X, а вневписанная окружность касается этой стороны в точке Y. Докажите, что $AX = CY$.

(b) Вневписанные окружности касаются его сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что $AK = CL$.

2. **(a)** Дан описанный четырехугольник $ABCD$. В треугольники ABC и ACD вписаны окружности. Докажите, что они касаются диагонали AC в одной и той же точке.

(b) Дан произвольный четырехугольник $ABCD$. В треугольники ABC и ACD вписаны окружности, которые касаются диагонали AC в точках K и L. В треугольники ABD и BCD вписаны окружности, которые касаются диагонали BD в точках M и N. Докажите, что $KL = MN$.

3. Из центра каждой из двух данных окружностей проведены касательные к другой окружности. Докажите, что хорды, соединяющие точки пересечения касательных с окружностями, равны.

4. Дан правильный треугольник ABC. Через вершину B проводится проводится произвольная прямая l, лежащая вне треугольника. Окружность α касается прямой l, стороны AB и продолжения CA за точку A. Окружность β касается прямой l, стороны BC и продолжения CA за точку C. Докажите, что сумма радиусов окружностей α и β не зависит от прямой l.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. В треугольники ABC и ACD вписаны окружности с радиусами r_1 и r_2. В треугольники ABD и BCD вписаны окружности с радиусами r_3 и r_4. Докажите, что

(a) центры этих окружностей образуют прямоугольник;

(b) $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$.

6. D — точка на стороне BC треугольника ABC. В треугольники ABD, ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K. Докажите, что длина отрезка AK не зависит от положения точки D на BC.

7. Внутри угла AOD проведены лучи OB и OC, причем $\angle AOB = \angle COD$. В углы AOB и COD вписаны непересекающиеся окружности. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных к этим окружностям лежит на биссектрисе угла AOD.

8. Дан треугольник ABC. Вневписанные окружности касаются сторон AB и BC в точках X и Y. Точки M и N — середины отрезков AC и XY. Докажите, что MN параллельна биссектрисе угла B.

Геометрический винегрет

1. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане CL. Докажите, что в треугольнике BKL также одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

2. Из листа бумаги в клетку вырезали квадрат 2×2. Используя только линейку без делений и не выходя за пределы квадрата, разделите его диагональ на 6 равных частей.

3. Квадрат и прямоугольник одинакового периметра имеют общий угол. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника лежит на диагонали квадрата.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC и углом $A = 50°$. На катете CB взяли точки X и Y такие, что $\angle CAX = \angle BAY = 10°$. Докажите, что $CX : YB = 2 : 1$.

5. В остроугольном треугольнике один из углов равен 60 градусов. Докажите, что прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения высот, отсекает от него равносторонний треугольник.

6. Дан треугольник ABC. Обозначим через A', B' и C' основания внешних биссектрис данного треугольника. Докажите, что данные точки лежат на одной прямой.

7. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом α при вершине A. Дуга BC с градусной мерой β построена вовсе треугольника. Нашлись два луча, проходящие через вершину B, которые делят сторону BC и дугу BC на три равные части. Найдите отношение α и β.

source:geometry/mixture-2-g9.tex

Перечислительная комбинаторика

1. Сколькими способами можно расставить 20 детям в классе баллы за ЕГЭ (от 0 до 100), чтобы *нашелся* ученик, набравший больше 90 баллов?

2. Сколькими способами можно расставить в очередь 20 детей, чтобы между Петей и Катей стояло ровно 4 человека?

3. Сколькими способами в классе из 20 человек можно выбрать две непересекающиеся группы?

4. **(a)** Сколькими способами можно выстроить класс из 20 человек в хоровод, чтобы Петя был на одинаковом расстоянии от Кати и Маши?
(b) Сколькими способами можно выстроить класс из 20 человек в очередь, чтобы Петя находился на одного человека ближе к Кате, чем к Маше?

5. Назовем девятизначное число *хорошим,* если в нем можно переставить одну цифру на другое место и получить девятизначное число, в котором цифры идут строго по убыванию. Сколько всего хороших чисел?

6. Имеется 20 человек — 10 юношей и 10 девушек. Сколько существует способов составить компанию, в которой было бы одинаковое число юношей и девушек?

7. Сколько существует десятизначных чисел, в которых цифры не возрастают?

8. Сколькими способами можно выставить от 0 до 100 баллов за ЕГЭ отличнице Кате и двоечнику Пете, чтобы у Кати было баллов больше, чем у Пети, и не меньше 50?

9. Сколькими способами можно разрезать палку длины 2017 на 3 части целой длины так, чтобы потом из этих частей можно было бы сложить треугольник?

10. В обществе из n членов каждое непустое подмножество считается комиссией. В каждой комиссии нужно выбрать одного из членов председателем, соблюдая правило: если комиссия C является объединением нескольких меньших комиссий (возможно, пересекающихся), то председателем C должен быть один из председателей этих меньших комиссий. Сколькими способами можно выбрать председателей?

11. Назовем натуральное число *интересным,* если оно — степень тройки или представимо в виде суммы различных степеней тройки. Интересные числа занумеровали по возрастанию. Найдите сотое интересное число.

`source:combinatorics/counting-g9/r2.tex`

Соответствия

1. Сколько существует разных способов разбить число 2014 на натуральные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются *приблизительно равными,* если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

2. Для каждого трехзначного числа берем произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех трехзначных чисел, складываем. Сколько получится? (Разумеется, если хотя бы одна из цифр числа — ноль, то и произведение равно нулю).

3. **(a)** Докажите, что количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых равно количеству разбиений числа n в сумму слагаемых, не превосходящих k.
(b) Докажите, что количество разбиений числа n равно количеству разбиений числа $2n$ в сумму ровно n слагаемых.

4. Докажите, что число всех цифр в последовательности 1, 2, 3, ..., 10^k равно числу всех нулей в последовательности 1, 2, 3, ..., 10^{k+1}.

5. Десятизначное число назовем *хорошим,* если у него сумма первой и последней цифр равна сумме второй и предпоследней, равна сумме третьих с конца и с начала, и т. д. Каких хороших чисел больше: четных, или нечетных?

6. Докажите, что у точного квадрата делителей вида $4k + 1$ больше, чем делителей вида $4k - 1$.

7. В школе учатся 400 человек, из них 200 двоечников и 200 отличников. На Новый Год Дед Мороз привез мешок, в котором есть 800 конфет «Миндаль Иванович». Он хочет раздать их все детям, причем каждый двоечник должен получить не больше одной конфеты, а каждый отличник — хотя бы 2 конфеты, причем четное количество. Директор школы решил, кроме того, поощрить отличников, приготовив 600 мандаринов, которые хочет раздать так, чтобы каждому отличнику досталось не менее одного. У кого больше способов раздать свои подарки?

source:combinatorics/correspondence-g9/r2.tex

Графы

1. В доме отдыха 1999 отдыхающих. Некоторые из них знакомы между собой, причем любые двое незнакомых имеют среди отдыхающих общего знакомого. Каково наименьшее возможное число пар знакомых отдыхающих?

Гамильтоновость

Степень вершины v графа G обозначается $d_G(v)$. Наименьшая из степеней вершин графа G обозначается $\delta(G)$.

Простым путем в графе называется путь, не имеющий самопересечений по вершинам (то есть никакая вершина не встречается в нем дважды). Аналогично, *простым циклом* называется цикл, не имеющий самопересечений по вершинам.

Длиной пути (цикла) называется количество его ребер.

2. Пусть $\delta(G) \geqslant 2$. Докажите, что
(a) в графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$;
(b) в графе G есть простой цикл длины хотя бы $\delta(G)+1$.

3. Пусть $n > 2$, $v_1 \dots v_n$ — максимальный простой путь в графе G, причем $d_G(v_1)+d_G(v_n) \geqslant n$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины n.

Гамильтоновым путем называется путь, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз. *Гамильтоновым циклом* называется цикл, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз.

4. **Теорема Оре.** В графе n вершин.
(a) Сумма степеней любых двух несмежных вершин больше либо равна $n-1$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.
(b) Сумма степеней любых двух несмежных вершин больше либо равна n. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.

Выведите из этого теорему Дирака:

Теорема Дирака. Пусть в графе N вершин. Тогда
(a) если степени всех вершин не меньше $\frac{N-1}{2}$, то в данном графе существует гамильтонов путь;
(b) если степени всех вершин не меньше $\frac{N}{2}$, то в данном графе существует гамильтонов цикл.

5. Каждый из 4034 человек знаком не менее чем с k из остальных. При каком наименьшем k их гарантированно можно поселить в двухместные номера гостиницы так, чтобы каждый был поселен со своим знакомым?

Антиграф

6. В группе из 100 людей среди любых троих есть человек, знающих обоих других. Докажите, что найдутся 50 попарно знакомых людей.

7. В группе из 100 человек среди любых 50 человек есть человек, который знает всех из этих 50. Докажите, что найдутся 50 попарно знакомых людей.

8. На вечеринку пришло 19 гостей, причем среди любых трех из них есть двое знакомых. Докажите, что гости могут разбиться на 5 групп, в каждой из которых все попарно знакомы.

Подвешивание

9. В государстве 2001 город, некоторые (но не все!) пары городов соединены беспосадочными авиалиниями, причем из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что министерство авиации может открыть новую авиалинию между какими-то двумя городами так, что после этого из любого города в любой другой можно будет долететь, сделав менее 1400 пересадок.

10. В стране 120 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, не проходящими через другие города. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий не более, чем из 11 городов.

`source:combinatorics/graph/mixture-g9/r1-1.tex`

Зацикливание

1. Школьник решил сдать Владимиру Алексеевичу зачет по спецкурсу. В. А. оставил на дверях всех комнат школы записки вида «Я в кабинете №...» и исчез в неизвестном направлении. (Разные записки могут сообщать разную информацию.) Школьник начал поиски В. А. с 5-го кабинета, руководствуясь этими указаниями.
(a) Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.
(b) Можно ли утверждать, что школьник когда-нибудь вернется в 5-й кабинет? Верно ли это утверждение, если все записки различны?

2. Докажите, что если натуральное число n не делится ни на 2, ни на 5, то десятичное разложение дроби $1/n$ не имеет предпериода (то есть зацикливание начинается с первого же знака после запятой).

3. Натуральное число заменяют суммой квадратов его цифр. Докажите, что для любого натурального числа после некоторого количества таких операций процесс зациклится.

4. Докажите, что для любого n в ряде Фибоначчи существует бесконечно много членов
(a) имеющих остаток 1 при делении на n;
(b) делящихся на n.

5. В последовательности 20170861... каждая следующая цифра равна последней цифре суммы предыдущих четырех. Докажите, что в ней когда-то встретятся подряд цифры 4954.

6. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан «периодический» текст, например:
...мамамыларамумамамылараму...

7. Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из собранного положения. Докажите, что кубик можно снова собрать, повторив эту же комбинацию еще несколько раз.

8. В тридесятом царстве ни одна из дорог не заканчивается тупиком. Рыцарь, Любящий Постоянство, выезжает из своего замка и, доезжая до любого перекрестка, едет по самой левой дороге. Докажите, что в конце концов он попадет таким образом обратно в свой замок.

9. На проволоку, имеющую форму окружности, насажено несколько стальных шариков одинакового размера. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями, но некоторые — по часовой стрелке, а некоторые — против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что через некоторое время расположение шариков на окружности совпадет с исходным, если:
(a) шарики неразличимы;
(b) все шарики различны (скажем, разного цвета).

Глава 6

9-3

Письменная вступительная олимпиада

1. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H, а биссектрисы AA_2 и CC_2 в точке I. Оказалось, что $\angle AHC = \angle AIC$. Найдите угол ABC.

2. 6 команд играют между собой чемпионат. В каждом туре встречаются какие-то 3 пары команд, не игравшие между собой ранее. В какой-то момент выяснилось, что очередной тур провести невозможно. Определите наименьший номер тура, в котором это могло произойти.

3. Найдите все натуральные x, y, z такие, что $4^x + 3^y = z^2$.

4. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки X и Z соответственно. Отрезки CX и BZ пересекаются в точке Y. Оказалось, что пятиугольник $AXYZD$ — вписанный. Докажите, что $AY = DY$.

5. Вася написал на доске 99 вещественных чисел. Пусть A — квадрат суммы Васиных чисел, а B — сумма их квадратов, умноженная на 100. Докажите, что Петя может поменять знаки у некоторых Васиных чисел так, чтобы квадрат суммы всех чисел стал не больше, чем $B - A$.

6. Дан клетчатый квадрат $n \times n$, в котором стерли все клетки выше главной диагонали (идущей из левого верхнего угла в правый нижний). В каждой клетке оставшейся фигуры записывают 0 или 1. При этом, если в какой-то клетке написана единица, то и в соседних с ней по стороне слева и сверху также должна стоять единица. Сколькими способами это можно сделать?

source:olympiad/intro-g9.tex

Возведение сравнений в степень

1. Найдите остаток числа 77^{77} при делении на 8, 9, 10, 11, 12 и 13.

2. Докажите, что $a^n - b^n$ делится на $a - b$.

3. Докажите, что $a^{2k+1} + b^{2k+1}$ делится на $a + b$.

4. Докажите, что число $30^{99} + 61^{100}$ составное.

5. Вася выписал в тетрадку числа вида 100...01 (иными словами, числа вида $10^k + 1$), меньшие 10^{2017}. Докажите, что простых из них не более 1% от общего числа.

6. Натуральные числа a и b таковы, что числа $a^{84} + b^{84}$ и $a^{2017} + b^{2017}$ делятся на 101. Докажите, что $a^{300} + b^{300}$ делится на 101.

7. **(a)** Докажите, что для любых натуральных $a > 1$, m и n число $a^n - 1$ делится на $a^m - 1$ тогда и только тогда, когда n делится на m.
(b) Докажите, что $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$.

Задачи для самостоятельного решения

8. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ делится на $a + b + c$.

9. Натуральные числа n, a и b таковы, что $(a-1)(b-1)$ не делится на n, однако $a^3 - 1$ и $b^5 - 1$ делятся на n. Докажите, что если для некоторого натурального k число $a^k b^k - 1$ делится на n, то k делится на 15.

Деление сравнений. Малая теорема Ферма

1. **О сокращениях в сравнениях по модулю.** Докажите, что если a и n взаимно просты, и $ax \equiv ay \pmod{n}$, то $x \equiv y \pmod{n}$.

2. Целые числа a и b таковы, что $6a + 34b \,\vdots\, 31$. Докажите, что $3b - 25a \,\vdots\, 31$ и $23a - 4b \,\vdots\, 31$.

3. Даны взаимно простые натуральные числа n и a. Докажите, что в арифметической прогрессии длины n с разностью a найдется ровно одно число, делящееся на n.

4. Решите сравнения:
(a) $5x \equiv 6 \pmod{11}$.
(b) $x^2 - 5x + 6 \equiv 0 \pmod{13}$.
(c) $x^2 + 5x - 6 \equiv 0 \pmod{21}$.
(d) $x^2 - 7x \equiv 67 \pmod{77}$.

Малая теорема Ферма. Если p — простое число, а a не делится на p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p.

Альтернативная формулировка. Если p — простое число, то $a^p - a$ делится на p.

5. **(a)** Пусть a не делится на p. Докажите, что среди чисел $2 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$ все ненулевые остатки при делении на p содержатся по одному разу.
(b) Выведите отсюда, что $(p-1)! \equiv (p-1)! \cdot a^{p-1} \pmod{p}$ и докажите малую теорему Ферма.

6. **(a)** Какой остаток дает число 3^{2001} при делении на 101?
(b) Какой остаток может давать число a^{50} при делении на 101?

7. Докажите, что число $2^{35} + 3^{35} + 6^{35} - 1$ делится на 37.

8. *Другое очень поучительное доказательство.* Зафиксируем ненулевой остаток a при делении на p. Отметим на бумаге произвольным образом $p - 1$ точек. Каждой точке сопоставим какой-то ненулевой остаток при делении на p. Проведем из остатка k стрелочку в остаток ka.
(a) Убедитесь, что из каждой точки выходит одна стрелочка, и в каждую точку входит одна стрелочка.
(b) Поймите, что тогда все точки разбиваются на циклические маршруты.
(c) Докажите, что у всех циклических маршртутов одна и та же длина и она делит $p-1$.
(d) Выведите отсюда малую теорему Ферма.

source:algebra/number-theory/fermat-theorem-g9r3.tex

Стрелочки ведут по кругу. Показатели

Обозначим за $\varphi(n)$ количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n.

Теорема Эйлера. Если a и n — взаимно простые числа, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Зафиксируем взаимно простые числа a и n. Пусть d — наименьшее такое натуральное число, что $a^d - 1$ делится на n. Число d называется *показателем a по модулю n*.

0. *(скоро разберем)* Аналогично последней задаче из прошлого листа докажите теорему Эйлера.

1. **Важно запомнить.** Пусть d — показатель a по модулю n.
(a) Докажите, что числа $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{d-1}$ дают разные остатки при делении на n.
(b) Пусть $a^l \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что $l \,\vdots\, d$.

2. Какие значения могут принимать показатели по модулю 13?

3. Докажите, что показатель любого числа по модулю n (взаимно простого с n, конечно) делит $\varphi(n)$.

4. Докажите, что если $a > 1$, то n делит $\varphi(a^n - 1)$.

5. **(a)** Пусть p — нечетное простое число. Докажите, что любой простой делитель числа $a^p - 1$ или делит $a - 1$, или имеет вид $2px + 1$.
(b) Выведите отсюда, что простых чисел вида $2pk + 1$ бесконечно много.

6. **(a)** Докажите, что любой нечетный простой делитель числа $a^{2^k} + 1$ имеет вид $2^{k+1}x + 1$.
(b) Докажите, что простых чисел вида $2^{k+1}x + 1$ бесконечно много.

7. Докажите, что если $n > 1$, то $2^n - 1$ не делится на n.

source:algebra/number-theory/exponent-g9/r3.tex

Теория чисел. Повторение + уравнения в целых числах

1. При каких n число $7^n - 7$ делится на 15?

2. Докажите, что если $(a, 2016) = 1$, то
(a) $a^{48} - 1$; **(b)** $a^{24} - 1$
делится на 2016.

3. Докажите, что $n^{561} - n$ делится на 561 при всех натуральных n.

4. Докажите, что если $n - 1$ — это показатель числа a по модулю n, то n — простое число.

5. Существуют ли такие целые x, y, что $(x^2 + x + 1)^2 + (y^2 + y + 1)^2$ является квадратом натурального числа?

6. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в натуральных числах:
(a) $x^2 + y^2 = 2015$;
(b) $x^2 + y^2 + z^2 = 7^{2017}$;
(c) $x^2 + y^2 = 437 \cdot 2^{100}$;

7. Найдите все такие натуральные m, n и k, что $m! + n! = 5^k$.

8. Решите в натуральных числах $3^n + 1 = 2^m$.

9. Найдите все такие натуральные m и k, что $1^m + 2^m + 3^m = 6^k$.

10. Решите в натуральных числах $(3x + 4y)(25x + 24y) = 7^{2017}$.

11. Существует ли такое простое число p и натуральные x, y, z, что $(12x + 5)(12y + 7) = p^z$?

source:algebra/number-theory/diophantine-equation-g9/1-r3.tex

Уравнения в целых числах — 2. Алгебраические преобразования

1. Существуют ли такие натуральные a и b, что $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = 2005$?

2. Решите уравнение в целых числах $n^2 + n = m^2$.

3. Решите уравнение в целых числах $n^2 + n - 8 = m^2$.

4. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых выражение $p^2 + 5pq + 4q^2$ является квадратом натурального числа.

5. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. Существует ли такое n, для которого $n^2 + S(n) + 1 = 2017^{2016}$?

6. При каких натуральных n число $n^3 + 2n^2 + 11$ является кубом натурального числа?

7. При каком основании системы счисления число 11010 является полным квадратом?

8. Решите в натуральных числах $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

9. Найдите все такие натуральные n, при которых число $5^n - 1$ можно представить в виде произведения четного числа последовательных натуральных чисел.

source:algebra/number-theory/diophantine-equation-g9/2-r3.tex

Последняя добавка

1. Натуральное число $n < 10000$ таково, что число $n + 100!$ — простое. Докажите, что число n тоже простое или равно 1.
2. Решите в целых числах уравнение $\frac{m}{n} + \frac{n+1}{m} = 3$.
3. Дано натуральное n. Докажите, что неравенство $|x! - x^y| < n$ выполняется только для конечного числа пар натуральных чисел $x > 1$, y.

source:algebra/number-theory/mixture-g9r3-last.tex

Касательные к окружности

1. Дан треугольник ABC.

(a) Вписанная окружность касается его стороны AC в точке X, а вневписанная окружность касается этой стороны в точке Y. Докажите, что $AX = CY$.

(b) Вневписанные окружности касаются его сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что $AK = CL$.

2. **(a)** Дан описанный четырехугольник $ABCD$. В треугольники ABC и ACD вписаны окружности. Докажите, что они касаются диагонали AC в одной и той же точке.

(b) Дан произвольный четырехугольник $ABCD$. В треугольники ABC и ACD вписаны окружности, которые касаются диагонали AC в точках K и L. В треугольники ABD и BCD вписаны окружности, которые касаются диагонали BD в точках M и N. Докажите, что $KL = MN$.

3. Из центра каждой из двух данных окружностей проведены касательные к другой окружности. Докажите, что хорды, соединяющие точки пересечения касательных с окружностями, равны.

4. D — точка на стороне BC треугольника ABC. В треугольники ABD, ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K. Докажите, что длина отрезка AK не зависит от положения точки D на BC.

5. Дан правильный треугольник ABC. Через вершину B проводится проводится произвольная прямая l, лежащая вне треугольника. Окружность α касается прямой l, стороны AB и продолжения CA за точку A. Окружность β касается прямой l, стороны BC и продолжения CA за точку C. Докажите, что сумма радиусов окружностей α и β не зависит от прямой l.

6. Внутри угла AOD проведены лучи OB и OC, причем $\angle AOB = \angle COD$. В углы AOB и COD вписаны непересекающиеся окружности. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных к этим окружностям лежит на биссектрисе угла AOD.

7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. В треугольники ABC и ACD вписаны окружности с радиусами r_1 и r_2. В треугольники ABD и BCD вписаны окружности с радиусами r_3 и r_4. Докажите, что

(a) центры этих окружностей образуют прямоугольник;

(b) $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$.

source:geometry/tangent-g9/r3.tex

Перечислительная комбинаторика

1. Сколькими способами можно расставить 20 детям в классе баллы за ЕГЭ (от 0 до 100), чтобы нашелся ученик, набравший больше 90 баллов?

2. Сколькими способами можно расставить в очередь 20 детей, чтобы между Петей и Катей стояло ровно 4 человека?

3. Сколькими способами можно выставить от 0 до 100 баллов за ЕГЭ отличнице Кате и двоечнику Пете, чтобы у Кати было баллов больше, чем у Пети и

(a) у Кати было не меньше 50?

(b) у Кати и Пети в сумме было не меньше 50?

4. Сколькими способами в классе из 20 человек можно выбрать две непересекающиеся группы (группы неразличимы и могут быть пустыми)?

5. На полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг, никакие две из которых не стоят рядом?

6. Сколькими способами можно выстроить класс из 20 человек в хоровод, чтобы Петя был на одинаковом расстоянии от Кати и Маши?

7. У Деда Мороза 100 конфет. Он хочет раздать их 20 детям так, чтобы каждый получил хотя бы по одной конфете. Сколькими способами он может это сделать?

8. Имеется 20 человек — 10 юношей и 10 девушек. Сколько существует способов составить компанию, в которой было бы одинаковое число юношей и девушек?

9. Назовем девятизначное число *хорошим,* если в нем можно переставить одну цифру на другое место и получить девятизначное число, в котором цифры идут строго по убыванию. Сколько всего хороших чисел?

10. Сколько существует десятизначных чисел, в которых цифры не возрастают?

11. Назовем натуральное число *интересным,* если оно — степень тройки или представимо в виде суммы различных степеней тройки. Интересные числа занумеровали по возрастанию. Найдите сотое интересное число.

`source:combinatorics/counting-g9/r3.tex`

Комбинаторика-2

1. Найдите количество решений уравнения в целых неотрицательных числах:
(a) $x + y + z + t = 1000$;
(b) $x + y + z + t \leqslant 1000$;
(c) $x + y + z = 1000$, при этом $x, y, z \leqslant 750$;

2. **(a)** В ряд **(b)** По кругу
стоят n предметов. Сколько способов выбрать k из них так, чтобы никакие два не стояли рядом?

3. Сколько существует разных способов разбить число 2014 на натуральные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются *приблизительно равными,* если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

4. Для каждого трехзначного числа берем произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех трехзначных чисел, складываем. Сколько получится? (Разумеется, если хотя бы одна из цифр числа — ноль, то и произведение равно нулю).

5. **(a)** Докажите, что количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых равно количеству разбиений числа n в сумму слагаемых, не превосходящих k.
(b) Докажите, что количество разбиений числа n равно количеству разбиений числа $2n$ в сумму ровно n слагаемых.

6. Десятизначное число назовем *хорошим,* если у него сумма первой и последней цифр равна сумме второй и предпоследней, равна сумме третьих с конца и с начала, и т. д. Каких хороших чисел больше: четных, или нечетных?

7. Докажите, что у точного квадрата делителей вида $4k + 1$ больше, чем делителей вида $4k - 1$.

source:combinatorics/correspondence-g9/r3.tex

Графы

1. В некоторой компании у каждого человека есть ровно двое друзей. Докажите, что если каждый возьмется за руки со своими друзьями, то образуется один или несколько хороводов.

2. В доме отдыха 1999 отдыхающих. Некоторые из них знакомы между собой, причем любые двое незнакомых имеют среди отдыхающих общего знакомого. Каково наименьшее возможное число пар знакомых отдыхающих?

Остовные деревья

3. **(a)** Докажите, что в дереве есть вершина степени 1.
   (b) В дереве n вершин, сколько в нем ребер?

4. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее ребрами так, чтобы он остался связным.

5. В графе k вершин и $2k - 1$ ребер. Докажите, что из него можно удалить какой-то цикл (т. е. удалить все ребра этого цикла, оставив вершины) так, чтобы граф остался связным.

Подвешивание

6. В государстве 2001 город, некоторые (но не все!) пары городов соединены беспосадочными авиалиниями, причем из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что министерство авиации может открыть новую авиалинию между какими-то двумя городами так, что после этого из любого города в любой другой можно будет долететь, сделав менее 1400 пересадок.

7. В стране 90 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, не проходящими через другие города. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий не более, чем из 10 городов.

Антиграф

8. В группе из 100 людей среди любых троих есть человек, знающих обоих других. Докажите, что из этой группы можно выбрать компанию из 50 человек, в которой все знакомы друг с другом.

9. На вечеринку пришло 19 гостей, причем среди любых трех из них есть двое знакомых. Докажите, что гости могут разбиться на 5 групп, в каждой из которых все попарно знакомы.

source:combinatorics/graph/mixture-g9/r3-1.tex

Графы-2

Гамильтоновость

Степень вершины v графа G обозначается $d_G(v)$. Наименьшая из степеней вершин графа G обозначается $\delta(G)$.

Простым путем в графе называется путь, не имеющий самопересечений по вершинам (то есть никакая вершина не встречается в нем дважды). Аналогично, *простым циклом* называется цикл, не имеющий самопересечений по вершинам.

Длиной пути (цикла) называется количество его ребер.

1. Пусть $\delta(G) \geqslant 2$. Докажите, что
(a) в графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$;
(b) в графе G есть простой цикл длины хотя бы $\delta(G) + 1$.

2. Пусть $n > 2$, $v_1 \dots v_n$ — максимальный простой путь в графе G, причем $d_G(v_1)+d_G(v_n) \geqslant n$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины n.

Гамильтоновым путем называется путь, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз. *Гамильтоновым циклом* называется цикл, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз.

3. **Теорема Оре.** В графе n вершин.
(a) Сумма степеней любых двух несмежных вершин больше либо равна $n-1$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.
(b) Сумма степеней любых двух несмежных вершин больше либо равна n. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.

Выведите из этого теорему Дирака:

Теорема Дирака. Пусть в графе N вершин. Тогда
(a) если степени всех вершин не меньше $\frac{N-1}{2}$, то в данном графе существует гамильтонов путь;
(b) если степени всех вершин не меньше $\frac{N}{2}$, то в данном графе существует гамильтонов цикл.

4. Каждый из 4034 человек знаком не менее чем с k из остальных. При каком наименьшем k их гарантированно можно поселить в двухместные номера гостиницы так, чтобы каждый был поселен со своим знакомым?

Разное

5. **(a)** В кружке 53 ученика. Известно, что если трое кружковцев попарно незнакомы друг с другом, то какие-то двое из них имеют в кружке общего знакомого. Докажите, что кто-то из учеников имеет в кружке хотя бы 6 знакомых

(b) То же самое для 49 учеников.

6. В группе из 100 человек среди любых 50 человек есть человек, который знает всех из этих 50. Докажите, что найдутся 50 попарно знакомых людей.

source:combinatorics/graph/mixture-g9/r3-2-hamiltonian-path.tex

Зацикливание

1. Школьник решил сдать Владимиру Алексеевичу зачет по спецкурсу. В. А. оставил на дверях всех комнат школы записки вида «Я в кабинете №...» и исчез в неизвестном направлении. (Разные записки могут сообщать разную информацию.) Школьник начал поиски В. А. с 5-го кабинета, руководствуясь этими указаниями.

(a) Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.

(b) Можно ли утверждать, что школьник когда-нибудь вернется в 5-й кабинет? Верно ли это утверждение, если все записки различны?

2. Докажите, что если натуральное число n не делится ни на 2, ни на 5, то десятичное разложение дроби $1/n$ не имеет предпериода (то есть зацикливание начинается с первого же знака после запятой).

3. Натуральное число заменяют суммой квадратов его цифр. Докажите, что для любого натурального числа после некоторого количества таких операций процесс зациклится.

4. Докажите, что для любого n в ряде Фибоначчи существует бесконечно много членов

(a) имеющих остаток 1 при делении на n;

(b) делящихся на n.

5. В последовательности 20170861... каждая следующая цифра равна последней цифре суммы предыдущих четырех. Докажите, что в ней когда-то встретятся подряд цифры 4954.

6. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан «периодический» текст, например:
...мамамыларамумамамылараму...

7. Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из собранного положения. Докажите, что кубик можно снова собрать, повторив эту же комбинацию еще несколько раз.

8. В тридесятом царстве ни одна из дорог не заканчивается тупиком. Рыцарь, Любящий Постоянство, выезжает из своего замка и, доезжая до любого перекрестка, едет по самой левой дороге. Докажите, что в конце концов он попадет таким образом обратно в свой замок.

9. На проволоку, имеющую форму окружности, насажено несколько стальных шариков одинакового размера. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями, но некоторые — по часовой стрелке, а некоторые — против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что через некоторое время расположение шариков на окружности совпадет с исходным, если:

(a) шарики неразличимы;

(b) все шарики различны (скажем, разного цвета).