$$\int\limits_{\text{03 апреля 2017}}^{\text{15 апреля 2017}} \left(\begin{array}{c} \text{Московские сборы} \\ \text{секция математики} \end{array} \right) \mathrm{d}t$$

Немного о структуре

Материалы разбиты по группам, в пределах каждой группы отсортированы по темам:

- *тренировочные олимпиады;*
- алгебра;
- геометрия;
- комбинаторика;

Материалы, общие для нескольких групп, дублируются. Все материалы сопровождаются ссылками на исходные файлы LaTeX.

`source:integral.tex`

Оглавление

Глава 1

9-3

Число и его делители

1. Найдите все натуральные числа, у которых два простых делителя, общее число делителей равно 6, а сумма всех делителей равна 28.

2. Найдите все натуральные числа, имеющие ровно шесть делителей, сумма которых равна 3500.

3. Найти все простые числа p такие, что число $p^2 + 11$ имеет ровно шесть различных делителей.

4. Петя нашел сумму всех нечетных делителей некоторого четного числа, а Вася — сумму всех четных делителей этого числа. Может ли произведение этих двух чисел быть точным квадратом?

5. Докажите, что натуральное число n имеет не более чем различных делителей.

6. Делитель натурального числа называется *собственным,* если он отличен от 1 и самого этого числа. Натуральное число назовем *восхитительным,* если самый большой собственный делитель этого числа равен сумме второго по величине собственного делителя и третьего по величине собственного делителя. (Например, число 18 восхитительное: $9 = 6 + 3$). Сколько существует восхитительных чисел, не превосходящих полтора миллиона?

7. Докажите, что совершенное число не может быть полным квадратом.

8. Докажите, что, если совершенное число, большее 6, делится на 3, то оно делится на 9.

9. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей.

10. У натурального числа N выписали в ряд по возрастанию все собственные делители (собственный делитель натурального числа — это делитель, отличный от 1 и самого этого числа). Оказалось, что в этом ряду простые и составные числа чередуются. Сколько собственных делителей имеет число N?

11. К натуральному числу прибавили наибольший его собственный делитель и получили степень десятки. Найдите все такие числа.

12. Натуральное число N называется *хорошим,* если каждый его делитель, увеличенный на 1, является делителем числа $N + 1$. Какие числа являются хорошими? Дайте полный ответ на этот вопрос.

source:algebra/number-theory/divisors-g9r3.tex

Квадратный трёхчлен

Некоторые замечания

- Квадратный трехчлен не может иметь больше двух корней.
- Если в двух парах чисел совпадают суммы и произведения, то эти пары совпадают.
- Целый корень квадратного трехчлена с целыми коэффициентами является делителем свободного члена.
- Корни приведённого квадратного трехчлена с целыми коэффициентами либо целые числа, либо иррациональные.
- Квадратный трехчлен, у которого все коэффициенты целые нечетные числа, не может иметь целых корней.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что при любых отличных от нуля числах a, b, c имеет корень хотя бы одно из квадратных уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$.

2. Решите систему уравнений $x^3 + y^2 = 2$, $x^2 + xy + y^2 - y = 0$.

3. Для действительных чисел a, b, c выполнены следующие неравенства:

$$(a - b + c)(4a - 2b + c) < 0\,, \qquad c(a - b + c) < 0\,.$$

Докажите, что для этих чисел выполнено неравенство $(a + b + c)(4a + 2b + c) \geqslant 0$.

4. Найдите все решения уравнения

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots + \cfrac{1}{x}}} = x$$

(в правой части дробная черта встречается 2017 раз).

5. Найдите все целые значения a, при которых уравнение $x^2 + ax + a = 0$ имеет целый корень.

6. Рассмотрим графики функций $y = x^2 + px + q$, которые пересекают оси координат в трех различных точках. Докажите, что все окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих точках, имеют общую точку.

7. Длины сторон многоугольника равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + \ldots + a_n)$. Докажите, что если A — сумма длин нескольких сторон многоугольника, B — сумма длин остальных его сторон, то $f(A) = f(B)$.

8. На доске написано девять приведённых квадратных трехчленов. Известно, что взятые по порядку коэффициенты при x образуют арифметическую прогрессию, и взятые по порядку свободные члены тоже образуют арифметическую прогрессию. Известно также, что сумма всех трехчленов имеет корень. Какое наибольшее количество исходных трехчленов может не иметь корней?

9. Приведённый квадратный трехчлен $P(x)$ имеет общий корень с многочленом $P(P(P(x)))$. Докажите, что либо 0, либо 1 является корнем этого трехчлена.

10. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 14$, если $a + 2b + 3c \geqslant 14$.

source:algebra/polynomial/quadratics-g9/r3.tex

Трёхчлен и неравенства

Неположительный дискриминант — условие знакопостоянства квадратного трёхчлена.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)\,.$$

Рассмотрите трёхчлен

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = \\ &= (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \dots + (a_nx + b_n)^2 \end{aligned}$$

Следствия:

1. Неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим:
   $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$.
2. Неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим:
   $a_k = \sqrt{x_k}$, $b_k = 1/\sqrt{x_k}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для положительных чисел a и b выполнено неравенство $a^2 + b^2 > a + b$. Докажите, что для этих чисел выполнено неравенство $a^3 + b^3 > a^2 + b^2$.

2. Докажите, что для всех допустимых значений неизвестного выполнено неравенство

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leqslant 12\,.$$

3. Докажите, что для любых трёх чисел, сумма квадратов которых равна 2, выполнено неравенство $a + b + c \leqslant abc + 2$.

4. Решите систему уравнений $x^3 + y^2 = 2$, $x^2 + xy + y^2 - y = 0$.

5. Докажите, что для любых чисел a, b справедливо неравенство $a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1)$.

6. Три различных числа таковы, что при любой их расстановке на места коэффициентов квадратного трёхчлена будет получаться трехчлен, имеющий целый корень. Докажите, что этот корень равен 1.

7. Все значения квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ на отрезке $[0; 1]$ по модулю не превосходят 1. Какое наибольшее значение при этом может иметь величина $|a| + |b| + |c|$?

8. Числа a и b таковы, что каждый из двух квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + bx + a$ имеет по два различных корня, а произведение этих трёхчленов имеет ровно три различных корня. Найдите все возможные значения суммы этих трёх корней.

9. Существуют ли три квадратных трёхчлена, такие, что каждый из них имеет корень, а сумма любых двух трёхчленов не имеет корней?

10. Даны три различных числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений

$$(x-a)(x-b)=(x-c)\,,\ (x-a)(x-c)=(x-b)\,,\ (x-c)(x-b)=(x-a)$$

имеют корни.

source:algebra/polynomial/quadratics-g9/r3-inequality.tex

Как решить вторую задачу?

1. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно таким образом, что $AP = CQ$ и четырехугольник $RPBQ$ — вписанный. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекают прямые RP и RQ в точках X и Y соответственно. Докажите, что $RX = RY$.

2. На одной стороне угла с вершиной O взята точка A, а на другой — точки B и C, причем точка B лежит между O и C. Проведена окружность с центром O_1, вписанная в треугольник OAB, и окружность с центром O_2, касающаяся стороны AC и продолжений сторон OA и OC треугольника AOC. Докажите, что если $O_1A = O_2A$, то треугольник ABC — равнобедренный.

3. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках X и Y соответственно. Точка K — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC (не содержащей точки C). Оказалось, что прямая XY делит отрезок AK пополам. Чему может быть равен угол BAC?

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника BCD, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ACD, пересекает сторону BC в точке N ($M, N \neq C$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника CMN. Докажите, что прямая OD перпендикулярна стороне AB.

5. Серединный перпендикуляр к стороне AC неравнобедренного остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

6. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника POQ лежит на прямой AC.

7. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.

8. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Биссектрисы внешних углов A и B пересекаются в точке K, внешних углов B и C — в точке L, внешних углов C и D — в точке M, внешних углов D и A — в точке N. Пусть K_1, L_1, M_1, N_1 — точки пересечения высот треугольников ABK, BCL, CDM, DAN соответственно. Докажите, что четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$ — параллелограмм.

9. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что
$$AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1\,.$$
Пусть I_A, I_B и I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

10. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и BC в точках P и Q. Прямая PQ пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y. Найдите $\angle ABC$, если $\angle XBY = 135°$.

source:geometry/mixture-g9-second.tex

Про отрезки

1. Через центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$ проведена прямая. Она пересекает сторону AB в точке X и сторону CD в точке Y; углы $\angle AXY$ и $\angle DYX$ равны. Докажите, что $AX/BX = CY/DY$.

2. Дан остроугольный треугольник ABC. B_1, C_1 — основания высот из вершин B, C соответственно. Точка D — основание перпендикуляра из B_1 на AB, E — точка пересечения перпендикуляра, опущенного из из точки D на сторону BC, с отрезком BB_1. Докажите, что прямая EC_1 параллельна AC.

3. Дан биллиард в форме правильного 1998-угольника $A_1A_2...A_{1998}$. Из середины стороны A_1A_2 выпустили шар, который, отразившись последовательно от сторон A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{1998}A_1$ (по закону «угол падения равен углу отражения»), вернулся в исходную точку. Докажите, что траектория шара — правильный 1998-угольник.

4. AE и CD — высоты остроугольного треугольника ABC. Биссектриса угла B пересекает отрезок DE в точке F. На отрезках AE и CD взяли такие точки P и Q соответственно, что четырехугольники $ADFQ$ и $CEFP$ — вписанные. Докажите, что $AP = CQ$.

5. Даны непересекающиеся окружности S_1 и S_2 и их общие внешние касательные l_1 и l_2. На l_1 между точками касания отметили точку A, а на l_2 — точки B и C так, что AB и AC — касательные к S_1 и S_2. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2, а K — точка касания вневписаной окружности треугольника ABC со стороной BC. Докажите, что середина отрезка O_1O_2 равноудалена от точек A и K.

6. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, точка C_1 симметрична C относительно O, D — середина стороны AB, K — центр описанной окружности треугольника ODC_1. Докажите, что точка O делит пополам отрезок прямой OK, лежащий внутри угла ACB.

source:geometry/segments-g9r3.tex

Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и... еще одна точка!

Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, H — его ортоцентр, M — середина AB. Окружности ω с центром O и ω_1 с центром O_1, описанные около треугольников ABC и A_1B_1C соответственно, вторично пересекаются в точке P.

1. Докажите, что точки M, H и P лежат на одной прямой.

2. Докажите, что:
(a) окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1, проходят через точку P;
(b) PM — биссектриса углов APA_1 и BPB_1;
(c) прямая PA проходит через точку, симметричную точке A_1 относительно прямой CH.

3. Пусть L_1 и L_2 — вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника AMA_1, с прямыми BC и AC соответственно, а K_1 и K_2 — вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника BMB_1, с прямыми AC и BC соответственно. Докажите, что:
(a) L_1, K_1, M и O лежат на одной прямой;
(b) L_2, K_2, M и O_1 лежат на одной прямой;
(c) L_1, K_1, L_2 и K_2 лежат на одной окружности;
(d) прямые L_1L_2, K_1K_2 и PM пересекаются в одной точке.

4. Пусть прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке S, R — середина отрезка CM. Докажите, что:
(a) точки C, P и S лежат на одной прямой;
(b) прямые SH и CM перпендикулярны;
(c) прямые OR и SC перпендикулярны.

5. Пусть касательные к окружности ω, проведенные в точках A и B, пересекают прямую A_1B_1 в точках X и Y соответственно и пересекаются в точке Z. Докажите, что:
(a) точка M — центр вписанной окружности треугольника XYZ;
(b) окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1, проходят через точки X и Y соответственно;
(c) прямые MH, A_1B_1 и ZC_1 пересекаются в одной точке (C_1 — точка пересечения CH и AB).
(d) прямая ZP проходит через точку H_c, симметричную H относительно стороны AB.
(e) описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются в точке P.
(f) прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.

source:geometry/triangle-with-points-g9.tex

Неравенства, связанные с биссектрисами треугольника

1. В треугольнике ABC биссектриса AL пересекает описанную окружность в точке W, I — центр вписанной окружности. Докажите, что:
(a) $AI > IL$;
(b) $AW + IW > \max(AB, AC)$.

2. В треугольнике ABC: I и I_a — центры вписанной и вневписанной окружностей соответственно, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите неравенство $AI \cdot AI_a > 4Rr$.

3. В треугольнике ABC ($AC > BC$) проведены биссектрисы AD и BE. Прямая DE пересекает AB в точке P. Докажите, что угол ACP — тупой.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и CM. Докажите, что если $AB > BC$, то $AM > MK > KC$.

5. Докажите, что:
$$\frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} + \frac{l_c}{m_c} > 1$$
(l_k — биссектрисы треугольника; m_k — его медианы).

6. Докажите, что
(a) $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leqslant p^2$;
(b) $l_a + l_b + l_c \leqslant p\sqrt{3}$
(p — полупериметр треугольника).

7. Докажите, что в остроугольном треугольнике
$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leqslant \sqrt{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

8. Докажите, что для любого неравнобедренного треугольника выполняется неравенство $l_1^2 > S\sqrt{3} > l_2^2$, где l_1 и l_2 — наибольшая и наименьшая биссектрисы треугольника, S — его площадь.

9. Внутри треугольника ABC отмечена точка M. Прямая AM вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_1. Докажите, что:
(a) $\dfrac{BM \cdot CM}{A_1M} \geqslant 2r$;
(b) $AM\sin(\angle BMC) + BM\sin(\angle CMA) + CM\sin(\angle AMB) \leqslant p$
(r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр треугольника ABC).

source:geometry/triangle-bisector-inequality-g9.tex

Глава 2

9-2

Операции на числовых множествах

Пусть дано некоторое множество чисел M. Оно может состоять из целых, положительных или совершенно произвольных чисел. Будем говорить, что на нём *определена операция,* если есть правило, которое сопоставляет любым двум элементам этого множества какой-нибудь его элемент.

Примеры

1. $M = \mathbb{N}$; $x * y = x^y$.
2. $M = \mathbb{N}$; $x * y = \text{НОД}(x, y)$.
3. $M = \mathbb{R}$; $x * y = x - y$.
4. $M = \mathbb{R}$; $x * y = |x{-}y|$.

Операции 1 и 3 не коммутативны и не ассоциативны. Операция 2 коммутативна и ассоциативна. Операция 4 коммутативна, но не ассоциативна.

Задачи

1. На множестве всех вещественных чисел определена антикоммутативная операция. Докажите, что для любого числа x выполнено условие $x * x = 0$.

2. На множестве всех вещественных чисел определена ассоциативная антикоммутативная операция. Докажите, что для любых чисел x, y, z выполнено условие $(x * y) * z = 0$.

3. На множестве всех действительных чисел определена операция, обладающая следующими свойствами: $x * x = 0$, $x * (y * z) = (x * y) + z$. Найдите $2017 * 1957$.

4. На множестве всех целых неотрицательных чисел определена операция $*$, обладающая следующими свойствами: $0 * y = y + 1$, $(x + 1) * 0 = x * 1$, $(x + 1) * (y + 1) = x * ((x + 1) * y)$. Найдите $3 * 2017$.

5. В условиях предыдущей задачи найдите $4 * 2017$.

6. На множестве всех положительных чисел задана операция $m \circ n = \frac{m+n}{mn+4}$. Найдите значение выражения $(\ldots((2016 \circ 2015) \circ 2014) \circ \ldots \circ 2) \circ 1$.

7. На множестве всех действительных чисел определена операция, обладающая следующим свойством: $(x * y) * z = x + y + z$. Докажите, что эта операция есть обычное сложение.

8. Последовательность натуральных чисел a_n построена так, что для любых $i \neq j$ выполнено свойство $\text{НОД}(a_i, a_j) = \text{НОД}(i, j)$. Докажите, что при всех i выполнено $a_i = i$.

9. На множестве $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ определено правило, сопоставляющее любым двум элементом этого множества некоторое целое число так, что для всех элементов множества выполнено условие $x * y + y * z + z * x = 0$. Докажите, что можно так подобрать числа $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, что для любых i, j справедливо равенство $i * j = a_i - a_j$.

source:algebra/binary-operators-g9r1.tex

Целочисленные неравенства

Задача Лиувилля. Докажите, что ни при каком простом $p > 5$ число $(p-1)!+1$ не является степенью числа p.

Задачи для самостоятельного решения

1. Можно ли подобрать два различных натуральных числа x, y так, чтобы каждое из чисел $x^2 + y$, $x + y^2$ было точным квадратом?
2. Клетки таблицы 200×200 окрашены в черный и белый цвета так, что черных клеток на 404 больше, чем белых. Докажите, что найдется квадрат 2×2, в котором число белых клеток нечетно.
3. В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — НОД двух чисел, стоящих на его концах. Может ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, быть равна сумме всех чисел, записанных на ребрах?
4. Можно ли расставить по кругу 2017 простых чисел так, чтобы квадрат каждого, уменьшенный на 1, делился на следующее?
5. Найдите все натуральные числа n, для которых $(n-1)!$ не делится на n^2.
6. Существует ли квадратный трехчлен, значение которого при всех целых значениях аргумента является точной четвертой степенью?
7. Натуральные числа a, x и y, большие 100, таковы, что $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь a/x?
8. На доске написали 100 различных натуральных чисел. Затем под каждым числом написали сумму этого числа и наибольшего общего делителя остальных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел могло при этом получиться?
9. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа, квадрат каждого из которых делится на сумму двух других?
10. В возрастающей бесконечной последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2017-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в этой последовательности каждое число, начиная с некоторого места, равно сумме всех предыдущих чисел.

source:algebra/number-theory/inequality-g9/1-r2.tex

Целочисленные неравенства (продолжение)

Задача о размене монет. В государстве имеют хождение монеты в a и b тугриков, где a и b взаимно просты. Никакие другие монеты хождения не имеют. Сколько существует денежных сумм, которые нельзя набрать такими монетами?

Дополнительные задачи

1. Докажите, что для любой пары натуральных чисел m и n можно подобрать три целых числа a, b, c так, что уравнение $ax + by = c$ имеет в натуральных числах ровно одно решение $x = m$, $y = n$.

2. Натуральное число N можно представить в виде суммы квадратов трёх чисел, каждое из которых делится на 3, но нельзя представить в виде суммы квадратов трёх чисел, каждое из которых не делится на 3. Докажите, что N делится на 81.

3. Можно ли подобрать натуральные числа x, y так, чтобы выполнялось равенство $x^2 + x = y^4 + y^3 = y^2 + y$?

4. Докажите, что при любом натуральном n можно указать n последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одной степени натурального числа с показателем степени, большим 1.

source:algebra/number-theory/inequality-g9/2-r2.tex

Квадратный трёхчлен

Некоторые замечания

- Если в двух парах чисел совпадают суммы и произведения, то эти пары совпадают.
- Корни приведённого квадратного трехчлена с целыми коэффициентами либо целые числа, либо иррациональные.
- Квадратный трехчлен, у которого все коэффициенты целые нечетные числа, не может иметь целых корней.
- Если значения квадратного трехчлена в двух точках совпадают, то эти точки расположены симметрично относительно вершины параболы.

Задачи для самостоятельного решения

1. Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ являются целыми числами. Известно, что $p + q = 198$. Найдите все возможные значения чисел p, q.

2. Найдите все положительные значения a, при которых оба корня уравнения $a^2x^2 + ax + 1 - 7a^2 = 0$ являются целыми числами.

3. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешается заменить одним из трехчленов $x^2f(1/x+1)$ или $(x-1)^2f\big(1/(x-1)\big)$. Можно ли с помощью таких операций получить из трехчлена x^2+4x+3 трехчлен $x^2 + 10x + 9$?

4. Решите систему уравнений $x^3 + y^2 = 2$, $x^2 + xy + y^2 - y = 0$.

5. Рассмотрим графики функций $y = x^2 + px + q$, которые пересекают оси координат в трех различных точках. Докажите, что все окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих точках, имеют общую точку.

6. Длины сторон многоугольника равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + \ldots + a_n)$. Докажите, что если A — сумма длин нескольких сторон многоугольника, B — сумма длин остальных его сторон, то $f(A) = f(B)$.

7. Даны два различных приведённых кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$. Выписали все корни трех уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$ и $F(x) = G(x)$. Их оказалось ровно восемь. Докажите, что самое большое и самое маленькое из этих восьми чисел не могут одновременно быть корнями многочлена $F(x)$.

8. Квадратный трехчлен $P(x)$ имеет два различных корня и при всех x удовлетворяет неравенству $P(x^3 + x) \geqslant P(x^2 + 1)$. Найдите сумму корней этого трехчлена.

9. Все значения квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ на отрезке $[0; 1]$ по модулю не превосходят 1. Какое наибольшее значение при этом может иметь величина $|a| + |b| + |c|$?

10. Три различных числа таковы, что при любой их расстановке на места коэффициентов квадратного трехчлена будет получаться трехчлен, имеющий целый корень. Какие значения может принимать сумма этих чисел?

11. Будем говорить, что квадратный трехчлен *переставляет* пару различных чисел a, b, если $f(a) = b$ и $f(b) = a$. Может ли один и тот же трехчлен менять местами две различные пары?

12. На доске написано девять приведённых квадратных трехчленов. Известно, что взятые по порядку коэффициенты при x образуют арифметическую прогрессию, и взятые по порядку свободные члены тоже образуют арифметическую прогрессию. Известно также, что сумма всех трехчленов имеет корень. Какое наибольшее количество исходных трехчленов может не иметь корней?

source:algebra/polynomial/quadratics-g9/r2.tex

От квадратных трехчленов к многочленам высших степеней

1. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

2. На доске написано выражение $x^3 + \dots x^2 + \dots x + \dots = 0$. Два школьника по очереди вписывают вместо многоточий действительные числа. Цель первого — получить уравнение, имеющее ровно один корень. Может ли второй ему помешать?

3. На координатной плоскости имеется квадрат со сторонами, параллельными осям координат. Этот квадрат поделен на 64 равных квадратика прямыми, параллельными осям координат. Внутри квадрата движется точка, координаты которой в каждый момент времени t вычисляются по формулам $x = at^3 + bt^2 + ct + d$, $y = At^3 + Bt^2 + Ct + D$. Докажите, что среди этих 64 квадратиков найдется такой, внутри которого точка не находилась ни в какой момент времени.

4. Целые числа a, b и c таковы, что числа $a/b + b/c + c/a$ и $a/c + c/b + b/a$ тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

5. Числа a, b, c таковы, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три корня, и выполнено условие $a + b + c \in [-2; 0]$. Докажите, что хотя бы один из корней принадлежит отрезку $[0; 2]$.

6. Приведённые квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что оба уравнения $f(g(x)) = 0$ и $g(f(x)) = 0$ не имеют корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x)) = 0$ или $g(g(x)) = 0$ тоже не имеет корней.

7. Даны два приведённых многочлена: многочлен 4-й степени $P(x)$ и квадратный трехчлен $Q(x)$. Оба многочлена принимают отрицательные значения на некотором интервале длины более 2, а вне этого интервала неотрицательны. Докажите, что при некотором x_0 выполнено неравенство $P(x_0) < Q(x_0)$.

`source:algebra/polynomial/cubic-g9r2.tex`

Как решить вторую задачу?

1. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно таким образом, что $AP = CQ$ и четырехугольник $RPBQ$ — вписанный. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекают прямые RP и RQ в точках X и Y соответственно. Докажите, что $RX = RY$.

2. На одной стороне угла с вершиной O взята точка A, а на другой — точки B и C, причем точка B лежит между O и C. Проведена окружность с центром O_1, вписанная в треугольник OAB, и окружность с центром O_2, касающаяся стороны AC и продолжений сторон OA и OC треугольника AOC. Докажите, что если $O_1A = O_2A$, то треугольник ABC — равнобедренный.

3. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках X и Y соответственно. Точка K — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC (не содержащей точки C). Оказалось, что прямая XY делит отрезок AK пополам. Чему может быть равен угол BAC?

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника BCD, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ACD, пересекает сторону BC в точке N ($M, N \neq C$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника CMN. Докажите, что прямая OD перпендикулярна стороне AB.

5. Серединный перпендикуляр к стороне AC неравнобедренного остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

6. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника POQ лежит на прямой AC.

7. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.

8. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Биссектрисы внешних углов A и B пересекаются в точке K, внешних углов B и C — в точке L, внешних углов C и D — в точке M, внешних углов D и A — в точке N. Пусть K_1, L_1, M_1, N_1 — точки пересечения высот треугольников ABK, BCL, CDM, DAN соответственно. Докажите, что четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$ — параллелограмм.

9. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что

$$AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1\,.$$

Пусть I_A, I_B и I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

10. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и BC в точках P и Q. Прямая PQ пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y. Найдите $\angle ABC$, если $\angle XBY = 135°$.

source:geometry/mixture-g9-second.tex

Четвёртые задачи и не только

1. Трапеция $ABCD$ такова, что на ее боковых сторонах AD и BC существуют такие точки P и Q соответственно, что $\angle APB = \angle CPD$, $\angle AQB = \angle CQD$. Докажите, что точки P и Q равноудалены от точки пересечения диагоналей трапеции.

2. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса угла между высотами AA_1 и CC_1 пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Биссектриса угла B пересекает отрезок, соединяющий ортоцентр H треугольника ABC с серединой M стороны AC в точке R. Докажите, что точки P, B, Q и R лежат на одной окружности.

3. В остроугольном треугольнике проведены высоты AA' и BB'. На дуге ACB описанной окружности треугольника ABC выбрана точка D. Пусть прямые AA' и BD пересекаются в точке P, а прямые BB' и AD пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая $A'B'$ проходит через середину отрезка PQ.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Перпендикуляр, опущенный из точки B_1 на BC, пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр опущенный из точки B на AK пересекает AC в точке L. Докажите что точки K, L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.

5. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, T — центр описанной окружности треугольника AOC, M — середина AC. На сторонах AB и BC выбраны точки D и E соответственно так, что $\angle BDM = \angle BEM = \angle B$. Докажите, что $BT \perp DE$.

6. Дан треугольник ABC. Окружность ω касается описанной окружности Ω треугольника ABC в точке A, пересекает сторону AB в точке K, а также пересекает сторону BC. Касательная CL к окружности ω такова, что отрезок KL пересекает сторону BC в точке T. Докажите, что отрезок BT равен по длине касательной, проведенной из точки B к ω.

source:geometry/mixture-g9r2-fourth.tex

Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и… еще одна точка!

Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, H — его ортоцентр, M — середина AB. Окружности ω с центром O и ω_1 с центром O_1, описанные около треугольников ABC и A_1B_1C соответственно, вторично пересекаются в точке P.

1. Докажите, что точки M, H и P лежат на одной прямой.

2. Докажите, что:
(a) окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1, проходят через точку P;
(b) PM — биссектриса углов APA_1 и BPB_1;
(c) прямая PA проходит через точку, симметричную точке A_1 относительно прямой CH.

3. Пусть L_1 и L_2 — вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника AMA_1, с прямыми BC и AC соответственно, а K_1 и K_2 — вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника BMB_1, с прямыми AC и BC соответственно. Докажите, что:
(a) L_1, K_1, M и O лежат на одной прямой;
(b) L_2, K_2, M и O_1 лежат на одной прямой;
(c) L_1, K_1, L_2 и K_2 лежат на одной окружности;
(d) прямые L_1L_2, K_1K_2 и PM пересекаются в одной точке.

4. Пусть прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке S, R — середина отрезка CM. Докажите, что:
(a) точки C, P и S лежат на одной прямой;
(b) прямые SH и CM перпендикулярны;
(c) прямые OR и SC перпендикулярны.

5. Пусть касательные к окружности ω, проведенные в точках A и B, пересекают прямую A_1B_1 в точках X и Y соответственно и пересекаются в точке Z. Докажите, что:
(a) точка M — центр вписанной окружности треугольника XYZ;
(b) окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1, проходят через точки X и Y соответственно;
(c) прямые MH, A_1B_1 и ZC_1 пересекаются в одной точке (C_1 — точка пересечения CH и AB).
(d) прямая ZP проходит через точку H_c, симметричную H относительно стороны AB.
(e) описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются в точке P.
(f) прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.

source:geometry/triangle-with-points-g9.tex

Неравенства, связанные с биссектрисами треугольника

1. В треугольнике ABC биссектриса AL пересекает описанную окружность в точке W, I — центр вписанной окружности. Докажите, что:
(a) $AI > IL$;
(b) $AW + IW > \max(AB, AC)$.

2. В треугольнике ABC: I и I_a — центры вписанной и вневписанной окружностей соответственно, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите неравенство $AI \cdot AI_a > 4Rr$.

3. В треугольнике ABC ($AC > BC$) проведены биссектрисы AD и BE. Прямая DE пересекает AB в точке P. Докажите, что угол ACP — тупой.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и CM. Докажите, что если $AB > BC$, то $AM > MK > KC$.

5. Докажите, что:

$$\frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} + \frac{l_c}{m_c} > 1$$

(l_k — биссектрисы треугольника; m_k — его медианы).

6. Докажите, что
(a) $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leqslant p^2$;
(b) $l_a + l_b + l_c \leqslant p\sqrt{3}$
(p — полупериметр треугольника).

7. Докажите, что в остроугольном треугольнике

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leqslant \sqrt{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

8. Докажите, что для любого неравнобедренного треугольника выполняется неравенство $l_1^2 > S\sqrt{3} > l_2^2$, где l_1 и l_2 — наибольшая и наименьшая биссектрисы треугольника, S — его площадь.

9. Внутри треугольника ABC отмечена точка M. Прямая AM вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_1. Докажите, что:
(a) $\dfrac{BM \cdot CM}{A_1M} \geqslant 2r$;
(b) $AM\sin(\angle BMC) + BM\sin(\angle CMA) + CM\sin(\angle AMB) \leqslant p$
(r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр треугольника ABC).

source:geometry/triangle-bisector-inequality-g9.tex

Глава 3

9-1

Операции на числовых множествах

Пусть дано некоторое множество чисел M. Оно может состоять из целых, положительных или совершенно произвольных чисел. Будем говорить, что на нём *определена операция,* если есть правило, которое сопоставляет любым двум элементам этого множества какой-нибудь его элемент.

Примеры

1. $M = \mathbb{N}$; $x * y = x^y$.
2. $M = \mathbb{N}$; $x * y = \text{НОД}(x, y)$.
3. $M = \mathbb{R}$; $x * y = x - y$.
4. $M = \mathbb{R}$; $x * y = |x–y|$.

Операции 1 и 3 не коммутативны и не ассоциативны. Операция 2 коммутативна и ассоциативна. Операция 4 коммутативна, но не ассоциативна.

Задачи

1. На множестве всех вещественных чисел определена антикоммутативная операция. Докажите, что для любого числа x выполнено условие $x * x = 0$.

2. На множестве всех вещественных чисел определена ассоциативная антикоммутативная операция. Докажите, что для любых чисел x, y, z выполнено условие $(x * y) * z = 0$.

3. На множестве всех действительных чисел определена операция, обладающая следующими свойствами: $x * x = 0$, $x * (y * z) = (x * y) + z$. Найдите $2017 * 1957$.

4. На множестве всех целых неотрицательных чисел определена операция $*$, обладающая следующими свойствами: $0 * y = y + 1$, $(x + 1) * 0 = x * 1$, $(x + 1) * (y + 1) = x * ((x + 1) * y)$. Найдите $3 * 2017$.

5. В условиях предыдущей задачи найдите $4 * 2017$.

6. На множестве всех положительных чисел задана операция $m \circ n = \frac{m+n}{mn+4}$. Найдите значение выражения $(\dots((2016 \circ 2015) \circ 2014) \circ \dots \circ 2) \circ 1$.

7. На множестве всех действительных чисел определена операция, обладающая следующим свойством: $(x * y) * z = x + y + z$. Докажите, что эта операция есть обычное сложение.

8. Последовательность натуральных чисел a_n построена так, что для любых $i \neq j$ выполнено свойство $\text{НОД}(a_i, a_j) = \text{НОД}(i, j)$. Докажите, что при всех i выполнено $a_i = i$.

9. На множестве $M = \{1, 2, \dots, n\}$ определено правило, сопоставляющее любым двум элементом этого множества некоторое целое число так, что для всех элементов множества выполнено условие $x * y + y * z + z * x = 0$. Докажите, что можно так подобрать числа $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, что для любых i, j справедливо равенство $i * j = a_i - a_j$.

source:algebra/binary-operators-g9r1.tex

Целочисленные неравенства

Задача Лиувилля. Докажите, что ни при каком простом $p > 5$ число $(p-1)!+1$ не является степенью числа p.

Задача о размене монет. В государстве имеют хождение монеты в a и b тугриков, где a и b взаимно просты. Никакие другие монеты хождения не имеют. Сколько существует денежных сумм, которые нельзя набрать такими монетами?

Задачи для самостоятельного решения

1. Клетки таблицы 200×200 окрашены в черный и белый цвета так, что черных клеток на 404 больше, чем белых. Докажите, что найдется квадрат 2×2, в котором число белых клеток нечетно.

2. В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — НОД двух чисел, стоящих на его концах. Может ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, быть равна сумме всех чисел, записанных на ребрах?

3. Существует ли квадратный трехчлен, значение которого при всех целых значениях аргумента является точной четвертой степенью?

4. Натуральные числа a, x и y, большие 100, таковы, что $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь a/x?

5. На доске написали 100 различных натуральных чисел. Затем под каждым числом написали сумму этого числа и наибольшего общего делителя остальных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел могло при этом получиться?

6. Докажите, что число $1/3 + 1/5 + 1/7 + \ldots + 1/(2n+1)$ не может быть целым.

7. На отрезке натурального ряда ровно 10 четвертых степеней и ровно 100 кубов. Докажите, что на этом отрезке не менее 2000 точных квадратов.

8. Даны натуральные числа x, y, принадлежащие отрезку $[2; 100]$. Докажите, что среди десяти первых членов последовательности $a_n = x^{2^n} + y^{2^n}$ найдется составное число.

9. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа, квадрат каждого из которых делится на сумму двух других?

10. В возрастающей бесконечной последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2017-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в этой последовательности каждое число, начиная с некоторого места, равно сумме всех предыдущих чисел.

`source:algebra/number-theory/inequality-g9/1-r1.tex`

Целочисленные неравенства (продолжение)

Задача о суммах гармонического ряда. Докажите, что число $1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$ не может быть целым.

Упражнения

1. Произведение n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.
2. Число $n!$ не делится на 2^n.

Дополнительные задачи

1. Докажите неравенство $\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОК}(b, c) \cdot \text{НОК}(a, c) \geqslant \big(\text{НОК}(a, b, c)\big)^2$.

2. Даны различные натуральные числа a_1, a_2, ..., a_n. Докажите, что НОК всех чисел $b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2) \ldots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \ldots (a_i - a_n)$ делится на $(n - 1)!$.

3. Имеется n попарно различных натуральных чисел. На доску выписывают их попарные наибольшие общие делители и попарные наименьшие общие кратные. Каким может быть наименьшее количество различных чисел, выписанных на доске?

4. Докажите, что при любом натуральном n можно указать n последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одной степени натурального числа с показателем степени, большим 1.

`source:algebra/number-theory/inequality-g9/2-r1.tex`

Квадратный трёхчлен

1. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешается заменить одним из трехчленов $x^2 f(1/x+1)$ или $(x-1)^2 f\bigl(1/(x-1)\bigr)$. Можно ли с помощью таких операций получить из трехчлена x^2+4x+3 трехчлен $x^2+10x+9$?

2. Даны два различных приведённых кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$. Выписали все корни трех уравнений $F(x)=0$, $G(x)=0$ и $F(x)=G(x)$. Их оказалось ровно восемь. Докажите, что самое большое и самое маленькое из этих восьми чисел не могут одновременно быть корнями многочлена $F(x)$.

3. Длины сторон многоугольника равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1)=f(a_2+\ldots+a_n)$. Докажите, что если A — сумма длин нескольких сторон многоугольника, B — сумма длин остальных его сторон, то $f(A)=f(B)$.

4. Даны квадратные трехчлены $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. Может ли уравнение $f(g(h(x)))=0$ иметь корни $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$?

5. Квадратный трехчлен $P(x)$ имеет два различных корня и при всех x удовлетворяет неравенству $P(x^3+x) \geqslant P(x^2+1)$. Найдите сумму корней этого трехчлена.

6. Будем говорить, что квадратный трехчлен *переставляет* пару различных чисел a, b, если $f(a)=b$ и $f(b)=a$. Может ли один и тот же трехчлен менять местами две различные пары?

7. Три различных числа таковы, что при любой их расстановке на места коэффициентов квадратного трехчлена будет получаться трехчлен, имеющий целый корень. Какие значения может принимать сумма этих чисел?

8. Даны четыре приведённых квадратных трехчлена. Сумма любых двух из них имеет ровно один корень. Докажите, что среди этих трехчленов не более двух различных.

9. Дан приведённый квадратный трехчлен $f(x)$. Известно, что уравнение $f(f(x))=0$ имеет четыре различных корня, причем сумма двух из них равна -1. Докажите, что свободный член трехчлена не превосходит $-1/4$.

10. На доске написано девять приведённых квадратных трехчленов. Известно, что взятые по порядку коэффициенты при x образуют арифметическую прогрессию, и взятые по порядку свободные члены тоже образуют арифметическую прогрессию. Известно также, что сумма всех трехчленов имеет корень. Какое наибольшее количество исходных трехчленов может не иметь корней?

11. На доске написано n выражений $*x^2+*x+*=0$. Двое по очереди заменяют одну из звездочек числом, отличным от нуля. Через $3n$ ходов получается n квадратных уравнений. Первый стремится к тому, чтобы как можно больше этих уравнений не имело корней, а второй стремится ему помешать. Какое наибольшее число уравнений без корней может получить первый игрок независимо от игры второго?

Как решить вторую задачу?

1. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно таким образом, что $AP = CQ$ и четырехугольник $RPBQ$ — вписанный. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекают прямые RP и RQ в точках X и Y соответственно. Докажите, что $RX = RY$.

2. На одной стороне угла с вершиной O взята точка A, а на другой — точки B и C, причем точка B лежит между O и C. Проведена окружность с центром O_1, вписанная в треугольник OAB, и окружность с центром O_2, касающаяся стороны AC и продолжений сторон OA и OC треугольника AOC. Докажите, что если $O_1A = O_2A$, то треугольник ABC — равнобедренный.

3. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках X и Y соответственно. Точка K — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC (не содержащей точки C). Оказалось, что прямая XY делит отрезок AK пополам. Чему может быть равен угол BAC?

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника BCD, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ACD, пересекает сторону BC в точке N ($M, N \neq C$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника CMN. Докажите, что прямая OD перпендикулярна стороне AB.

5. Серединный перпендикуляр к стороне AC неравнобедренного остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

6. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника POQ лежит на прямой AC.

7. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.

8. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Биссектрисы внешних углов A и B пересекаются в точке K, внешних углов B и C — в точке L, внешних углов C и D — в точке M, внешних углов D и A — в точке N. Пусть K_1, L_1, M_1, N_1 — точки пересечения высот треугольников ABK, BCL, CDM, DAN соответственно. Докажите, что четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$ — параллелограмм.

9. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что
$$AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1 \, .$$
Пусть I_A, I_B и I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

10. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и BC в точках P и Q. Прямая PQ пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y. Найдите $\angle ABC$, если $\angle XBY = 135°$.

source:geometry/mixture-g9-second.tex

Разнобой

1. Дана окружность ω и точка P вне нее. Проходящая через P прямая ℓ пересекает ω в точках A и B. На отрезке AB отмечена точка C такая, что $PA \cdot PB = PC^2$. Точки M и N — середины двух дуг, на которые хорда AB разбивает окружность ω. Докажите, что величина $\angle MCN$ не зависит от выбора прямой ℓ.

2. Даны непересекающиеся окружности S_1 и S_2 и их общие внешние касательные l_1 и l_2. На l_1 между точками касания отметили точку A, а на l_2 — точки B и C так, что AB и AC — касательные к S_1 и S_2. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2, а K — точка касания вневписаной окружности треугольника ABC со стороной BC. Докажите, что середина отрезка O_1O_2 равноудалена от точек A и K.

3. Медиана AM треугольника ABC пересекает вписанную в него окружность в точках X и Y. Известно, что $AB = AC + AM$. Найдите $\angle XIY$, где I — центр вписанной окружности.

4. На сторонах BC и AB треугольника ABC стоят точки X и Y так, что $\angle BAX = \angle BCY = \alpha$. Из вершины B опущены перпендикуляры BK и BL на отрезки AX и BY соответственно. Найдите углы треугольника KLM, где M — середина стороны AC.

5. Через центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$ проведена прямая. Она пересекает сторону AB в точке X и сторону CD в точке Y; углы $\angle AXY$ и $\angle DYX$ равны. Докажите, что $AX/BX = CY/DY$.

6. Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами $120°$. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно прямых BC, AC и AB соответственно, пересекаются в одной точке.

7. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC взята произвольная точка P. Пусть I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABP и CBP. Докажите, что описанная окружность треугольника I_1I_2P проходит через некоторую фиксированную точку, не зависящую от выбора P.

source:geometry/mixture-g9r1.tex

Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и… еще одна точка!

Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, H — его ортоцентр, M — середина AB. Окружности ω с центром O и ω_1 с центром O_1, описанные около треугольников ABC и A_1B_1C соответственно, вторично пересекаются в точке P.

1. Докажите, что точки M, H и P лежат на одной прямой.

2. Докажите, что:
(a) окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1, проходят через точку P;
(b) PM — биссектриса углов APA_1 и BPB_1;
(c) прямая PA проходит через точку, симметричную точке A_1 относительно прямой CH.

3. Пусть L_1 и L_2 — вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника AMA_1, с прямыми BC и AC соответственно, а K_1 и K_2 — вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника BMB_1, с прямыми AC и BC соответственно. Докажите, что:
(a) L_1, K_1, M и O лежат на одной прямой;
(b) L_2, K_2, M и O_1 лежат на одной прямой;
(c) L_1, K_1, L_2 и K_2 лежат на одной окружности;
(d) прямые L_1L_2, K_1K_2 и PM пересекаются в одной точке.

4. Пусть прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке S, R — середина отрезка CM. Докажите, что:
(a) точки C, P и S лежат на одной прямой;
(b) прямые SH и CM перпендикулярны;
(c) прямые OR и SC перпендикулярны.

5. Пусть касательные к окружности ω, проведенные в точках A и B, пересекают прямую A_1B_1 в точках X и Y соответственно и пересекаются в точке Z. Докажите, что:
(a) точка M — центр вписанной окружности треугольника XYZ;
(b) окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1, проходят через точки X и Y соответственно;
(c) прямые MH, A_1B_1 и ZC_1 пересекаются в одной точке (C_1 — точка пересечения CH и AB).
(d) прямая ZP проходит через точку H_c, симметричную H относительно стороны AB.
(e) описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются в точке P.
(f) прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.

source:geometry/triangle-with-points-g9.tex

Неравенства, связанные с биссектрисами треугольника

1. В треугольнике ABC биссектриса AL пересекает описанную окружность в точке W, I — центр вписанной окружности. Докажите, что:
(a) $AI > IL$;
(b) $AW + IW > \max(AB, AC)$.

2. В треугольнике ABC: I и I_a — центры вписанной и вневписанной окружностей соответственно, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите неравенство $AI \cdot AI_a > 4Rr$.

3. В треугольнике ABC ($AC > BC$) проведены биссектрисы AD и BE. Прямая DE пересекает AB в точке P. Докажите, что угол ACP — тупой.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и CM. Докажите, что если $AB > BC$, то $AM > MK > KC$.

5. Докажите, что:

$$\frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} + \frac{l_c}{m_c} > 1$$

(l_k — биссектрисы треугольника; m_k — его медианы).

6. Докажите, что
(a) $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leqslant p^2$;
(b) $l_a + l_b + l_c \leqslant p\sqrt{3}$
(p — полупериметр треугольника).

7. Докажите, что в остроугольном треугольнике

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leqslant \sqrt{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

8. Докажите, что для любого неравнобедренного треугольника выполняется неравенство $l_1^2 > S\sqrt{3} > l_2^2$, где l_1 и l_2 — наибольшая и наименьшая биссектрисы треугольника, S — его площадь.

9. Внутри треугольника ABC отмечена точка M. Прямая AM вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_1. Докажите, что:
(a) $\dfrac{BM \cdot CM}{A_1M} \geqslant 2r$;
(b) $AM \sin(\angle BMC) + BM \sin(\angle CMA) + CM \sin(\angle AMB) \leqslant p$
(r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр треугольника ABC).

source:geometry/triangle-bisector-inequality-g9.tex

Глава 4

10-3

Геометрия

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$:

$$P = AC \cap FB,\ Q = BD \cap AC,\ R = CE \cap BD,\ S = DF \cap CE,\ T = EA \cap DF,\ U = FB \cap EA.$$

Известно, что $CR = ES$, $BP = FU$, $\angle EAC = \angle BDF = 90°$. Докажите, что середина RS, середина UP и точки A и D лежат на одной окружности или на одной прямой.

2. Дан треугольник ABC. Прямая, проходящая через C и параллельная стороне AB, пересекает окружность (ABC) в точке C_1. Аналогично определяются точки A_1 и B_1. Докажите, что перпендикуляры, опущенные на стороны BC, CA, AB из точек A_1, B_1, C_1 соответственно, пересекаются в одной точке.

3. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L, а описанную окружность треугольника — в точке N, отличной от A. Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из L на стороны AB и AC. Докажите, что $S_{AKNM} = S_{ABC}$.

4. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает окружность, построенную на отрезке AC как на диаметре, в точке K, отличной от A. Докажите, что прямая CK делит отрезок BH пополам.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено: $\angle B = \angle C = 120°$, $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$. Докажите, что $ABCD$ — описанный.

6. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB меньше стороны BC, BH_b — высота, точка O — центр описанной окружности. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO, пересекает прямую BO в точке X. Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

7. Дан остроугольный треугольник ABC. Перпендикуляр из B к прямой AC пересекает окружность, построенную на AC как на диаметре, в точках X и Y (X ближе к B, чем Y). Аналогично перпендикуляр из C к прямой AB пересекает окружность, построенную на AB как на диаметре, в точках Z и T (Z ближе к C, чем T). Докажите, что прямые XZ, YT и BC пересекаются в одной точке либо параллельны.

source:geometry/mixture-g10-other/r2.tex

Глава 5

10-2

Геометрия

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$:

$$P = AC \cap FB,\ Q = BD \cap AC,\ R = CE \cap BD,\ S = DF \cap CE,\ T = EA \cap DF,\ U = FB \cap EA.$$

Известно, что $CR = ES$, $BP = FU$, $\angle EAC = \angle BDF = 90^\circ$. Докажите, что середина RS, середина UP и точки A и D лежат на одной окружности или на одной прямой.

2. Дан треугольник ABC. Прямая, проходящая через C и параллельная стороне AB, пересекает окружность (ABC) в точке C_1. Аналогично определяются точки A_1 и B_1. Докажите, что перпендикуляры, опущенные на стороны BC, CA, AB из точек A_1, B_1, C_1 соответственно, пересекаются в одной точке.

3. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L, а описанную окружность треугольника — в точке N, отличной от A. Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из L на стороны AB и AC. Докажите, что $S_{AKNM} = S_{ABC}$.

4. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает окружность, построенную на отрезке AC как на диаметре, в точке K, отличной от A. Докажите, что прямая CK делит отрезок BH пополам.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено: $\angle B = \angle C = 120^\circ$, $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$. Докажите, что $ABCD$ — описанный.

6. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB меньше стороны BC, BH_b — высота, точка O — центр описанной окружности. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO, пересекает прямую BO в точке X. Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

7. Дан остроугольный треугольник ABC. Перпендикуляр из B к прямой AC пересекает окружность, построенную на AC как на диаметре, в точках X и Y (X ближе к B, чем Y). Аналогично перпендикуляр из C к прямой AB пересекает окружность, построенную на AB как на диаметре, в точках Z и T (Z ближе к C, чем T). Докажите, что прямые XZ, YT и BC пересекаются в одной точке либо параллельны.

source:geometry/mixture-g10-other/r2.tex

Глава 6

10-1

Геометрия

1. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L, а описанную окружность треугольника — в точке N, отличной от A. Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из L на стороны AB и AC. Докажите, что $S_{AKNM} = S_{ABC}$.

2. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает окружность, построенную на отрезке AC как на диаметре, в точке K, отличной от A. Докажите, что прямая CK делит отрезок BH пополам.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено: $\angle B = \angle C = 120^\circ$, $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$. Докажите, что $ABCD$ — описанный.

4. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB меньше стороны BC, BH_b — высота, точка O — центр описанной окружности. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO, пересекает прямую BO в точке X. Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

5. Точки X, Y и Z – середины высот AD, BE и CF треугольника ABC соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из D на YZ, из E на ZX и из F на XY, пересекаются в одной точке.

6. Чевианы AA', BB', CC' треугольника ABC пересекаются в точке P. Пусть M_A — точка пересечения окружностей BPC' и CPB'. Аналогично определяются M_B и M_C. Докажите, что AM_A, BM_B, CM_C пересекаются в одной точке.

7. Дан остроугольный треугольник ABC. Перпендикуляр из B к прямой AC пересекает окружность, построенную на AC как на диаметре, в точках X и Y (X ближе к B, чем Y). Аналогично перпендикуляр из C к прямой AB пересекает окружность, построенную на AB как на диаметре, в точках Z и T (Z ближе к C, чем T). Докажите, что прямые XZ, YT и BC пересекаются в одной точке либо параллельны.

source:geometry/mixture-g10-other/r1.tex

Глава 7

11-2

Олимпиада 1

1. Докажите, что $\sin(\sqrt{x}) < \sqrt{\sin(x)}$ при $0 < x < \pi/2$.

2. В треугольнике ABC проведены медиана AM и биссектриса AL; K — такая точка на AM, что $KL \parallel AC$. Докажите, что $AL \perp KC$.

3. При каком наименьшем n квадрат $n \times n$ можно разрезать на квадраты 40×40 и 49×49 так, чтобы квадраты обоих видов присутствовали?

В городе Угрюмовске 2 000 000 жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в городе есть четверо попарно знкаомых друг с другом жителей.

4. В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 — рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

4'. *(замена)* Пусть M — множество всех положительных рациональных чисел, меньших 1. Существует ли такое подмножество S множества M, что любое число из M представляется в виде суммы нескольких различных чисел из S не менее, чем одним, и не более, чем 1000 способами?

source:olympiad/g11-1-r2.tex

Глава 8

11-1

Олимпиада 1

1. Докажите, что $\sin(\sqrt{x}) < \sqrt{\sin(x)}$ при $0 < x < \pi/2$.

2. В треугольнике ABC проведены медиана AM и биссектриса AL; K — такая точка на AM, что $KL \parallel AC$. Докажите, что $AL \perp KC$.

3. В городе Угрюмовске 2 000 000 жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в городе есть четверо попарно знкаомых друг с другом жителей.

4. В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 — рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

4.' *(замена)* Пусть M — множество всех положительных рациональных чисел, меньших 1. Существует ли такое подмножество S множества M, что любое число из M представляется в виде суммы нескольких различных чисел из S не менее, чем одним, и не более, чем 1000 способами?

source:olympiad/g11-1-r1.tex