$$\int\limits_{\text{01 июня 2016 г.}}^{\text{14 июня 2016 г.}} \left(\begin{array}{c} \text{Московские сборы} \\ \text{секция математики} \end{array} \right) \mathrm{d}t$$

Немного о структуре

Материалы разбиты по группам, в пределах каждой группы отсортированы по темам:

- *тренировочные олимпиады;*
- алгебра;
  - теория чисел;
  - многочлены;
  - неравенства;
- геометрия;
- комбинаторика;
  - теория графов.

Материалы, общие для нескольких групп, дублируются. Все материалы сопровождаются ссылками на исходные файлы LaTeX.

source:integral.tex

Оглавление

Глава 1

Гадюки (8-2)

Вступительная олимпиада

Довывод

1. Сколько существует пятизначных чисел, кратных 101 и одинаково читающихся слева направо и справа налево?

2. На шахматной доске (8×8) стоят 16 королей, не бьющих друг друга. Какое наименьшее число королей при этом может стоять у края доски?

3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K, для которой $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в ее середине. Найдите углы треугольника ABC.

4. Решите уравнение в натуральных числах $m(1 + m + m^2) = 4n(n + 1)$.

Вывод

5. В треугольнике ABC точка M — середина AC. На стороне BC взяли точку K так, что угол BMK прямой. Оказалось, что $BK = AB$. Найдите $\angle MBC$, если $\angle ABC = 110°$.

6. Дано 41 различное натуральное число, меньшее 1000. Известно, что среди любых трех из них есть два, дающих в произведении точный квадрат. Докажите, что среди этих чисел есть точный квадрат.

7. В клетки таблицы 100×100 расставили числа от 1 до 100, при этом каждое число оказалось написано ровно 100 раз. Докажите, что либо в какой-то строчке, либо в каком-то столбце не менее 10 различных чисел.

source:olympiad/g8-intro.tex

Сравнения по модулю

0. Найдите остаток от деления
(a) 9^{100} на 8; **(b)** 12^{100} на 13; **(c)** 2^{1001} на 11.

1. Найдите остаток от деления $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003$
(a) на 999; **(b)** на 1004.

2. **(a)** Любое число сравнимо с суммой его цифр по модулю 9.
(b) Любое число сравнимо со знакопеременной суммой его цифр по модулю 11.

3. Пусть n — нечетное число. Найдите остаток от деления на n суммы $1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3$.

4. **(a)** Пусть $a^n = 0 \pmod{a+b}$. Докажите, что $b^n = 0 \pmod{a+b}$.
(b) p, q — простые числа, причем $q = p + 2$. Докажите, что $p^q + q^p$ делится на $p + q$.

5. На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу — на одну монету больше. Какова наименьшая возможная цена покупки?

6. **(a)** Докажите, что при $p > 2$ числитель дроби

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

делится на p (p — простое).
(b*) Докажите, что при $p > 3$ он делится даже на p^2.

source:algebra/number-theory/remainders-g8/r2-1.tex

Малая теорема Ферма

1. Пусть a не делится на простое число p.

(a) Докажите, что если $ax = ay \pmod{p}$, то $x = y \pmod{p}$.

(b) Докажите, что числа a, $2a$, $3a$, ..., $(p-1)a$ дают все ненулевые остатки по модулю p.

2. *(Малая теорема Ферма)* Пусть a не делится на простое число p. Докажите, что $a^{p-1} = 1 \pmod{p}$. *(Указание: докажите, что* $(p-1)! = a^{p-1}(p-1)!$.*)*

3. Найдите остаток от деления

(a) 7^{100} на 11; **(b)** 7^{222} на 23; **(c)** $14^{14^{14}}$ на 17.

4. **(a)** Найдите остаток от деления числа, состоящего из 19 девяток, на 19.

(b) Найдите число из одних единиц, которое делилось бы на 2017.

5. **(a)** Если a не делится на 17, то либо $a^8 - 1$, либо $a^8 + 1$ делится на 17.

(b) Пусть $x^2 = 1 \pmod{n}$. Можно ли утверждать, что $x = \pm 1 \pmod{n}$?

6. Докажите, что $n^{561} = n \pmod{561}$ для любого n.

source:algebra/number-theory/remainders-g8/r2-2-fermat-theorem.tex

Задачи про делимость

1. **(a)** Докажите, что если число $a^n - 1$ простое ($n > 1$, $a > 1$), то $a = 2$, а n — простое число.
(b) Докажите, что если число $a^n + 1$ простое ($n > 1$, $a > 1$), то a четно, а n — степень двойки.

2. **(a)** Докажите, что существуют 100 идущих подряд составных чисел.
(b) Докажите, что существуют 100 идущих подряд чисел, среди которых ровно одно простое.

3. **(a)** Докажите, что числа вида $2^{2^n} + 1$ попарно взаимно просты.
(b) Выведите из предыдущего пункта, что простых чисел бесконечно много.

4. Докажите, что уравнение
(a) $3x^2 + 2 = y^2$ **(b)** $8x^3 - 13y^3 = 17$
не имеет решений в целых числах. *(Указание: рассмотрите остатки по подходящему модулю.)*

5. Докажите, что существует бесконечно много чисел, которые не представимы в виде суммы **(a)** двух **(b)** трех квадратов.

6. **(a)** При каких n число $n^2 + 1$ делится на 65?
(b) Существует ли такое n, что $n^2 + 1$ делится на 103?

source:algebra/number-theory/remainders-g8/r2-3-mixture.tex

Китайская теорема об остатках

1. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом рядовой Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?

2. Сколько существует наборов из 9 подряд идущих четырёхзначных чисел таких, что первое из них делится на 10, второе – на 9, третье — на 8, ... последнее – на 2?

3. Если a взаимно просто с n, то сравнение $ax = b \pmod{m}$ имеет ровно одно решения в остатках по модулю m.

4. Докажите, что для любого набора попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ найдется такое x, что

$$\begin{cases} x \equiv 1 & \pmod{m_1}; \\ x \equiv 0 & \pmod{m_2}; \\ x \equiv 0 & \pmod{m_3}; \\ \quad \ldots & \\ x \equiv 0 & \pmod{m_k}. \end{cases}$$

5. Докажите, что для любого набора попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ и любого набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ система

$$\begin{cases} x \equiv a_1 & \pmod{m_1}; \\ x \equiv a_2 & \pmod{m_2}; \\ \quad \ldots & \\ x \equiv a_k & \pmod{m_k}; \end{cases}$$

имеет ровно одно решение по модулю $m_1 m_2 \ldots m_k$.

6. Сколько остатков могут давать квадраты при делении на 20?

7. Какие числа дают остаток 97 при делении на 101 и остаток 15 при делении на 23?

8. Докажите, что существует 100 идущих подряд натуральных чисел, каждое из которых делится на какой-нибудь куб.

9. Докажите, что существуют 18 последовательных натуральных чисел, среди которых нет числа, взаимно простого с остальными.

source:algebra/number-theory/chinese-remainder-theorem-g8r2.tex

Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида. Пусть a и b — целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел $a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \ldots > r_n$ определена тем, что каждое r_k — это остаток от деления предпредыдущего числа на предыдущее, а предпоследнее делится на последнее нацело, то есть

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1\,; \\ b &= r_1q_1 + r_2\,; \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3\,; \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= r_{k-1}q_{k-1} + r_k\,; \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n\,; \\ r_{n-1} &= r_nq_n\,. \end{aligned}$$

Тогда $(a, b) = r_n$.

Линейное представление НОД. Для любых натуральных чисел a и b существуют целые числа n и m такие, что $(a, b) = an + bm$.

0. **(a)** Докажите, что для любых целых a, b, k выполнено $(a, b) = (b, a - kb)$.
(b) Докажите, что алгоритм Евклида действительно выдает наибольший общий делитель двух чисел.

1. С помощью алгоритма Евклида найдите $(6851, 8109)$.

2. Найдите линейное представление наибольшего общего делителя чисел 1001 и 209.

3. **(a)** Найдите все натуральные числа, дающие остаток 7 при делении на 20 и остаток 6 при делении на 11.
(b) Найдите все натуральные числа, дающие остаток 15 при делении на 87 и остаток 2 при делении на 38.

4. Чему может быть равен наибольший общий делитель чисел $5n + 13$ и $3n + 8$?

5. Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

6. Каков наибольший возможный общий делитель чисел $9m + 7n$ и $3m + 2n$, если числа m и n не имеют общих делителей, кроме единицы?

7. Известно, что $(m, n) = 1$. Какое наибольшее возможное значение может принимать $(2016n + m, 2016m + n)$?

8. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что $(a + b, a^2 + b^2) < 3$.

9. Чему может быть равен $(x + 3, x^2 - x + 2)$?

10. Найдите **(a)** $(111, 11111111)$;

(b) $(\underbrace{11\ldots1}_{15}, \underbrace{11\ldots1}_{25})$. **(c)** $(\underbrace{11\ldots1}_{m}, \underbrace{11\ldots1}_{n})$.

11. Найдите $(2^n - 1, 2^m - 1)$.

12. Верно ли, что для любых натуральных a и b найдутся такие натуральные p и q, что при любом натуральном n числа $p + an$ и $q + bn$ взаимно просты?

source:algebra/number-theory/euclids-algorithm-g8/r2.tex

Финальный разнобой

1. Можно ли квадрат представить в виде суммы 17 квадратов?

2. Докажите, что для любого натурального n, взаимно простого с 1001, выполнено сравнение $n^{60} \equiv 1 \pmod{1001}$.

3. Докажите, что для любого натурального n выполнено $n^{20} \equiv n^4 \pmod{4080}$.

4. Пусть n — нечетное число. Докажите, что $(2^{n!} - 1)$ делится на n.

5. Дано простое число p. Для каких натуральных n число $n(n + p)$ является полным квадратом?

6. **(a)** Чему может быть равен $(x - 1, x^2 + x + 1)$?
(b) Число x таково, что $(x^3 - 1)$ является точным квадратом. Докажите, что $(x - 1)$ делится на 3.

7. Существует ли такое 10000-значное число, что при замене любых трех его соседних цифр, получится составное число?

8. Пусть p — простое число.
(a) Докажите, что для любого a от 1 до $(p-1)$ существует ровно один обратный остаток.
(b) Докажите, что если $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$, то $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$.
(c) **Теорема Вильсона.** Докажите, что $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
(d) Докажите, что если для $m > 1$ имеет место сравнение $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$, то m — простое.

9. Докажите, что любое простое число может быть делителем числа вида $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

source:algebra/mixture-g8-final/r2.tex

Удвоение медианы

1. Медиана треугольника совпадает с его биссектрисой. Верно ли, что он равнобедренный?
2. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной из их общей вершины.
3. Две прямые пересекаются в точке A. Кроме этого на чертеже отмечена точка M. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник ABC такой, что точки B и C лежат на данных прямых, а M является серединой BC.
4. В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение медианы BM к стороне BC.
5. На медиане BM треугольника ABC взяли точку E так, что CEM равен углу ABM. Докажите, что отрезок EC равен одной из сторон треугольника.
6. На сторонах AB и BC вовне построили квадраты $ABKL$ и $CBNT$. Доказать, что отрезок KN в два раза больше медианы BM треугольника ABC.
7. В треугольнике ABC точка M — середина AC. На стороне BC взяли точку K так, что угол BMK прямой. Оказалось, что $BK = AB$. Найдите MBC, если $\angle ABC = 110°$.
8. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.
9. В треугольнике ABC проведена медиана AF. Точка D — середина отрезка AF, E — точка пересечения прямой CD и стороны AB. Известно, что $BD = BF = CF$. Докажите, что $AE = DE$.

source:geometry/median-doubling-g8/r2.tex

Четвертый «признак равенства» треугольников

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $AD = BC$; $\angle ABD + \angle CDB = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

2. Пусть K — середина стороны BC треугольника ABC. На лучах AB и AC взяты точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = AY$ и точка K лежит на отрезке XY. Докажите, что $BX = CY$.

3. На стороне BC равностороннего треугольника ABC взята точка M, а на продолжении стороны AC за точку C — точка N, причем $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, в котором $AB = CD$, на сторонах AB и CD выбраны точки K и M соответственно. Оказалось, что $AM = KC$, $BM = KD$. Докажите, что угол между прямыми AB и KM равен углу между прямыми KM и CD.

5. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пресекаются в точке I. Найдите $\angle C$, если $A_1I = B_1I$.

`source:geometry/supplementary-triangles-g8/r2.tex`

Отрезки

1. На катетах AC и BC равнобедренного прямоугольного треугольника отметили точки M и L соответственно так, что $MC = BL$. Точка K — середина гипотенузы AB. Докажите, что треугольник MKL также является прямоугольным равнобедренным.

2. На стороне AC треугольника ABC нашлись такие точки K и L, что L — середина AK и BK — биссектриса угла LBC. Кроме того, оказалось, что $2BL = BC$. Докажите, что $KC = AB$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ верно, что $AD = AB + CD$. Кроме того, оказалось, что биссектриса угла A проходит через точку M, середину стороны BC. Докажите, что биссектриса угла D также проходит через точку M.

4. Через точку Y на стороне AB равностороннего треугольника ABC провели прямую, пересекающую луч CA за точкой A в точке X и сторону BC в точке Z. Оказалось, что $XY = YZ$ и $AY = BZ$. Докажите, что $XZ \perp BC$.

5. В треугольнике ABC биссектриса AE равна по длине отрезку EC. Причем $2AB = AC$. Найдите углы треугольника ABC.

6. В равнобедренном треугольнике ABC выполнено $\angle A = 100°$. Докажите, что если BD — биссектриса угла B, то $BD + DA = BC$.

source:geometry/equal-segments-g8/r2.tex

Задачи для самостоятельных размышлений

1. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудаленную от точек C и D. Пусть точка K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.
2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на BC отложили отрезок CM равный высоте AH. На стороне AB отметили точку K так, что $\angle KMC = 90°$. Найти $\angle ACK$.
3. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC, и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD, пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PD$.

source:geometry/mixture-g8-more.tex

Центры треугольников

1. В треугольнике ABC угол A равен α. Найдите
(a) угол между высотами BH_B и CH_C;
(b) угол между биссектрисами BB_1 и CC_1.

2. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и C равны по 146°. Биссектриса угла D пересекает серединный перпендикуляр к стороне BC в точке O. Найдите $\angle AOD$.

3. В прямоугольнике $ABCD$ биссектрисы угла B и внешнего угла D пересекают сторону AD и прямую AB в точках K, M соответственно. Докажите что отрезок KM равен и перпендикулярен отрезку BD.

4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$, все углы которого тупые, $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$, $\angle E = \angle F$. Докажите, что серединные перпендикуляры к его сторонам AB, CD, EF пересекаются в одной точке.

5. В треугольнике ABC сторона AC наименьшая. На сторонах AB и CB взяты точки K и L соответственно, причем $KA = AC = CL$. Пусть M — точка пересечения AL и KC, а I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что прямая MI перпендикулярна прямой AC.

6. Биссектрисы двух соседних углов четырехугольника пересекаются в середине его стороны. Докажите, что либо у этого четырехугольника равны два угла, либо две стороны параллельны.

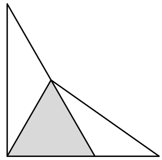
7. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

8. На сторонах AB и AD единичного квадрата $ABCD$ выбраны точки N и P соответственно. Причем периметр треугольника ANP равен 2. Докажите, что $\angle NCP = 45^\circ$.

source:geometry/triangle-centers-g8/r2.tex

Разнобой

1. Два одинаковых прямоугольных треугольника из бумаги удалось положить один на другой так, как показано на рисунке (при этом вершина прямого угла одного попала на сторону другого). Докажите, что заштрихованный треугольник равносторонний.



2. Высоты AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y — середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что прямые XY и $A'B'$ перпендикулярны.

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BB_1. Оказалось, что $BC = AB_1$. Докажите, что $BC = AB_1 = BB_1$.

4. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол $\angle MKN$ — прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

5. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. Точка D на стороне BC такова, что $\angle BMA = \angle DMC$. Оказалось, что $CD + DM = BM$. Докажите, что $\angle ACB + \angle ABM = \angle BAC$.

6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Найдите угол A, если известно, что $\angle C_1B_1B = 30^\circ$, а $\angle C \neq 120^\circ$.

source:geometry/mixture-g8/r2.tex

source:geometry/mixture-g8/r2/triangles.asy

Примеры, оценки, разбиения и принцип Дирихле

1. Какое минимальное количество доминошек на клетчатой доске 100×100 надо закрасить, так чтобы в каждой строке и в каждом столбце была закрашена хотя бы одна клетка?

2. Внутри правильного треугольника со стороной 1 отмечены пять точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя отмеченными точками меньше 0,5.

3. Какое максимальное количество шахматных
(a) ладей **(b)** королей **(c)** слонов **(d)** лошадей
можно расставить на доске 7×7 таким образом, чтобы они не били друг друга?

4. На столе из спичек длины 1 выложен правильный треугольник со стороной n, разбитый на правильные треугольники со стороной 1 прямыми, параллельными сторонам треугольника. Какое минимальное количество спичек нужно убрать, чтобы на столе не осталось ни одного правильного треугольника со стороной 1?

5. Какое
(a) наибольшее **(b)** наименьшее
количество клеток доски 8×8 можно закрасить таким образом, чтобы в любом квадрате 3×3 оказалось ровно 3 закрашенные клетки?

6. Доска 8×8 случайным образом разрезана на доминошки 1×2. Какое максимальное количество доминошек можно заведомо разрезать одной горизонтальной или вертикальной чертой, проходящей по границам клеток?

7. Дана таблица размера $m\times n$ ($m, n > 1$). В ней отмечены центры всех клеток. Какое наибольшее число отмеченных центров можно выбрать так, чтобы никакие три из них не являлись вершинами прямоугольного треугольника (катеты не обязательно должны быть параллельны сторонам таблицы)?

8. В языке племени АУ две буквы — «а» и «у». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причем в каждом слове не больше 15 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова (может быть совпадающие), то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.

source:combinatorics/pigeonhole-principle-g8.tex

Индукция и минимальный контрпример

1. Есть колода из n карточек, пронумерованных числами от 1 до n. За раз разрешается выбрать стопку из несколько подряд идущих карточек в любом месте колоды, перевернуть эту стопку и положить обратно. Докажите, что за несколько раз можно упорядочить все карточки в колоде по возрастанию.

2. В каждой клетке доски $3 \times n$ стоит фишка одного из трех цветов, причем всего фишек каждого цвета на доске поровну. Внутри каждой из трех строк разрешается переставлять фишки в любом порядке. Докажите, что их можно расставить так, что в каждом столбце будут фишки всех трех цветов.

3. У выпуклого многоугольника наружу растут волосы. Проведены несколько его диагоналей, причем у каждой диагонали с одной стороны растут волосы. Докажите, что среди частей, на которые разрезан многоугольник этими диагоналями, найдется такая, волосы которой растут наружу.

4. Автомобиль с заполненным баком может проехать все кольцевое шоссе целиком. Вдоль шоссе расположены несколько бензоколонок, суммарного количества бензина в которых хватит, чтобы заполнить бак. Докажите, что существует бензоколонка, стартовав с которой с пустым баком, можно проехать все шоссе (дозаправляясь по пути).

5. В выпуклом многоугольнике проведено несколько попарно непересекающихся по внутренним точкам диагоналей (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Докажите, что найдутся хотя бы две вершины многоугольника, из которых не выходит ни одной диагонали.

6. В группе людей каждый хоть с кем-то из этой группы знаком. Докажите, что группу можно разбить на две подгруппы с условием, чтобы у любого человека был хотя бы один знакомый из противоположной подгруппы.

7. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета таким образом, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.

8. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники с условием, чтобы у каждого треугольника вершины были трех разных цветов.

9. В чемпионате по футболу участвует n команд. В какое минимальное число дней его можно организовать так, чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось сыграть две игры в один день?

Графы: пути, связность и остовные деревья

Определения. *Маршрутом* длины k в графе называется последовательность $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ не обязательно различных вершин графа, такая что все пары вершин (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{k-1}, v_k) соединены ребрами. Маршрут называется *путем* (или *цепью*), если все его ребра различны. Маршрут называется *простым путем* (или *простой цепью*), если все его вершины различны. Цепь, у которой первая и последняя вершины совпадают, называется *циклом*. Цикл называется *простым циклом*, если никакие две его вершины, за исключением первой и последней, не совпадают. *Расстоянием* между двумя вершинами графа называется минимальная длина маршрута, соединяющего эти две вершины.

Графы предполагаются без петель и кратных ребер (если не оговорено иное).

1. *(Эта задача должна настроить вас на необходимый уровень строгости.)* В графе две вершины можно соединить маршрутом. Докажите, что их можно соединить простой цепью.

2. Напомним, что *деревом* называется связный граф, не содержащий простых циклов.
(a) Докажите, что в дереве любые две вершины соединяет единственная простая цепь.
(b) Докажите, что в дереве всегда есть висячая вершина (т. е. вершина степени 1).
(c) Докажите, что в дереве на n вершинах ровно $n - 1$ ребер.

3. **(a)** Докажите, что в связном графе можно выкинуть несколько ребер так, чтобы осталось дерево (такое дерево называется *остовным деревом* графа).
(b) Существует ли граф, у которого ровно два остовных дерева?

4. Докажите, что у каждого связного графа существует вершина, после удаления которой он не теряет связности.

5. Докажите, что в связном графе на $n \geqslant 3$ вершинах существует маршрут длины $2n - 4$, проходящий через все вершины.

6. Для каждой вершины графа напишем на ней наибольшее из расстояний до всех остальных вершин графа. После этого выделим множество вершин, для которых выписанное число минимально. Это множество называется *центром* графа. Докажите, что центр дерева состоит из одной или двух вершин, соединенных ребром.

7. Есть несколько городов, одновременно существующих в двух мирах: реальном и параллельном. Два города соединены дорогой в реальном мире тогда и только тогда, когда они они не соединены в параллельном. Известно, что существуют два города, расстояние в реальном мире между которыми больше двух. Докажите, что расстояние между любыми двумя городами в параллельном мире не больше трех.

8. В связном графе $n \geqslant 5$ вершин и $2n - 1$ ребер. Докажите, что в нем можно найти простой цикл, после уничтожения всех ребер которого граф не потеряет связность.

9. В тридевятом государстве некоторые города соединены дорогами с односторонним движением. В стране транспортные проблемы: неверно, что из любого города можно добраться до любого другого. Царь Горох выбрал пару городов, еще не соединенных дорогой, и приказал Ивану-дурачку соединить их. Докажите, что Иван может задать направление движения так, что транспортные проблемы в стране не решатся.

source:combinatorics/graph/path-g8/r2.tex

Комбинаторика

1. Сколькими способами можно построить замкнутую ломаную, вершинами которой являются вершины правильного шестиугольника (ломаная может быть самопересекающейся)?

2. На плоскости дано n прямых *общего положения,* т. е. таких, что никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Чему равно число образованных ими треугольников?

3. Найдите число прямоугольников, составленных из клеток доски с m горизонталями и n вертикалями, которые содержат клетку с координатами (p, q).

4. **(a)** У Супермена есть 8 уникальных способностей, а у Человека-Паука только 7. Каждый день они меняются одной способностью. Сколькими способами могут произойти обмены в течение трех дней?
(b) Бэтмен знает 8 новых анекдотов, а Шапокляк — 7 старых. Сколько различных способов обменять три анекдота одного на три анекдота другой?

5. План города представляет собой квадрат $n \times n$. Улицы называются 0-я вертикальная, ..., n-ая вертикальная, 0-я горизонтальная, ..., n-ая горизонтальная, на пересечении k-ой горизонтальной улицы и m-ой вертикальной улицы находится автозаправка. На каждом перекрестке можно ехать влево или вверх. Сколькими способами можно составить маршрут из $X(0, 0)$ в $Y(n, n)$, если известно, что маршрут проходит через автозаправку?

6. Имеется куб размером $10 \times 10 \times 10$, состоящий из маленьких единичных кубиков. В центре O одного из угловых кубиков сидит кузнечик. Он может прыгать в центр кубика, имеющего общую грань с тем, в котором кузнечик находится в данный момент, причем так, чтобы расстояние до точки O увеличивалось (то есть, либо вверх, либо вправо, либо вперед). Сколькими способами кузнечик может допрыгать до кубика, противоположного исходному?

7. Рассмотрим множество A из n элементов. Выделим в нем элемент a.
(a) Сколько существует подмножеств из k элементов, не содержащих элемент a?
(b) Сколько существует подмножеств из k элементов, содержащих элемент a?
(c) Сколько существует подмножеств из k элементов, если нам не важно, содержат они или нет элемент a?
(d) Докажите тождество $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ двумя способами (комбинаторно и алгебраически).

8. Докажите тождество $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$ двумя способами (комбинаторно и алгебраически).

9. **(a)** Сколькими способами можно выбрать произвольное непустое подмножество из множества, содержащего n элементов?

Докажите формулы:
(b) $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;
(c) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0$.

10. Докажите формулы:

(a) $C_r^m \cdot C_m^k = C_r^k \cdot C_{r-k}^{m-k}$, где $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant r$;

(b) $C_n^k = C_{n-2}^k + 2 \cdot C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}$;

(c) $C_n^k = C_{n-3}^k + 3 \cdot C_{n-3}^{k-1} + 3 \cdot C_{n-3}^{k-2} + C_{n-3}^{k-3}$;

(d) $C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \ldots + C_n^n C_n^0 = C_{2n}^n$;

(e) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$;

(f) $C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+m}^n = C_{m+n+1}^{n+1}$.

source:combinatorics/counting-g8/r2.tex

Глава 2

Кобры (8-1)

Вступительная олимпиада

Довывод

1. Сколько существует пятизначных чисел, кратных 101 и одинаково читающихся слева направо и справа налево?

2. На шахматной доске (8×8) стоят 16 королей, не бьющих друг друга. Какое наименьшее число королей при этом может стоять у края доски?

3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K, для которой $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в ее середине. Найдите углы треугольника ABC.

4. Решите уравнение в натуральных числах $m(1 + m + m^2) = 4n(n + 1)$.

Вывод

5. В треугольнике ABC точка M — середина AC. На стороне BC взяли точку K так, что угол BMK прямой. Оказалось, что $BK = AB$. Найдите $\angle MBC$, если $\angle ABC = 110°$.

6. Дано 41 различное натуральное число, меньшее 1000. Известно, что среди любых трех из них есть два, дающих в произведении точный квадрат. Докажите, что среди этих чисел есть точный квадрат.

7. В клетки таблицы $100{\times}100$ расставили числа от 1 до 100, при этом каждое число оказалось написано ровно 100 раз. Докажите, что либо в какой-то строчке, либо в каком-то столбце не менее 10 различных чисел.

`source:olympiad/g8-intro.tex`

Сравнения по модулю и малая теорема Ферма

0. Найдите остаток от деления
(a) 12^{100} на 13; **(b)** 2^{1001} на 11.

1. **(a)** Любое число сравнимо с суммой его цифр по модулю 9.
(b) Любое число сравнимо со знакопеременной суммой его цифр по модулю 11.

2. Пусть n — нечетное число. Найдите остаток от деления на n суммы $1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3$.

3. **(a)** Пусть $a^n = 0 \pmod{a+b}$. Докажите, что $b^n = 0 \pmod{a+b}$.
(b) p, q — простые числа, причем $q = p + 2$. Докажите, что $p^q + q^p$ делится на $p + q$.

4. На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу — на одну монету больше. Какова наименьшая возможная цена покупки?

5. **(a)** Докажите, что при $p > 2$ числитель дроби

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

делится на p (p — простое).
(b*) Докажите, что при $p > 3$ он делится даже на p^2.

---

6. Пусть a не делится на простое число p.
(a) Докажите, что если $ax = ay \pmod{p}$, то $x = y \pmod{p}$.
(b) Докажите, что числа $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$ дают все ненулевые остатки по модулю p.

7. *(Малая теорема Ферма)* Пусть a не делится на простое число p. Докажите, что $a^{p-1} = 1 \pmod{p}$. *(Указание: докажите, что $(p-1)! = a^{p-1}(p-1)!$.)*

8. Найдите остаток от деления
(a) 7^{100} на 11; **(b)** $14^{14^{14}}$ на 17.

9. Найдите остаток от деления числа, состоящего из 19 девяток, на 19.

10. Если a не делится на 17, то либо $a^8 - 1$, либо $a^8 + 1$ делится на 17.

Китайская теорема об остатках

1. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом рядовой Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?

2. Если a взаимно просто с n, то сравнение $ax = b \pmod{m}$ имеет ровно одно решения в остатках по модулю m.

3. **(a)** Докажите, что для любого набора попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ найдется такое x, что

$$\begin{cases} x = 1 \pmod{m_1} \\ x = 0 \pmod{m_2} \\ x = 0 \pmod{m_3} \\ \quad \ldots \\ x = 0 \pmod{m_k} \end{cases}$$

(b) Докажите, что для любого набора попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ и любого набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ система

$$\begin{cases} x = a_1 \pmod{m_1} \\ x = a_2 \pmod{m_2} \\ \quad \ldots \\ x = a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение по модулю $m_1 m_2 \ldots m_k$.

4. Докажите, что существует 100 идущих подряд натуральных чисел, каждое из которых делится на какой-нибудь куб.

5. При каких целых n число $n^2 + 1$ делится на 65?

6. Докажите, что $n^{561} = n \pmod{561}$ для любого n.

7. Сколько существует 10-значных чисел n таких, что последние цифры числа n^2 образуют число n?

`source:algebra/number-theory/remainders-g8/r1-2-chihese-remainder-theorem.tex`

Вокруг МТФ и другие задачи

Если a взаимно просто с m, то $a^{\varphi(m)} = 1 \pmod{m}$, где $\varphi(m)$ — число остатков, взаимно простых с m.

0. **(a)** $\varphi(nm) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$, если n и m взаимно просты.
(b) Найдите $\varphi(p^k)$, где p — простое.

---

1. Докажите, что уравнение
(a) $3x^2 + 2 = y^2$ **(b)** $8x^3 - 13y^3 = 17$
не имеет решений в целых числах. *(Указание: рассмотрите остатки по подходящему модулю.)*

2. Докажите, что существует бесконечно много чисел, которые не представимы в виде суммы **(a)** двух **(b)** трех квадратов.

3. **(a)** Докажите, что если число $a^n - 1$ простое ($n > 1$, $a > 1$), то $a = 2$, а n — простое число.
(b) Докажите, что если число $a^n + 1$ простое ($n > 1$, $a > 1$), то a четно, а n — степень двойки.

4. Если число вида $2^p - 1$ составное, то все его простые делители имеют вид $2kp + 1$.

5. Докажите, что числа вида $2^{2^n} + 1$ попарно взаимно просты; выведите отсюда, что простых чисел бесконечно много.

6. Существует ли степень тройки, оканчивающаяся на 000 001?

7. **(a)** Существует ли такое n, что $n^2 + 1$ делится на 103?
(b) Существует ли такое n, что $n^2 + n + 1$ делится на 101?

source:algebra/number-theory/remainders-g8/r1-3-mixture.tex

Общие делители

0. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел быть полным квадратом?

1. Чему может быть равен наибольший общий делитель чисел $5n + 13$ и $3n + 8$?

2. Каков наибольший возможный общий делитель чисел $9m + 7n$ и $3m + 2n$, если числа m и n не имеют общих делителей, кроме единицы?

3. Дано простое число p. Для каких натуральных n число $n(n + p)$ является полным квадратом?

4. Может ли произведение трех последовательных натуральных чисел быть точной седьмой степенью?

5. Найдите все простые p, для которых $p^3 + 2p^2 + 1$ — степень четверки.

6. Число $(x^3 - 1)$ является полным квадратом. Докажите, что число x дает остаток 1 при делении на 3.

Считаем степень вхождения каждого простого по отдельности.

7. Для натуральных a, b, c докажите, что

$$[a, b, c] = \frac{abc \cdot (a, b, c)}{(a, b) \cdot (a, c) \cdot (b, c)} .$$

8. Натуральные числа a, b, c взаимно просты в совокупности и удовлетворяют равенству $(b + c) \cdot a = bc$. Докажите, что $b + c$ — точный квадрат.

9. Натуральные числа m, n таковы, что $m^2 + n^2 + m$ кратно mn. Докажите, что m — квадрат натурального числа.

source:algebra/number-theory/GCD-g8r1.tex

Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида. Пусть a и b — целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел $a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \ldots > r_n$ определена тем, что каждое r_k — это остаток от деления предпредыдущего числа на предыдущее, а предпоследнее делится на последнее нацело, то есть

$$\begin{aligned}
a &= bq_0 + r_1\,;\\
b &= r_1q_1 + r_2\,;\\
r_1 &= r_2q_2 + r_3\,;\\
&\vdots\\
r_{k-2} &= r_{k-1}q_{k-1} + r_k\,;\\
&\vdots\\
r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n\,;\\
r_{n-1} &= r_nq_n\,.
\end{aligned}$$

Тогда $(a, b) = r_n$.

Линейное представление НОД. Для любых натуральных чисел a и b существуют целые числа n и m такие, что $(a, b) = an + bm$.

0. **(a)** Докажите, что алгоритм Евклида действительно выдает наибольший общий делитель двух чисел.

(b) Докажите, что линейное представление НОД существует.

1. Найдите все натуральные числа, дающие остаток 15 при делении на 87 и остаток 2 при делении на 38.

2. Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

3. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что $(a + b, a^2 + b^2) < 3$.

4. Известно, что $(m, n) = 1$. Какое наибольшее возможное значение может принимать $(2016n+m, 2016m + n)$?

5. Найдите $(\underbrace{11\ldots1}_{m}, \underbrace{11\ldots1}_{n})$.

6. Найдите $(2^n - 1, 2^m - 1)$.

7. Верно ли, что для любых натуральных a и b найдутся такие натуральные p и q, что при любом натуральном n числа $p + an$ и $q + bn$ взаимно просты?

source:algebra/number-theory/euclids-algorithm-g8/r1.tex

Неравенства

Неравенства о средних.

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{1/a+1/b}\,.$$

Первое выражение называется *средним квадратическим,* второе — *средним арифметическим,* третье — *средним геометрическим,* а последнее — *средним гармоническим.*

1. Докажите оставшиеся неравенства о средних.

2. Докажите, что для положительных a и b выполнено

(a) $a/b + b/a \geqslant 2$; **(b)** $7a^3 + b^7/7 \geqslant 2\sqrt{a^3b^7}$; **(c)** $2a^2 + b/a \geqslant \dfrac{8a^2b}{2a^3+b}$.

3. Для положительных чисел a, b, c докажите, что
(a) $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$;
(b) $ab+db+ca \geqslant a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$;
(c) $(a+b+c)\cdot(1/a+1/b+1/c) \geqslant 9$.

4. Пусть a, b, c и d — такие числа, что $ab=1$ и $ac+bd=2$. Докажите, что $cd \leqslant 1$.

5. Для положительных a, b, c, d, e докажите, что

$$\frac{1}{16a^{16}} + \frac{1}{16b^{16}} + \frac{1}{8c^8} + \frac{1}{4d^4} + \frac{1}{2e^2} + abcde \geqslant 2\,.$$

6. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнены неравенства

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd} \geqslant \frac{4}{1/a+1/b+1/c+1/d}\,.$$

При каких a, b, c, d в этих неравенствах достигается равенство?

7. **(a)** Разложите на множители выражение $a^3+b^3+c^3-3abc$.
(b) Докажите неравенства о средних для трех чисел.

8. Докажите, что для положительных a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 выполнено

$$7(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2) \geqslant (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2\,.$$

source:algebra/inequality/mean-g8r1.tex

Финальный разнобой

1. Чему может быть равен $(x+3, x^2-x+2)$?

2. Докажите, что для любого натурального n выполнено $n^{20} \equiv n^4 \pmod{4080}$.

3. Докажите, что простых чисел вида $3k+2$ бесконечно много.

4. Можно ли квадрат представить в виде суммы 17 квадратов?

5. Для положительного x докажите, что $2x + 3/8 \geqslant \sqrt[4]{x}$.

6. Для положительных x, y, z докажите, что

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqslant x + y + z\,.$$

7. Существует ли такое 10000-значное число, что при замене любых трех его соседних цифр, получится составное число?

8. Для какого наибольшего количества чисел выполнено неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant x_1(x_2 + x_3 + \ldots + x_n)\,?$$

9. Докажите, что любое простое число может быть делителем числа вида $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

10. Докажите, что существуют 18 последовательных натуральных чисел, среди которых нет числа, взаимно простого с остальными.

11. Докажите, что существует бесконечно много таких пар различных натуральных чисел $k, n > 1$, что
(a) $(k!+1, n!+1) > 1$; **(b)** $(k!-1, n!-1) > 1$.

12. Докажите для положительных a, b, c, d неравенство

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{abcd}\,.$$

source:algebra/mixture-g8-final/r1.tex

Удвоение медианы

1. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной из их общей вершины.

2. В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение медианы BM к стороне BC.

3. На медиане BM треугольника ABC взяли точку E так, что CEM равен углу ABM. Докажите, что отрезок EC равен одной из сторон треугольника.

4. На сторонах AB и BC вовне построили квадраты $ABKL$ и $CBNT$. Доказать, что отрезок KN в два раза больше медианы BM треугольника ABC.

5. В треугольнике ABC точка M — середина AC. На стороне BC взяли точку K так, что угол BMK прямой. Оказалось, что $BK = AB$. Найдите MBC, если $\angle ABC = 110°$.

6. В треугольнике равны две медианы. Докажите, что он равнобедренный.

7. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC и CD равны, M — середина стороны AD. Известно, что угол BMC равен $90°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

9. В треугольнике ABC проведена медиана AF. Точка D — середина отрезка AF, E — точка пересечения прямой CD и стороны AB. Известно, что $BD = BF = CF$. Докажите, что $AE = DE$.

source:geometry/median-doubling-g8/r1.tex

Задачи для самостоятельных размышлений

1. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудаленную от точек C и D. Пусть точка K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на BC отложили отрезок CM равный высоте AH. На стороне AB отметили точку K так, что $\angle KMC = 90°$. Найти $\angle ACK$.

3. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC, и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD, пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PD$.

source:geometry/mixture-g8-more.tex

Четвертый «признак равенства» треугольников

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $AD = BC$; $\angle ABD + \angle CDB = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.
2. Пусть K — середина стороны BC треугольника ABC. На лучах AB и AC взяты точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = AY$ и точка K лежит на отрезке XY. Докажите, что $BX = CY$.
3. На стороне BC равностороннего треугольника ABC взята точка M, а на продолжении стороны AC за точку C — точка N, причем $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.
4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, в котором $AB = CD$, на сторонах AB и CD выбраны точки K и M соответственно. Оказалось, что $AM = KC$, $BM = KD$. Докажите, что угол между прямыми AB и KM равен углу между прямыми KM и CD.
5. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пресекаются в точке I. Найдите $\angle C$, если $A_1I = B_1I$.
6. Обязательно ли треугольник равнобедренный, если точка пересечения биссектрис одинаково удалена от середин двух сторон?

source:geometry/supplementary-triangles-g8/r1.tex

Отрезки

1. На катетах AC и BC равнобедренного прямоугольного треугольника отметили точки M и L соответственно так, что $MC = BL$. Точка K — середина гипотенузы AB. Докажите, что треугольник MKL также является прямоугольным равнобедренным.
2. В четырехугольнике $ABCD$ верно, что $AD = AB + CD$. Кроме того, оказалось, что биссектриса угла A проходит через точку M, середину стороны BC. Докажите, что биссектриса угла D также проходит через точку M.
3. В треугольнике ABC биссектриса AE равна по длине отрезку EC. Причем $2AB = AC$. Найдите углы треугольника ABC.
4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выполнено $\angle ABD = 90^\circ$ и $AD = BC + CD$. Найдите отношение BC к AD.
5. В равнобедренном треугольнике ABC выполнено $\angle A = 100^\circ$. Докажите, что если BD — биссектриса угла B, то $BD + DA = BC$.
6. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отметили точки K и L соответственно так, что $AK = BC$ и $CK = BL$. Найдите угол между прямыми BK и AL.

source:geometry/equal-segments-g8/r1.tex

Центры треугольников

1. В треугольнике ABC угол A равен α. Найдите

(a) угол между высотами BH_B и CH_C;

(b) угол между биссектрисами BB_1 и CC_1.

2. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и C равны по $146°$. Биссектриса угла D пересекает серединный перпендикуляр к стороне BC в точке O. Найдите $\angle AOD$.

3. В прямоугольнике $ABCD$ биссектрисы угла B и внешнего угла D пересекают сторону AD и прямую AB в точках K, M соответственно. Докажите что отрезок KM равен и перпендикулярен отрезку BD.

4. В треугольнике ABC сторона AC наименьшая. На сторонах AB и CB взяты точки K и L соответственно, причем $KA = AC = CL$. Пусть M — точка пересечения AL и KC, а I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что прямая MI перпендикулярна прямой AC.

5. Биссектрисы двух соседних углов четырехугольника пересекаются в середине его стороны. Докажите, что либо у этого четырехугольника равны два угла, либо две стороны параллельны.

6. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

7. На сторонах AB и AD единичного квадрата $ABCD$ выбраны точки N и P соответственно. Причем периметр треугольника ANP равен 2. Докажите, что $\angle NCP = 45°$.

8. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ выбраны точки N и P соответственно, а на отрезке AN выбрана точка Q так, что $NP = NC$ и $\angle QPN = \angle NCB$. Докажите, что $\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle AQP$.

source:geometry/triangle-centers-g8/r1.tex

Разнобой

1. Высоты AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y — середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что прямые XY и $A'B'$ перпендикулярны.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BB_1. Оказалось, что $BC = AB_1$. Докажите, что $BC = AB_1 = BB_1$.

3. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол $\angle MKN$ — прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

4. Равносторонние треугольники ABC и CDE имеют только одну общую точку и лежат по одну сторону от прямой AE. Точки M, N и K — середины отрезков BD, AC и CE соответственно. Докажите, что треугольник MNK равносторонний.

5. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. Точка D на стороне BC такова, что $\angle BMA = \angle DMC$. Оказалось, что $CD + DM = BM$. Докажите, что $\angle ACB + \angle ABM = \angle BAC$.

6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Найдите угол A, если известно, что $\angle C_1B_1B = 30°$, а $\angle C \neq 120°$.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектриса BD в два раза короче биссектрисы AE. Найдите углы треугольника ABC.

source:geometry/mixture-g8/r1.tex

Примеры, оценки, разбиения и принцип Дирихле

1. Какое минимальное количество доминошек на клетчатой доске 100×100 надо закрасить, так чтобы в каждой строке и в каждом столбце была закрашена хотя бы одна клетка?

2. Внутри правильного треугольника со стороной 1 отмечены пять точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя отмеченными точками меньше 0,5.

3. Какое максимальное количество шахматных
(a) ладей **(b)** королей **(c)** слонов **(d)** лошадей
можно расставить на доске 7×7 таким образом, чтобы они не били друг друга?

4. На столе из спичек длины 1 выложен правильный треугольник со стороной n, разбитый на правильные треугольники со стороной 1 прямыми, параллельными сторонам треугольника. Какое минимальное количество спичек нужно убрать, чтобы на столе не осталось ни одного правильного треугольника со стороной 1?

5. Какое
(a) наибольшее **(b)** наименьшее
количество клеток доски 8×8 можно закрасить таким образом, чтобы в любом квадрате 3×3 оказалось ровно 3 закрашенные клетки?

6. Доска 8×8 случайным образом разрезана на доминошки 1×2. Какое максимальное количество доминошек можно заведомо разрезать одной горизонтальной или вертикальной чертой, проходящей по границам клеток?

7. Дана таблица размера $m \times n$ ($m, n > 1$). В ней отмечены центры всех клеток. Какое наибольшее число отмеченных центров можно выбрать так, чтобы никакие три из них не являлись вершинами прямоугольного треугольника (катеты не обязательно должны быть параллельны сторонам таблицы)?

8. В языке племени АУ две буквы — «а» и «у». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причем в каждом слове не больше 15 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова (может быть совпадающие), то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.

`source:combinatorics/pigeonhole-principle-g8.tex`

Индукция и минимальный контрпример

1. У выпуклого многоугольника наружу растут волосы. Проведены несколько его диагоналей, причем у каждой диагонали с одной стороны растут волосы. Докажите, что среди частей, на которые разрезан многоугольник этими диагоналями, найдется такая, волосы которой растут наружу.

2. В каждой клетке доски $3 \times n$ стоит фишка одного из трех цветов, причем всего фишек каждого цвета на доске поровну. Внутри каждой из трех строк разрешается переставлять фишки в любом порядке. Докажите, что их можно расставить так, что в каждом столбце будут фишки всех трех цветов.

3. Автомобиль с заполненным баком может проехать все кольцевое шоссе целиком. Вдоль шоссе расположены несколько бензоколонок, суммарного количества бензина в которых хватит, чтобы заполнить бак. Докажите, что существует бензоколонка, стартовав с которой с пустым баком, можно проехать все шоссе (дозаправляясь по пути).

4. В выпуклом многоугольнике проведено несколько попарно непересекающихся по внутренним точкам диагоналей (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Докажите, что найдутся хотя бы две вершины многоугольника, из которых не выходит ни одной диагонали.

5. В группе людей каждый хоть с кем-то из этой группы знаком. Докажите, что группу можно разбить на две подгруппы с условием, чтобы у любого человека был хотя бы один знакомый из противоположной подгруппы.

6. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета таким образом, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.

7. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники с условием, чтобы у каждого треугольника вершины были трех разных цветов.

8. В чемпионате по футболу участвует n команд. В какое минимальное число дней его можно организовать так, чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось сыграть две игры в один день?

9. На континенте $2n$ городов, некоторые из которых соединены двусторонними авиалиниями, так что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что континент можно разбить на несколько (возможно одну) стран так, что в каждой стране будет не менее двух городов и для любых двух городов одной страны будет существовать единственный маршрут, соединяющий эти города и не выходящий за пределы страны.

source:combinatorics/induction-g8/r1.tex

Графы: пути, связность и остовные деревья

Определения. *Маршрутом* длины k в графе называется последовательность $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ не обязательно различных вершин графа, такая что все пары вершин (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{k-1}, v_k) соединены ребрами. Маршрут называется *путем* (или *цепью*), если все его ребра различны. Маршрут называется *простым путем* (или *простой цепью*), если все его вершины различны. Цепь, у которой первая и последняя вершины совпадают, называется *циклом*. Цикл называется *простым циклом*, если никакие две его вершины, за исключением первой и последней, не совпадают. *Расстоянием* между двумя вершинами графа называется минимальная длина маршрута, соединяющего эти две вершины.

Графы предполагаются без петель и кратных ребер (если не оговорено иное).

1. *(Эта задача должна настроить вас на необходимый уровень строгости.)* В графе две вершины можно соединить маршрутом. Докажите, что их можно соединить простой цепью.

2. **(a)** Докажите, что в связном графе можно выкинуть несколько ребер так, чтобы осталось дерево (такое дерево называется *остовным деревом* графа).
(b) Существует ли граф, у которого ровно два остовных дерева?

3. Докажите, что у каждого связного графа существует вершина, после удаления которой он не теряет связности.

4. Докажите, что в связном графе на $n \geqslant 3$ вершинах существует маршрут длины $2n - 4$, проходящий через все вершины.

5. В связном графе $n \geqslant 5$ вершин и $2n - 1$ ребер. Докажите, что в нем можно найти простой цикл, после уничтожения всех ребер которого граф не потеряет связность.

6. Есть несколько городов, одновременно существующих в двух мирах: реальном и параллельном. Два города соединены дорогой в реальном мире тогда и только тогда, когда они они не соединены в параллельном. Известно, что существуют два города, расстояние в реальном мире между которыми больше двух. Докажите, что расстояние между любыми двумя городами в параллельном мире не больше трех.

7. В тридевятом государстве некоторые города соединены дорогами с односторонним движением. В стране транспортные проблемы: неверно, что из любого города можно добраться до любого другого. Царь Горох выбрал пару городов, еще не соединенных дорогой, и приказал Ивану-дурачку соединить их. Докажите, что Иван может задать направление движения так, что транспортные проблемы в стране не решатся.

8. *Диаметром* графа называется максимальное расстояние между его вершинами. Какое максимальное число вершин может быть в дереве с 10 висячими вершинами и с диаметром 10?

9. Несколько деревень соединены дорогами, причем длина каждой дороги меньше 10 км. Известно, из любой деревни до любой другой можно добраться, проехав меньше 10 км. Одну дорогу закрыли, но все еще можно добраться из любой деревни до любой другой.

Докажите, что это можно сделать, проехав меньше 30 км. (Дороги могут быть извилистыми, т. е. неравенство треугольника не обязательно выполнено).

source:combinatorics/graph/path-g8/r1.tex

Комбинаторика

1. В несуществующем языке 8 гласных и 20 согласных звуков. Словом считается такая последовательность звуков, где гласные и согласные чередуются. Сколько семибуквенных слов в языке?

2. Хромая ладья умеет ходить на одну клетку вправо или на одну клетку вверх (по клетчатой плоскости). Ей очень хочется добраться из клетки с координатами $(0, 0)$ в клетку с координатами (m, n). В клетке (p, q) стоит Гэндальф $(0 < p < m, 0 < q < n)$. Сколькими способами она может добраться до цели, не встречаясь с Гэндальфом?

3. Докажите тождества хотя бы двумя способами. (В вашем арсенале: комбинаторные конструкции, бином Ньютона, свойство треугольника Паскаля, траектории хромой ладьи, явная формула для C_n^k...)

(a) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$;

(b) $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$;

(c) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;

(d) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$;

(e) $C_r^m \cdot C_m^k = C_r^k \cdot C_{r-k}^{m-k}$, где $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant r$;

(f) $C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+m}^n = C_{m+n+1}^{n+1}$;

(g) $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 3 \cdot C_n^3 + \ldots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$;

(h) $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = F_{n+1}$, где F_n — последовательность Фибоначчи ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$);

(i) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

4. У Максима есть по 5 шоколадок пяти видов, он хочет их раздать по одной каждому из 25 детей, пришедших на кружок. Сколькими способами он может это сделать?

5. Хромая ладья умеет ходить на одну клетку вверх, вправо или вперед по трехмерному клетчатому пространству. Сколькими способами она может попасть из клетки $(0, 0, 0)$ в клетку (m, n, k)?

6. Найдите число прямоугольников, составленных из клеток доски с m горизонталями и n вертикалями, которые содержат клетку с координатами (p, q).

7. Сколькими способами можно построить замкнутую n-звенную ломаную, вершинами которой являются вершины правильного n-угольника (ломаная может быть самопересекающейся)?

8. Сколькими способами можно выписать в ряд числа от 1 до n в некотором порядке, чтобы для каждого числа i, стоящего не в самом начале, хотя бы одно из чисел $i-1$, $i+1$ оказалось левее?

Глава 3

Ужи (9-3)

Вокруг вписанной и вневписанной окружностей

1. Докажите, что в любом треугольнике:
(a) $1/r = 1/r_a + 1/r_b + 1/r_c$; **(b)** $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$.

2. Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда:
(a) площадь треугольника равна произведению радиусов вписанной и одной из вневписанных окружностей;
(b) площадь треугольника равна произведению двух радиусов вневписанных окружностей.

3. На сторонах AB, BC, CD и DA единичного квадрата $ABCD$ отметили точки K, L, M и N соответственно так, что прямые KM и LN параллельны сторонам квадрата. Отрезок KL отсекает от квадрата треугольник периметра 1. Треугольник какой площади отсекает от квадрата отрезок MN?

4. Даны квадрат $ABCD$ и окружность с центром в вершине A, проходящая через вершины B и D. Точка K делит сторону BC в отношении $1 : 2$, считая от вершины B. В каком отношении делит сторону CD касательная к окружности, проведенная из точки K?

5. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 — точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1. Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC, содержит центр вневписанной окружности треугольника ABC.

6. $ABCD$ — параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой AC совпадают.

7. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N. Докажите, что точки пересечения отрезка MN со сторонами BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD.

8. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, касается катета BC и гипотенузы AB в точках P и Q соответственно. Вневписанная окружность, касающаяся катета BC, касается продолжения катета AC в точке T. Докажите, что точки P, Q и T лежат на одной прямой.

9. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке K, а продолжения стороны AB — в точке L. Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке X. Докажите, что CX — биссектриса угла ACN.

source:geometry/excircle.tex

Геометрические неравенства и экстремумы

1. **(a)** Каждая из высот параллелограмма не меньше той стороны, которой она перпендикулярна. Найдите угол между диагоналями параллелограмма.
(b) Определите вид треугольника, у которого каждая из двух высот не меньше стороны, к которой она проведена.

2. Сумма стороны и проведенной к ней высоты
(a) в параллелограмме **(b)** в треугольнике
одна и та же для всех сторон. Определите вид параллелограмма/треугольника.

3. На сторонах BC и AC равностороннего треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Докажите, что из отрезков AX, BY и XY можно составить треугольник.

4. **(a)** Остроугольный треугольник расположен внутри некоторой окружности. Докажите, что ее радиус не меньше радиуса окружности, описанной около треугольника.
(b) Верно ли аналогичное утверждение для прямоугольного или тупоугольного треугольников?

5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C', A' и B' соответственно так, что угол $A'C'B'$ — прямой. Докажите, что отрезок $A'B'$ длиннее диаметра вписанной окружности треугольника ABC.

6. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Точка A лежит на первой окружности, но не вне второй. Прямые AP и AQ пересекают вторую окружность в точках B и C. При каком положении точки A треугольник ABC имеет наибольшую площадь?

7. Докажите, что из всех треугольников с данным углом и данным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный.

8. На стороне BE равностороннего треугольника ABE вне его построен ромб $BCDE$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке F. Докажите, что $AF < BD$.

9. Известно, что в неравностороннем треугольнике ABC точка, симметричная точке пересечения медиан относительно стороны BC, принадлежит описанной окружности. Докажите, что $\angle BAC < 60°$.

source:geometry/inequality-and-extremum.tex

Передвижение точек

1. В середине лестницы, приставленной к стене, сидит котенок. Лестница начинает сползать по стене (и скользить по полу). Какую траекторию описывает котенок?

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что прямая, соединяющая их, все время проходит через точку B.

3. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности. Докажите, что точка пересечения H высот треугольника ABC движется по окружности, симметричной описанной окружности треугольника ABC относительно стороны AB, если
(a) треугольник ABC остроугольный; **(b)** если угол C тупой;
(c) если угол A тупой.

4. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности.
(a) Докажите, что точка I пересечения биссектрис треугольника ABC тоже движется по дуге некоторой окружности.
(b) Укажите центр окружности, по которой движется точка I.

5. Две мухи ползут по сторонам угла с вершиной O с одинаковой постоянной скоростью, одна в сторону точки O, вторая — от точки O. В какие-то два момента времени они оказались на одинаковом расстоянии от некоторой точки A. Докажите, что
(a) они все время от нее равноудалены;
(b) точка A лежит на биссектрисе угла O.

6. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности один по часовой стрелке, другой — против. Угловые скорости у них одинаковые. Четырехугольник AO_1CO_2 — параллелограмм. Докажите, что велосипедисты постоянно равноудалены от точки C.

7. Велосипедисты едут по двум концентрическим окружностям с центром O с одинаковыми угловыми скоростями против часовой стрелки. В начальный момент их положения A_1 и B_1 таковы, что $OA_1 \perp A_1B_1$. Докажите, что если в какой-то момент они располагаются в точках A_2 и B_2, то A_1A_2 делит B_1B_2 пополам.

`source:geometry/moving-points-g9/r3.tex`

Разнобой-повторение

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть H_A, H_B, H_C, H_D — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что
(a) $H_AH_B = AB$; **(b)** $H_AH_BH_CH_D$ — четырехугольник, равный $ABCD$.

2. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности.
(a) Докажите, что точка I_a пересечения биссектрис внешних углов B и C треугольника ABC движется по дуге некоторой окружности.
(b) Укажите центр этой окружности.

3. Из точки пересечения A двух окружностей одновременно с одинаковыми угловыми скоростями стартовали два велосипедиста B_1 и B_2, оба против часовой стрелки. Докажите, что
(a) все треугольники AB_1B_2 подобны;
(b) середина отрезка B_1B_2 движется по окружности.

4. **(a)** Дан треугольник ABC. Из точек A и C одновременно с равными скоростями стартуют две мухи в сторону точки B. Укажите точку, от которой они постоянно равноудалены.
(b) А если они двигаются в разные стороны: одна к точке B, а другая от точки B?
(c) Докажите, что в первом случае середина отрезка между мухами движется по прямой, параллельной биссектрисе угла B.

5. Даны два квадрата $ABCD$ и $AEFG$ с общей вершиной A, вершины указаны против часовой стрелки. Докажите, что прямые BE, CF и DG пересекаются в одной точке и найдите углы между этими прямыми.

6. **(a)** Ортоцентр H остроугольного треугольника ABC отразили относительно середины стороны AB. Докажите, что полученная точка диаметрально противоположна точке C в описанной окружности треугольника.
(b) Докажите, что вершины A и B остроугольного треугольника ABC, ортоцентр H, а также проекция H на медиану из вершины C лежат на одной окружности.

source:geometry/mixture-g9-1/r3.tex

Площади

1. Дан треугольник ABC. Внутри него взята такая точка M, что площади треугольников ABM, ACM, BCM равны. Докажите, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

2. Дан треугольник ABC. На сторонах BC, AC, AB отметили точки A', B', C' так, что $AB' : B'C = CA' : A'B = BC' : C'A = 2 : 3$. Найдите отношение площадей треугольников $A'B'C'$ и ABC.

3. Дан параллелограмм $ABCD$. Внутри него дана точка M. Докажите, что сумма площадей треугольников ABM и CDM равна сумме площадей треугольников BCM и ADM.

4. Дана трапеция $ABCD$, $AB = 10$. Обозначим точку пересечения AC и BD через X. На основании AD отмечена точка Y такая, что $XY \parallel CD$. Расстояние от X до AB равно 4, а расстояние от Y до CD равно 5. Найдите CD.

5. **(a)** Дан правильный треугольник ABC. Внутри него дана произвольная точка M. Обозначим расстояния от точки M до сторон треугольника ABC через d_a, d_b, и d_c. Докажите, что сумма $d_a + d_b + d_c$ не зависит от выбора точки M.
   (b) Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри выпуклого *равностороннего* многоугольника до прямых, содержащих его стороны, не зависит от выбора точки.
   (c) То же для *равноугольного* многоугольника.

6. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD равны и пересекаются в точке O. Внутри него дана точка M такая, что BM параллельно CD, а CM параллельно AD. Докажите, что M лежит на биссектрисе угла AOD.

7. Дан четырехугольник $ABCD$. Обозначим середины его диагоналей AC и BD через M и N соответственно. Пусть точка пересечения диагоналей $ABCD$ лежит на отрезках BN и CM. Найдите отношение площадей четырехугольников $BMNC$ и $ABCD$.

8. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Пусть M — середина BC, а N — середина CD. Отрезки AM и BN пересекаются в точке O. Докажите, что площадь треугольника ABO равна площади треугольника $CMON$.

9. Дан треугольник ABC. В нем провели медианы m_a, m_b, m_c. Из отрезков m_a, m_b, m_c составили треугольник. Найдите отношение площадей полученного треугольника и треугольника ABC.

`source:geometry/area-g9/r3.tex`

Вписанные углы

1. На стороне AB (на прямой!) равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка D. Через точку D провели касательную к описанной окружности треугольника ADC. Она пересекла описанную окружность треугольника BDC в точке M. Докажите, что $BM \parallel AC$.

2. На прямых AB, BC и CA лежат точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Точка O такова, что точки O, A, B_1, C_1 лежат на одной окружности и точки O, B, A_1 и C_1 лежат на одной окружности. Докажите, что точки O, C, A_1 и B_1 также лежат на одной окружности.

3. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке B, S_2 в точке C. В точках C и B проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке D. Докажите, что угол BDC не зависит от выбора прямой, проходящей через A.

4. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и P. Через точку A проведена касательная AB к окружности S_1, а через точку P — прямая CD, параллельная AB (точки B и C лежат на S_2, точка D — на S_1). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

5. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Описанная окружность треугольника O_1BO_2 пересекает вторую окружность в точке P, отличной от B. Докажите, что точки O_1, A и P лежат на одной прямой.

6. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC лежит точка M такая, что четырехугольник $BCDM$ — вписанный. Докажите, что прямая BD — общая касательная к описанным окружностям треугольников ABM и ADM.

7. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A_1 и B_1, окружности ω_2 и ω_3 пересекаются в точках A_2 и B_2, окружности ω_3 и ω_4 пересекаются в точках A_3 и B_3, окружности ω_4 и ω_1 пересекаются в точках A_4 и B_4. Докажите, что если все A_i лежат на одной окружности, то все B_i тоже лежат на одной окружности.

8. В треугольнике ABC проведена высота AH. В треугольниках ACH и ABH проведены высоты HM и HN соответственно. Докажите, что треугольники MAN и BAC подобны.

9. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Прямые AC и BC вторично пересекают окружность, проходящую через точки A, O и B, в точках E и K. Докажите, что прямые OC и EK перпендикулярны.

source:geometry/inscribed-angles-g9/r3.tex

Геометрическая добавка

1. Дан треугольник ABC. Из точки D на описанной окружности провели перпендикуляры на стороны треугольника DA_1, DB_1 и DC_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

2. На плоскости проведены 4 прямые общего положения. Докажите, что описанные окружности четырех треугольников, образованных этими прямыми пересекаются в одной точке.

3. **(a)** Дан треугольник ABC. Пусть H — ортоцентр, A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника, A_2, B_2, C_2 — середины отрезков AH, BH, CH, а точки A_3, B_3, C_3 — основания высот треугольника ABC. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности.
   (b) Докажите, что среди трех дуг A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 одна равна сумме двух других.

4. Дан треугольник ABC. Пусть A_1, B_1 — середины высот, проведенных из точек A, B, точка C' — основание высоты из точки C, H — ортоцентр. Докажите, что точки A_1, B_1, C', H лежат на одной окружности.

5. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению длин наибольшей и наименьшей его диагоналей.

6. Дан тортик в форме буквы `L`. С помощью одной линейки проведите прямую, которая делит его площадь пополам.

7. На стороне треугольника во внешнюю сторону построена дуга. Рассмотрим фигуру, являющуюся объединением данного треугольника и образовавшегося сектора. Постройте с помощью циркуля и линейки прямую через середину дуги, которая делит площадь данной фигуры пополам.

source:geometry/mixture-g9r3-3.tex

Глава 4

Удавы (9-2)

Вокруг вписанной и вневписанной окружностей

1. Докажите, что в любом треугольнике:
(a) $1/r = 1/r_a + 1/r_b + 1/r_c$; **(b)** $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$.

2. Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда:
(a) площадь треугольника равна произведению радиусов вписанной и одной из вневписанных окружностей;
(b) площадь треугольника равна произведению двух радиусов вневписанных окружностей.

3. На сторонах AB, BC, CD и DA единичного квадрата $ABCD$ отметили точки K, L, M и N соответственно так, что прямые KM и LN параллельны сторонам квадрата. Отрезок KL отсекает от квадрата треугольник периметра 1. Треугольник какой площади отсекает от квадрата отрезок MN?

4. Даны квадрат $ABCD$ и окружность с центром в вершине A, проходящая через вершины B и D. Точка K делит сторону BC в отношении $1 : 2$, считая от вершины B. В каком отношении делит сторону CD касательная к окружности, проведенная из точки K?

5. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 — точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1. Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC, содержит центр вневписанной окружности треугольника ABC.

6. $ABCD$ — параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой AC совпадают.

7. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N. Докажите, что точки пересечения отрезка MN со сторонами BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD.

8. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, касается катета BC и гипотенузы AB в точках P и Q соответственно. Вневписанная окружность, касающаяся катета BC, касается продолжения катета AC в точке T. Докажите, что точки P, Q и T лежат на одной прямой.

9. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке K, а продолжения стороны AB — в точке L. Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке X. Докажите, что CX — биссектриса угла ACN.

source:geometry/excircle.tex

Геометрические неравенства и экстремумы

1. **(a)** Каждая из высот параллелограмма не меньше той стороны, которой она перпендикулярна. Найдите угол между диагоналями параллелограмма.
   (b) Определите вид треугольника, у которого каждая из двух высот не меньше стороны, к которой она проведена.

2. Сумма стороны и проведенной к ней высоты
   (a) в параллелограмме **(b)** в треугольнике
   одна и та же для всех сторон. Определите вид параллелограмма/треугольника.

3. На сторонах BC и AC равностороннего треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Докажите, что из отрезков AX, BY и XY можно составить треугольник.

4. **(a)** Остроугольный треугольник расположен внутри некоторой окружности. Докажите, что ее радиус не меньше радиуса окружности, описанной около треугольника.
   (b) Верно ли аналогичное утверждение для прямоугольного или тупоугольного треугольников?

5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C', A' и B' соответственно так, что угол $A'C'B'$ — прямой. Докажите, что отрезок $A'B'$ длиннее диаметра вписанной окружности треугольника ABC.

6. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Точка A лежит на первой окружности, но не вне второй. Прямые AP и AQ пересекают вторую окружность в точках B и C. При каком положении точки A треугольник ABC имеет наибольшую площадь?

7. Докажите, что из всех треугольников с данным углом и данным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный.

8. На стороне BE равностороннего треугольника ABE вне его построен ромб $BCDE$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке F. Докажите, что $AF < BD$.

9. Известно, что в неравностороннем треугольнике ABC точка, симметричная точке пересечения медиан относительно стороны BC, принадлежит описанной окружности. Докажите, что $\angle BAC < 60°$.

`source:geometry/inequality-and-extremum.tex`

Передвижение точек

1. Две мухи ползут по сторонам угла с одинаковой постоянной скоростью. В какие-то два момента они оказались на одинаковом расстоянии от некоторой точки A. Докажите, что **(a)** они все время от нее равноудалены; **(b)** эта точка лежит на биссектрисе угла.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что прямая, соединяющая их, все время проходит через точку B.

3. Точки A и B движутся с постоянными равными скоростями по двум пересекающимся прямым. Докажите, что можно указать две точки C и D такие, что в каждый момент времени точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

4. Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Точка C движется по одной окружности, а точка D — по другой. При этом прямые CD и AB перпендикулярны и точки A, B, C и D не являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что длина отрезка CD не меняется, и D — точка пересечения высот треугольника ABC.

5. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности.
(a) Докажите, что точка I пересечения биссектрис треугольника ABC тоже движется по дуге некоторой окружности.
(b) Укажите центр окружности, по которой движется точка I.

6. Велосипедисты едут по двум концентрическим окружностям с центром O с одинаковыми угловыми скоростями против часовой стрелки. В начальный момент их положения A_1 и B_1 таковы, что $OA_1 \perp A_1B_1$. Докажите, что если в какой-то момент они располагаются в точках A_2 и B_2, то A_1A_2 делит B_1B_2 пополам.

7. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности один по часовой стрелке, другой — против. Угловые скорости у них одинаковые. Четырехугольник AO_1CO_2 — параллелограмм. Докажите, что велосипедисты постоянно равноудалены от точки C.

8. **(a)** На прямой лежат три точки A, B, C. X и Y — точки на плоскости такие, что $AX = XB$ и $BY = YC$. $BXZY$ — параллелограмм. Докажите, что $AZ = CZ$.
(b) Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что существует точка, постоянно равноудаленная от велосипедистов.

source:geometry/moving-points-g9/r1.tex

Геометрический винегрет

1. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане CL. Докажите, что в треугольнике BKL также одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

2. Квадрат и прямоугольник одинакового периметра имеют общий угол. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника лежит на диагонали квадрата.

3. Дан треугольник ABC. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты точки C_1 и A_1 соответственно так, что $AC = A_1C = AC_1$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABA_1 и CBC_1 пересекаются на биссектрисе угла B.

4. Дан правильный треугольник ABC. Рассматриваются всевозможные прямые l, проходящие через вершину B и лежащие вне треугольника. Окружность α касается стороны AB, продолжения стороны AC за точку A и прямой l. Окружность β касается стороны BC, продолжения стороны AC за точку C и прямой l. Докажите, что сумма радиусов окружностей α и β не зависит от прямой l.

5. Из листа бумаги в клетку вырезали квадрат 2×2. Используя только линейку без делений и не выходя за пределы квадрата, разделите его диагональ на 6 равных частей.

6. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построили правильные треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. На отрезке A_1B_1 во внешнюю сторону треугольника $A_1B_1C_1$ построен правильный треугольник $A_1B_1C_2$. Докажите, что C — середина отрезка C_1C_2.

7. В остроугольном треугольнике один из углов равен 60°. Докажите, что прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан, отсекает от него равносторонний треугольник.

8. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом α при вершине A. Дуга BC с градусной мерой β построена вовсе треугольника. Нашлись два луча, проходящие через вершину B, которые делят сторону BC и дугу BC на три равные части. Найдите отношение α и β.

source:geometry/mixture-g9-2/r2.tex

Разнобой, применение полученных навыков

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть H_A, H_B, H_C, H_D — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что $H_AH_BH_CH_D$ — четырехугольник, равный $ABCD$.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть I_A, I_B, I_C, I_D — центры вписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что $I_AI_BI_CI_D$ — прямоугольник.

3. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности.
(a) Докажите, что точка I_a пересечения биссектрис внешних углов B и C треугольника ABC движется по дуге некоторой окружности.
(b) Укажите центр окружности, по которой движется точка I_a.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Опишите взаимное расположение 16-ти центров вписанных и вневписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC.

5. Дан треугольника ABC. Из точек A и C одновременно с равными скоростями стартуют две мухи в сторону точки B.
(a) Укажите точку, от которой они постоянно равноудалены.
(b) Докажите, что середина отрезка между мухами движется по прямой, параллельной биссектрисе угла B.

6. Даны два правильных семиугольника с общей вершиной. Вершины каждого семиугольника нумеруются цифрами от 1 до 7 по часовой стрелке, причем в общей вершине ставится 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Докажите, что полученные шесть прямых пересекаются в одной точке.

7. $ABCD$ — вписанный четырехугольник. M — точка пересечения его диагоналей. Некоторая прямая, проходящая через точку M, пересекает окружность, описанную около $ABCD$, в точках M_1 и M_2, и окружности, описанные, около треугольников ABM и CDM, в точках N_1 и N_2. Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$.

source:geometry/mixture-g9-1/r2.tex

Вписанные углы

1. На стороне AB (на прямой!) равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка D. Через точку D провели касательную к описанной окружности треугольника ADC. Она пересекла описанную окружность треугольника BDC в точке M. Докажите, что $BM \parallel AC$.

2. На прямых AB, BC и CA лежат точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Точка O такова, что точки O, A, B_1, C_1 лежат на одной окружности и точки O, B, A_1 и C_1 лежат на одной окружности. Докажите, что точки O, C, A_1 и B_1 также лежат на одной окружности.

3. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке B, S_2 в точке C. В точках C и B проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке D. Докажите, что угол BDC не зависит от выбора прямой, проходящей через A.

4. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и P. Через точку A проведена касательная AB к окружности S_1, а через точку P — прямая CD, параллельная AB (точки B и C лежат на S_2, точка D — на S_1). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

5. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Описанная окружность треугольника O_1BO_2 пересекает вторую окружность в точке P, отличной от B. Докажите, что точки O_1, A и P лежат на одной прямой.

6. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC лежит точка M такая, что четырехугольник $BCDM$ — вписанный. Докажите, что прямая BD — общая касательная к описанным окружностям треугольников ABM и ADM.

7. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A_1 и B_1, окружности ω_2 и ω_3 пересекаются в точках A_2 и B_2, окружности ω_3 и ω_4 пересекаются в точках A_3 и B_3, окружности ω_4 и ω_1 пересекаются в точках A_4 и B_4. Докажите, что если все A_i лежат на одной окружности, то все B_i тоже лежат на одной окружности.

8. В треугольнике ABC проведена высота AH. В треугольниках ACH и ABH проведены высоты HM и HN соответственно. Докажите, что треугольники MAN и BAC подобны.

9. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Прямые AC и BC вторично пересекают окружность, проходящую через точки A, O и B, в точках E и K. Докажите, что прямые OC и EK перпендикулярны.

10. Дан треугольник ABC. Из точки D на описанной окружности провели перпендикуляры на стороны треугольника DA_1, DB_1 и DC_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

11. **(a)** На плоскости проведены 4 прямые общего положения. Докажите, что описанные окружности четырех треугольников, образованных этими прямыми пересекаются в одной точке.

(b) На плоскости проведены 5 прямых общего положения. Для каждой четверки прямых отмечена точка пересечения четырех описанных окружностей треугольников. Докажите, что 5 получившихся точек лежат на одной окружности.

source:geometry/inscribed-angles-g9/r2-1.tex

Добавка

1. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Точку P на описанной окружности треугольника ABC отразили относительно сторон AB, BC, CA и получили точки P_C, P_A, P_B соответственно. Докажите, что P_A, P_B, P_C и H лежат на одной прямой.
2. В окружности α проведена хорда AB. Окружность β касается хорды AB в точке T и пересекает окружность α в точках X, Y. Пусть AX и TY пересекаются в M, а BY и TX в точке N. Докажите, что $MN \parallel AB$.
3. В треугольнике ABC угол при вершине B равен 60°. AA_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что точка, симметричная B относительно A_1C_1, лежит на прямой AC.

source:geometry/inscribed-angles-g9/r2-2.tex

Том Сойер и натуральный ряд (бесконечность)

1. Некоторые натуральные числа покрасили в зеленый цвет. Любой конечный набор зеленых чисел имеет общий делитель больший единицы. Докажите, что все зеленые числа делятся на некоторое число большее единицы.

2. Докажите, что в бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдется бесконечное количество чисел, которые больше своего номера в этой последовательности.

3. Натуральные числа покрасили в 100 цветов. Докажите, что найдется цвет X такой, что есть бесконечно много пар чисел цвета X на расстоянии меньше 200.

4. Натуральные числа покрасили в 100 цветов. Докажите, что найдется цвет X и число $m < 200$ такие, что есть бесконечно много пар чисел цвета X на расстоянии ровно m.

5. Натуральные числа покрашены в синий и зеленый цвета, причем чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что можно выбрать миллион синих и миллион зеленых чисел так, что сумма выбранных синих равна сумме выбранных зеленых.

6. Все натуральные числа покрасили в несколько цветов. Докажите, что найдется цвет такой, что для любого натурального n бесконечно много чисел этого цвета делится на n.

7. Натуральные числа покрашены в два цвета. Докажите, что найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины три.

8. Натуральные числа покрашены в несколько цветов. Докажите, что найдутся цвет X и число m такие, что для любого k найдется набор чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ цвета X, где $a_{i+1} - a_i < m$.

source:combinatorics/infinity-g9/r2-1.tex

Ещё бесконечность

1. Натуральные числа покрашены в несколько цветов. Докажите, что найдется цвет такой, что для любого n среди чисел этого цвета бесконечно много точных n-ых степеней.

2. Имеется бесконечная шахматная доска. Из нее выкинули все клетки, у которых обе координаты отрицательны или обе координаты больше тысячи. Можно ли обойти такую фигуру (побывав в каждой клетке ровно по одному разу)
(a) королем? **(b)** конем?
(c) ладьей? (Считается, что ладья «прыгает», то есть посещает только начальную и конечную клетки своего хода.)

3. В связном бесконечном графе все вершины имеют конечную степень. Докажите, что есть бесконечный несамопересекающийся путь.

4. В связном бесконечном графе все вершины имеют конечную степень. Докажите, что можно выкинуть часть ребер (возможно, бесконечно много) так, чтобы между любыми двумя вершинами шел ровно один путь по оставшимся ребрам.

5. В некотором государстве какие-то слова объявлены *плохими*. Известно, что для любого n найдется слово длины больше n, которое не содержит ни одного плохого подслова. Докажите, что найдется бесконечное слово, не содержащее плохого подслова.

source:combinatorics/infinity-g9/r2-2.tex

И вот ещё бесконечность

1. Каждая точка плоскости, имеющая целочисленные координаты, раскрашена в один из n цветов. Докажите, что найдется прямоугольник с вершинами в точках одного цвета.

2. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей. Докажите, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечно много богатырей и все они стояли по росту (не обязательно в порядке убывания роста).

3. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Докажите, что любое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.

source:combinatorics/infinity-g9/r2-3.tex

Сумма да тюрьмма (аддитивная комбинаторика)

1. Выбрали n чисел от 1 до 1000. Докажите, что не все попарные суммы различные (число можно складывать с самим собой), если
(a) $n = 64$; **(b)** $n = 46$.

2. Какое наибольшее количество различных чисел можно выбрать из множества $\{1, 2, \dots, 9\}$, чтобы все попарные суммы были различны?

3. Среди чисел от 1 до 1000 выбрали 455. Докажите, что среди выбранных найдутся два с суммой кратной 20.

4. Выбраны два множества натуральных чисел A и B, в множестве A содержится n элементов, в множестве B — m. Какое наименьшее количество элементов может содержать множество сумм вида $a_i + b_j$, где $a_i \in A$ и $b_j \in B$?

5. На доску выписано красным маркером 101 натуральное число от 1 до 10^6. Докажите, что можно выписать 100 синих чисел из того же промежутка таких, что все суммы (синее + красное) будут различны.

6. Среди чисел от 1 до 100 выбрали некоторые 16. Докажите, что среди этих шестнадцати найдутся различные a, b, c, d такие, что $a + b = c + d$.

7. Среди чисел от 1 до 501 выбрали 250. Докажите, что
(a) среди них найдутся различные a, b, c, d такие, что $a + b + c + d$ кратно 23;
(b) для любого x среди них найдутся различные a, b, c, d такие, что $a + b + c + d \equiv x \pmod{23}$.

source:combinatorics/additive-g9/r2-main.tex

Добавка про суммы

8. Даны $n + 1$ попарно различных натуральных числа, меньших $2n$ ($n > 1$). Докажите, что среди них найдутся три таких числа, что сумма двух из них равна третьему.

9. Даны n натуральных чисел с суммой $s < 2n$. Докажите, что для любого натурального $m \leqslant s$, можно выбрать несколько из этих чисел так, чтобы их сумма была равна m.

10. Даны 2000 целых чисел с суммой 1, причем каждое число по модулю не превосходит 1000. Докажите, что можно выбрать несколько из этих чисел так, чтобы сумма выбранных была равна нулю.

source:combinatorics/additive-g9/r2-more.tex

Глава 5

Питоны (9-1)

Классика ТЧ

Малая теорема Ферма. p — простое, а a на p не делится. Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Функция Эйлера. $\varphi(n)$ — это количество чисел, не превосходящих натурального n, взаимно простых с n.

Формула для функции Эйлера. $\varphi(n) = n \cdot \prod\limits_{\substack{p_i | n \\ p_i \in \mathbb{P}}} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Теорема Эйлера. Натуральные a и n взаимно просты. Тогда $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Теорема Вильсона. p — простое число. Тогда $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

1. Для натурального k докажите, что $(2^{3^k} + 1) \vdots 3^{k+1}$.
2. Для простого p докажите, что $(2^{2^p} - 4) \vdots (2^p - 1)$.
3. Для натурального n докажите, что $\sum\limits_{\substack{d|n \\ d \in \mathbb{N}}} \varphi(d) = n$.
4. Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.
5. Докажите, что для любого натурального n существует число с суммой цифр n, делящееся на n.
6. Найдите все натуральные n такие, что $(n! + 8) \vdots (2n + 1)$.
7. Докажите, что к десятичной записи числа 2^{2016} слева можно приписать несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.
8. Найдите наименьшее простое число p такое, что число $(2^{120!} - 1)$ делится на p, но не делится на p^2.
9. Натуральные a и b больше 1, но меньше 100. Докажите, что существует натуральное n такое, что число $a^{2^n} + b^{2^n}$ — составное.
10. Между двумя единицами пишется двойка, затем между любыми двумя соседними числами пишется их сумма, и т. д. Докажите, что каждое натуральное $n > 1$ в итоге будет выписано ровно $\varphi(n)$ раз.

source:algebra/number-theory/fermats-eulers-theorem-g9r1.tex

Вокруг вписанной и вневписанной окружностей

1. Докажите, что в любом треугольнике:
(a) $1/r = 1/r_a + 1/r_b + 1/r_c$; **(b)** $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$.

2. Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда:
(a) площадь треугольника равна произведению радиусов вписанной и одной из вневписанных окружностей;
(b) площадь треугольника равна произведению двух радиусов вневписанных окружностей.

3. На сторонах AB, BC, CD и DA единичного квадрата $ABCD$ отметили точки K, L, M и N соответственно так, что прямые KM и LN параллельны сторонам квадрата. Отрезок KL отсекает от квадрата треугольник периметра 1. Треугольник какой площади отсекает от квадрата отрезок MN?

4. Даны квадрат $ABCD$ и окружность с центром в вершине A, проходящая через вершины B и D. Точка K делит сторону BC в отношении $1 : 2$, считая от вершины B. В каком отношении делит сторону CD касательная к окружности, проведенная из точки K?

5. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 — точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1. Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC, содержит центр вневписанной окружности треугольника ABC.

6. $ABCD$ — параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой AC совпадают.

7. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N. Докажите, что точки пересечения отрезка MN со сторонами BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD.

8. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, касается катета BC и гипотенузы AB в точках P и Q соответственно. Вневписанная окружность, касающаяся катета BC, касается продолжения катета AC в точке T. Докажите, что точки P, Q и T лежат на одной прямой.

9. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке K, а продолжения стороны AB — в точке L. Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке X. Докажите, что CX — биссектриса угла ACN.

source:geometry/excircle.tex

Передвижение точек

1. Две мухи ползут по сторонам угла с одинаковой постоянной скоростью. В какие-то два момента они оказались на одинаковом расстоянии от некоторой точки A. Докажите, что **(a)** они все время от нее равноудалены; **(b)** эта точка лежит на биссектрисе угла.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что прямая, соединяющая их, все время проходит через точку B.

3. Точки A и B движутся с постоянными равными скоростями по двум пересекающимся прямым. Докажите, что можно указать две точки C и D такие, что в каждый момент времени точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

4. Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Точка C движется по одной окружности, а точка D — по другой. При этом прямые CD и AB перпендикулярны и точки A, B, C и D не являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что длина отрезка CD не меняется, и D — точка пересечения высот треугольника ABC.

5. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности.
(a) Докажите, что точка I пересечения биссектрис треугольника ABC тоже движется по дуге некоторой окружности.
(b) Укажите центр окружности, по которой движется точка I.

6. Велосипедисты едут по двум концентрическим окружностям с центром O с одинаковыми угловыми скоростями против часовой стрелки. В начальный момент их положения A_1 и B_1 таковы, что $OA_1 \perp A_1B_1$. Докажите, что если в какой-то момент они располагаются в точках A_2 и B_2, то A_1A_2 делит B_1B_2 пополам.

7. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности один по часовой стрелке, другой — против. Угловые скорости у них одинаковые. Четырехугольник AO_1CO_2 — параллелограмм. Докажите, что велосипедисты постоянно равноудалены от точки C.

8. **(a)** На прямой лежат три точки A, B, C. X и Y — точки на плоскости такие, что $AX = XB$ и $BY = YC$. $BXZY$ — параллелограмм. Докажите, что $AZ = CZ$.
(b) Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что существует точка, постоянно равноудаленная от велосипедистов.

source:geometry/moving-points-g9/r1.tex

Геометрические неравенства и экстремумы

1. **(a)** Каждая из высот параллелограмма не меньше той стороны, которой она перпендикулярна. Найдите угол между диагоналями параллелограмма.
(b) Определите вид треугольника, у которого каждая из двух высот не меньше стороны, к которой она проведена.

2. Сумма стороны и проведенной к ней высоты
(a) в параллелограмме **(b)** в треугольнике
одна и та же для всех сторон. Определите вид параллелограмма/треугольника.

3. На сторонах BC и AC равностороннего треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Докажите, что из отрезков AX, BY и XY можно составить треугольник.

4. **(a)** Остроугольный треугольник расположен внутри некоторой окружности. Докажите, что ее радиус не меньше радиуса окружности, описанной около треугольника.
(b) Верно ли аналогичное утверждение для прямоугольного или тупоугольного треугольников?

5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C', A' и B' соответственно так, что угол $A'C'B'$ — прямой. Докажите, что отрезок $A'B'$ длиннее диаметра вписанной окружности треугольника ABC.

6. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Точка A лежит на первой окружности, но не вне второй. Прямые AP и AQ пересекают вторую окружность в точках B и C. При каком положении точки A треугольник ABC имеет наибольшую площадь?

7. Докажите, что из всех треугольников с данным углом и данным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный.

8. На стороне BE равностороннего треугольника ABE вне его построен ромб $BCDE$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке F. Докажите, что $AF < BD$.

9. Известно, что в неравностороннем треугольнике ABC точка, симметричная точке пересечения медиан относительно стороны BC, принадлежит описанной окружности. Докажите, что $\angle BAC < 60°$.

source:geometry/inequality-and-extremum.tex

Разнобой, применение полученных навыков

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть H_A, H_B, H_C, H_D — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что $H_AH_BH_CH_D$ — четырехугольник, равный $ABCD$.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть I_A, I_B, I_C, I_D — центры вписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что $I_AI_BI_CI_D$ — прямоугольник.

3. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности.
(a) Докажите, что точка I_a пересечения биссектрис внешних углов B и C треугольника ABC движется по дуге некоторой окружности.
(b) Укажите центр окружности, по которой движется точка I_a.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Опишите взаимное расположение 16-ти центров вписанных и вневписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC.

5. Дан треугольник ABC. Из точек A и C одновременно с равными скоростями стартуют две мухи в сторону точки B.
(a) Укажите точку, от которой они постоянно равноудалены.
(b) Докажите, что середина отрезка между мухами движется по прямой, параллельной биссектрисе угла B.

6. Даны два правильных семиугольника с общей вершиной. Вершины каждого семиугольника нумеруются цифрами от 1 до 7 по часовой стрелке, причем в общей вершине ставится 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Докажите, что полученные шесть прямых пересекаются в одной точке.

7. $ABCD$ — вписанный четырехугольник. M — точка пересечения его диагоналей. Некоторая прямая, проходящая через точку M, пересекает окружность, описанную около $ABCD$, в точках M_1 и M_2, и окружности, описанные, около треугольников ABM и CDM, в точках N_1 и N_2. Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$.

`source:geometry/mixture-g9-1/r1.tex`

Геометрический винегрет

1. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане CL. Докажите, что в треугольнике BKL также одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

2. Квадрат и прямоугольник одинакового периметра имеют общий угол. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника лежит на диагонали квадрата.

3. Из листа бумаги в клетку вырезали квадрат 2×2. Используя только линейку без делений и не выходя за пределы квадрата, разделите его диагональ на 6 равных частей.

4. Дан треугольник ABC. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты точки C_1 и A_1 соответственно так, что $AC = A_1C = AC_1$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABA_1 и CBC_1 пересекаются на биссектрисе угла B.

5. В остроугольном треугольнике один из углов равен 60°. Докажите, что прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан, отсекает от него равносторонний треугольник.

6. Дан правильный треугольник ABC. Рассматриваются всевозможные прямые l, проходящие через вершину B и лежащие вне треугольника. Окружность α касается стороны AB, продолжения стороны AC за точку A и прямой l. Окружность β касается стороны BC, продолжения стороны AC за точку C и прямой l. Докажите, что сумма радиусов окружностей α и β не зависит от прямой l.

7. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построили правильные треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. На отрезке A_1B_1 во внешнюю сторону треугольника $A_1B_1C_1$ построен правильный треугольник $A_1B_1C_2$. Докажите, что C — середина отрезка C_1C_2.

8. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом α при вершине A. Дуга BC с градусной мерой β построена вовсе треугольника. Нашлись два луча, проходящие через вершину B, которые делят сторону BC и дугу BC на три равные части. Найдите отношение α и β.

source:geometry/mixture-g9-2/r1.tex

Площади

1. В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC через точку B провели прямую, параллельную стороне CD. Эта прямая пересекла диагональ AC в точке E. Докажите, что площади треугольников ABC и CED равны.

2. Дан тортик в форме буквы L. С помощью одной линейки проведите прямую, которая делит его площадь пополам.

3. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точки K и L — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезки DK и EL пересекаются в точке N. Докажите, что площадь четырехугольника $KBLN$ равна площади треугольника DEN.

4. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению длин наибольшей и наименьшей его диагоналей.

5. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Диагонали AD, BE и CF являются диаметрами этой окружности. Докажите, что площадь шестиугольника $ABCDEF$ равна удвоенной площади треугольника ACE.

6. Внутри выпуклого равноугольного многоугольника взяли произвольную точку и посчитали сумму расстояний до сторон. Докажите, что данная сумма не зависит от выбора точки внутри многоугольника.

7. На стороне треугольника во внешнюю сторону построена дуга. Рассмотрим фигуру, являющуюся объединением данного треугольника и образовавшегося сектора. Постройте с помощью циркуля и линейки прямую через середину дуги, которая делит площадь данной фигуры пополам.

8. В остроугольном треугольнике провели высоты AD и CE. Построили квадрат $ACPQ$ и прямоугольники $CDMN$ и $AEKL$, у которых $AL = AB$ и $CN = CB$. Докажите, что площадь квадрата $ACPQ$ равна сумме площадей прямоугольников $CDMN$ и $AEKL$.

9. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, у которого AB параллельно DE, BC параллельно EF, CD параллельно AF. Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.

10. Стороны выпуклого четырехугольника разделили на 8 равных частей. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены друг с другом, полученные клетки раскрашены в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных клеток равна сумме площадей белых клеток.

11. Дан выпуклый пятиугольник. Каждая диагональ отсекает от него треугольник. Докажите, что сумма площадей пяти данных треугольников больше площади данного пятиугольника.

source:geometry/area-g9/r1.tex

Веса

1. У каждого депутата парламента Табулистана не больше 20 друзей среди депутатов. Их случайно делят на Большую и Малую палаты. Хочется, чтобы у каждого депутата Большой палаты было не больше 15 друзей в палате, а у каждого депутата Малой — не больше пяти. Каждого депутата, нарушающего это правило, перемещают в другую палату. Докажите, что этот процесс однажды завершится.

2. Есть k тарелок, в общей сложности в них лежит $\frac{n(n+1)}{2}$ орехов. Каждым ходом мы достаем из каждой тарелки по ореху, заводим новую тарелку, и кладем орехи туда. Если после какого-то хода одна из тарелок опустела — выкидываем ее. Докажите, что после некоторого количества ходов у нас будет n тарелок, в которых будет 1, 2, ..., n орехов, соответственно.

3. В компании n человек, у некоторых есть по нескольку монет. Каждую минуту некоторый человек, имеющий не менее $(n-1)$ монет, может дать каждому из остальных по одной монете. Известно, что они могут действовать так, что эти жесты доброй воли будут повторяться бесконечно долго. Какое минимальное число монет могло быть в сумме?

4. В точке с координатами $(0, 0)$ лежит фишка. За один ход можно забрать фишку из точки (i, j) и положить по одной фишке в $(i+1, j)$ и в $(i, j+1)$. При этом, ни в какой точке не должно быть более одной фишки. Докажите, что в любой момент времени хотя бы в одной клетке с суммой координат не более трех будет фишка.

5. В ряд лежат n спичек, все фосфором вверх. За ход можно взять спичку, лежащую фосфором вверх, не лежащую с краю, убрать её, а две соседние перевернуть. Докажите, что оставить две спички можно тогда и только тогда, когда $(n-1)$ не делится на 3.

source:combinatorics/monovariant-weights.tex

Фома Аквинский и немного аддитивной комбинаторики

1. Какое наибольшее количество различных чисел можно выбрать из множества $\{1, 2, \dots, 9\}$, чтобы все попарные суммы были различны?

2. Выбраны два множества натуральных чисел A и B, причем $|A| = n$, $|B| = m$. Какое наименьшее количество элементов может содержать множество сумм вида $a_i + b_j$, где $a_i \in A$ и $b_j \in B$?

3. Натуральные числа от 1 до 100 покрашены в семь цветов. Докажите, что найдется цвет, для которого среди попарных сумм (число с самим собой можно складывать) найдутся две равных.

4. Среди чисел от 1 до 100 выбрали некоторые 16. Докажите, что среди этих шестнадцати найдутся различные a, b, c, d такие, что $a + b = c + d$.

5. Докажите, что для любого n есть такое множество натуральных чисел, что все попарные суммы (можно складывать число с самим собой) различные, и среди этих попарных сумм есть n последовательных натуральных чисел.

6. В таблице $n \times n$ расставлены числа 0, 1 и -1. Оказалось, что все суммы по строкам и по столбцам — это $2n$ различных чисел.
(a) Приведите пример такой таблицы для любого четного n.
(b) Докажите, что n четно.

7. Среди чисел от 1 до 501 выбрали 250. Докажите, что
(a) среди них найдутся различные a, b, c, d такие, что $a + b + c + d$ кратно 23;
(b) для любого x среди них найдутся различные a, b, c, d такие, что $a + b + c + d \equiv x \pmod{23}$.

8. Пусть есть набор из n натуральных чисел. Докажите, что множество попарных сумм (можно складывать число с самим собой) содержит от $(2n - 1)$ до C_{n+1}^2 элементов, причем все эти возможности реализуются.

`source:combinatorics/additive-g9/r1-main.tex`

Ещё аддитивные задачи

1. Среди чисел от 1 до 1000 выбрали 455. Докажите, что среди выбранных найдутся два с суммой кратной 20.

2. Даны различные натуральные числа $a_1, \dots, a_{14}$. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_l$, где $1 \leqslant k, l \leqslant 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02, ..., 99)?

3. Даны n натуральных чисел с суммой $s < 2n$. Докажите, что для любого натурального $m \leqslant s$, можно выбрать несколько из этих чисел так, чтобы их сумма была равна m.

4. Даны 2000 целых чисел с суммой 1, причем каждое число по модулю не превосходит 1000. Докажите, что можно выбрать несколько из этих чисел так, чтобы сумма выбранных была равна нулю.

5. На доску выписано красным маркером 101 натуральное число от 1 до 10^6. Докажите, что можно выписать 100 синих чисел из того же промежутка таких, что все суммы (синее + красное) будут различны.

source:combinatorics/additive-g9/r1-more.tex

Бесконечность

1. Натуральные числа покрасили в 100 цветов. Докажите, что найдется цвет X такой, что есть бесконечно много пар чисел цвета X на расстоянии меньше 200.

2. Натуральные числа покрашены в синий и зеленый цвета, причем чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что можно выбрать миллион синих и миллион зеленых чисел так, что сумма выбранных синих равна сумме выбранных зеленых.

3. Имеется бесконечная шахматная доска. Из нее выкинули все клетки, у которых обе координаты отрицательны или обе координаты больше тысячи. Можно ли обойти такую фигуру (побывав в каждой клетке ровно по одному разу)
(a) королем? **(b)** конем?

4. Все натуральные числа покрасили в несколько цветов. Докажите, что найдется цвет такой, что для любого натурального n бесконечно много чисел этого цвета делится на n.

5. В некотором государстве какие-то слова объявлены *плохими*. Известно, что для любого n найдется слово длины больше n, которое не содержит ни одного плохого подслова. Докажите, что найдется бесконечное слово, не содержащее плохого подслова.

6. Каждая точка плоскости, имеющая целочисленные координаты, раскрашена в один из n цветов. Докажите, что найдется прямоугольник с вершинами в точках одного цвета.

7. Натуральные числа покрашены в несколько цветов. Докажите, что найдутся цвет X и число m такие, что для любого k найдется набор чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ цвета X, где $a_{i+1} - a_i < m$.

source:combinatorics/infinity-g9/r1-1.tex

Добавка

8. Каждая точка плоскости, имеющая целочисленные координаты, раскрашена в один из n цветов. Докажите, что для любого N найдется цвет X такой, что найдется точка цвета X, с которой на одной горизонтали бесконечно много точек цвета X, а на одной вертикали не меньше N точек цвета X.

9. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей. Докажите, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечно много богатырей и все они стояли по росту (не обязательно в порядке убывания роста).

10. Имеется возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$, где для всякого k выполнено $a_{k+1} - a_k < 10^6$. Докажите, что найдутся различные i и j такие, что a_i делится на a_j.

source:combinatorics/infinity-g9/r1-2.tex