$$\int\limits_{\text{10 ноября 2014}}^{\text{21 ноября 2014}} \left(\begin{array}{c} \text{Московские сборы} \\ \text{секция математики} \end{array} \right) \mathrm{d}t$$

Немного о группах

Немного о структуре

Материалы разбиты по группам, в пределах каждой группы отсортированы по темам:

- *тренировочные олимпиады;*
- алгебра;
  - теория чисел;
  - многочлены;
  - неравенства;
- геометрия;
- комбинаторика;
  - теория графов.

Материалы, общие для нескольких групп, дублируются. Все материалы сопровождаются ссылками на исходные файлы LaTeX.

source:integral.tex

Оглавление

Глава 1

Лемминги (9-2)

Олимпиада 9 классов

1. Дан приведённый квадратный трехчлен $P(x)$. Известно, что он имеет общий корень с многочленом $P(P(P(x)))$. Докажите, что $P(0) \cdot P(1) = 0$.

2. В клетчатом квадрате 101×101 каждая клетка внутреннего квадрата 99×99 покрашена в один из десяти цветов (клетки, примыкающие к границе квадрата, не покрашены). Может ли оказаться, что в каждом квадрате 3×3 в цвет центральной клетки покрашена еще ровно одна клетка?

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Прямая, перпендикулярная стороне AC и проходящая через точку A_1, пересекает прямую B_1C_1 в точке D. Докажите, что угол ADC прямой.

4. В компании из семи человек любые шесть могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

5. Неограниченная последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет следующему условию. Существуют натуральное число k и такие ненулевые целые числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$, что для любого натурального n выполнено равенство $b_1a_{n+1} + b_2a_{n+2} + \ldots + b_ka_{n+k} = 0$. Докажите, что в последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ встретится хотя бы одно составное число.

source:olympiad/g9.tex

Квадратичные вычеты

1. Пусть p — нечетное простое число. Докажите, что

(a) если a — квадратичный вычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$;

(b) если a — квадратичный невычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$.

Определение. Пусть p — простое число. *Символом Лежандра* называется выражение, обозначаемое $\left(\frac{a}{p}\right)$, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p, -1, если a — невычет по модулю p, и 0, если a кратно p.

Из задачи 1 следует, что если p нечетно, то

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p\,.$$

2. Докажите, что если p — нечетное простое число, то по модулю p существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и столько же невычетов.

3. Докажите, что для данного простого модуля p

(a) произведение двух квадратичных вычетов — вычет;

(b) произведение вычета на невычет — невычет;

(c) произведение двух невычетов — вычет.

4. При каких p вычет -1 является квадратичным вычетом по модулю p (где p — нечетное простое число)?

5. Пусть $x^2 + y^2$ делится на простое число $p = 4k + 3$. Докажите тогда, что x и y делятся на p.

6. **(a)** Найдите сумму всех квадратичных вычетов по простому модулю p.

(b) Известно, что x не делится на простое p. Найдите сумму

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k(k+x)}{p}\right).$$

7. Докажите, что многочлен $x^4 + 1$ неприводим как многочлен над $\mathbb{Z}$, но приводим как многочлен над полем $\mathbb{F}_p$ для любого простого числа p.

8. Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$

(a) не имеет решений в натуральных числах;

(b) имеет бесконечно много решений в целых числах.

source:algebra/number-theory/quadratic-residue-g9.tex

Многочлены с целыми коэффициентами

1. Известно, что $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что $f(n)$ кратно трем для любого целого n.

2. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(7) = 11$, а $P(11) = 13$. Докажите, что хотя бы один из его коэффициентов — не целое число.

3. Пусть f — многочлен с целыми коэффиентами. Докажите, что $f(a)-f(b)$ делится на $a-b$, где a и b — различные целые числа.

4. Все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа. Известно, что $P(1) = 1$ и что $P(n) = 0$ при некотором натуральном n. Найдите n.

5. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Если в него вместо неизвестного подставить 2 или 3, то получаются числа, кратные 6. Докажите, что если вместо неизвестного в него подставить 5, то также получится число, кратное 6.

6. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если уравнение $P(x) = 1$ имеет больше трех целочисленных корней, то уравнение $P(x) = -1$ не имеет целочисленных корней.

7. Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами принимает значение 5 при пяти различных целых значениях x. Может ли $f(x)$ иметь целые корни? Может ли $f(n)$ равняться -6 при целом n?

8. Многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения ± 1. Докажите, что этот многочлен нельзя разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

9. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что число $P(k)$ делится на $Q(k)$ при любом целом k. Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$.

10. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — различные целые числа. Докажите, что многочлен

$$(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) - 1$$

нельзя разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

source:algebra/polynomial/integer-g9.tex

Алгебраический разнобой

1. Все коэффициенты квадратного трехчлена — целые нечетные числа. Может ли он иметь целые корни?

2. Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что $|a + b + 1|$ — составное число.

3. Докажите, что многочлен $x^p + x^{p-1} + \ldots + x + p = 0$, где p — простое число, не имеет рациональных корней.

4. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи, и $P(19) = P(94) = 1994$.

5. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

6. Докажите, что

$$x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)(x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(p-1)) \mod p\,.$$

7. Уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет n различных целых корней. Докажите, что если любые два корня взаимно просты, то и числа a_{n-1} и a_n взаимно просты.

8. Существуют ли такие приведенные квадратные трехчлены f и g, что для любого целого n число $f(n) \cdot g(n)$ — целое, а числа $f(n)$, $g(n)$ и $f(n) + g(n)$ — нецелые?

9. Назовем многочлен *средиземноморским*, если он имеет только действительные корни и имеет вид

$$P(x) = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$

Коэффициенты $a_0, \ldots, a_7$ — действительные числа. Найдите наибольшее действительное число, которое может быть корнем средиземноморского многочлена.

source:algebra/polynomial/mixture-g9.tex

Многочлены. Домашнее задание

1. Бесконечная последовательность $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$ определена как

$$P_0(x) = x\,, \qquad P_n(x) = P_{n-1}(x-1)\cdot P_{n-1}(x+1)\,, \quad n \geqslant 1\,.$$

Найдите наибольшее k такое, что $P_{2014}(x)$ делится на x^k.

2. Пусть $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ при $x \in [-1; 1]$. Найдите максимум выражения $a^2 + b^2 + c^2$.

3. Докажите, что при любых отличных от нуля числах a, b, c хотя бы одно из квадратных уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет корень.

4. Даны корни x_0 и x_1, x_0 и x_2, ..., x_0 и x_n соответственно квадратных трехчленов $y = x^2 + a_1x + b_1$, $y = x^2 + a_2x + b_2$, ..., $y = x^2 + a_nx + b_n$. Найдите корни квадратного трехчлена

$$y = x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\ .$$

5. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен с действительными коэффиентами такой, что $P(x^3 + x) \geqslant P(x^2 + 1)$ для всех действительных x. Найдите сумму корней $P(x)$.

6. Даны два квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$. Известно, что каждое из выражений $3f(x) + g(x)$ и $f(x) - g(x)$ — квадратные трехчлены, имеющие ровно один корень. Известно также, что $f(x)$ имеет два корня. Докажите, что трехчлен $g(x)$ не имеет корней.

7. Пусть $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x)$ — кубический многочлен, корни которого являются квадратами корней многочлена $f(x)$. Найдите $g(x)$.

8. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Докажите, что $f(f(x)) = x$ не может иметь ровно три действительных корня.

source:algebra/polynomial/mixture-g9-more.tex

Разные задачи про квадратные уравнения

1. Рассматриваются квадратичные функции вида $y = x^2+px+q$, у которых $p+q/2 = 2001$. Докажите, что их графики проходят через одну точку.

2. Пусть a и b — положительные числа. Сумма минимального значения квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + 8x + b$ и минимального значения квадратного трехчлена $g(x) = bx^2 + 8x + a$ равна нулю. Докажите, что эти минимальные значения оба равны нулю.

3. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают отрицательные значения на непересекающихся интервалах. Докажите, что найдутся такие положительные числа α и β, что для любого действительного x будет выполняться неравенство $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) > 0$.

4. Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют ровно одну общую точку.

5. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешется заменить на один из трехчленов

$$x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}+1\right) \quad \text{или} \quad (x-1)^2 \cdot f\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Можно ли с помощью таких операций из трехчлена $x^2 + 4x + 3$ получить трехчлен $x^2 + 10x + 9$?

6. Различные числа a, b, c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите $a + b + c$.

7. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2+ax+b$. Известно, что для любого вещественного x существует вещественное y такое, что $f(y) = f(x)+y$. Найдите наибольшее возможное значение a.

8. Квадратный трехчлен $p(x)$ таков, что $|p(x)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Докажите, что $p(-1/2) \leqslant 7$.

source:algebra/polynomial/quadratic-g9.tex

Теорема Безу. Вокруг да около

1. Найдите остаток от деления многочлена $x^5 - 17x + 1$ на $x + 2$.

2. Найдите остатки от деления многочлена $x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + 1$ на $(x - 1)$ и $(x^2 - 1)$.

3. Многочлен $P(x)$ при делении на $(x - 1)$ дает остаток 2, а при делении на $(x - 2)$ дает остаток 1. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на $(x - 1)(x - 2)$?

4. Многочлен $P(x)$ при делении на $x^2 - 4$ дает остаток $x + 1$, а на $x^2 - 1$ — остаток $x + 2$. Найдите остаток при делении $P(x)$ на $(x^2 - 4)(x^2 - 1)$.

5. Докажите, что если значения двух многочленов, степени которых не превосходят n, совпадают в $n + 1$ различных точках, то эти многочлены равны.

6. Дан многочлен $P(x)$ такой, что многочлен $P(x^n)$ делится на $(x - 1)$. Докажите, что многочлен $P(x)$ также делится на $(x - 1)$.

7. Известно, что многочлен $x^n + x + 1$ делится на $x^2 + x + 1$. Докажите, что n есть число вида $3k + 2$.

8. Многочлен $P(x^3) + Q(x^3)$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$. Докажите, что многочлен $P(x) + Q(x)$ делится на многочлен $x - 1$.

9. При каких n многочлен $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2}$ делится на $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$?

source:algebra/polynomial/remainder-theorem-g9.tex

Теорема Виета

1. Дано уравнение $x^2+px+q=0$. Составьте с помощью коэффициентов p и q квадратное уравнение, корнями которого были бы $y_1=x_1^2+x_2^2$, $y_2=x_1^3+x_2^3$.

2. При каких значениях параметра a множеством решений неравенства $x^2+ax-1<0$ будет интервал длины 5?

3. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $4x^2-28x+a=0$ равна 22.5?

4. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+x\sqrt{a^2-4a}-a-2=0$ принимает наименьшее значение?

5. При каких a разность корней уравнения $2x^2-(a+1)x+(a-1)=0$ равна их произведению?

6. Квадратное уравнение $x^2-6px+q=0$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Числа p, x_1, x_2, q — четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите x_1 и x_2.

7. Определите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения $x^3+(a^2-9a)x^2+8ax-64=0$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

8. При каких значениях a четыре корня уравнения $x^4+(a-5)x^2+(a+2)^2=0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

9. Известно, что α — корень уравнения $ax^2+bx+b=0$, β — корень уравнения $ax^2+ax+b=0$, а также, что $\alpha\beta=1$. Найдите α и β.

10. Известно, что каждое из уравнений $x^2+ax+b=0$ и $x^2+bx+a=0$ имеет два различных корня, и эти четыре корня в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите a и b.

source:algebra/polynomial/vietas-formulas-g9.tex

Разнобой по геометрии

1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике высота, проведённая из прямого угла, равна сумме радиуса вписанной в треугольник окружности и радиусов вписанных окружностей треугольников, на которые эта высота делит исходный треугольник.

2. Два квадрата $ABCD$ и $AKLM$ имеют общую вершину и одинаково ориентированы. Докажите, что $BK \perp DM$.

3. **(a)** Постройте общую касательную к двум окружностям.
(b) Дана окружность и точка P. Постройте в окружности хорду AB заданной длины и с заданной длиной перпендикуляра на неё из точки P.

4. Обозначим центр вписанной окружности треугольника ABC через I, а через L — середину дуги AB его описанной окружности. Из L опустили перпендикуляр на прямую AI, который пересек сторону AC в точке K. Докажите, что $KI \parallel AB$.

5. Две окружности пересекаются в точках E и F. Прямая l пересекает первую окружность в точках A и B, вторую — в точках C и D так, что точка E лежит внутри треугольника ADF, а точки B и C — на отрезке AD. Оказалось, что $AB = CD$. Докажите, что $BE \cdot DF = CE \cdot AF$.

6. В окружность вписан пятиугольник $ABCDE$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке K. Отрезок CE касается описанной окружности треугольника ABK в точке N. Найдите $\angle CNK$, если известно, что $\angle ECD = 40^\circ$.

7. Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OM и ON на стороны AB и BC, а затем построили параллелограмм $MONK$. Докажите, что точки B, K и ортоцентр H треугольника ABC лежат на одной прямой.

source:geometry/mixture-g9r2.tex

Радикальная ось и степень точки

1. **(a)** Докажите, что если центры трех окружностей не лежат на одной прямой, то существует единственная точка плоскости, имеющая одинаковую степень точки относительно всех трёх окружностей. Эта точка называется **радикальным центром** этих трёх окружностей.
(b) Проведено три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что их общие хорды (или прямые, их содержащие) пересекаются в одной точке.

2. **(a)** Докажите, что середины четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам коллинеарны.
(b) Через две из точек касания общих внешних касательных с двумя окружностями проведена прямая. Докажите, что окружности высекают на этой прямой равные хорды.

3. Точки A_1 и A_2 лежат на стороне BC, B_1 и B_2 — на стороне AC, C_1 и C_2 — на стороне AB. Известно, что точки A_1, A_2, B_1, B_2 лежат на одной окружности; B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности; C_1, C_2, A_1, A_2 лежат на одной окружности. Докажите, что все шесть точек лежат на одной окружности.

4. На сторонах AC, AB треугольника ABC отмечены точки B_1, C_1 соответственно. На отрезках BB_1, CC_1 как на диаметрах построили окружности. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей, содержит ортоцентр треугольника.

5. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Перпендикуляр, восстановленный в точке I к отрезку AI, пересекает прямую BC в точке P. Точка Q — основание перпендикуляра, опущенного из I на AP. Докажите, что Q лежит на описанной окружности треугольника ABC.

6. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

7. Постройте окружность, проходящую через две заданные точки и касающуюся данной прямой.

8. Точка M — середина хорды AB. Хорда CD пересекает AB в точке M. На отрезке CD как на диаметре построена полуокружность. Точка E лежит на этой полуокружности, и ME — перпендикуляр к CD. Найдите угол $\angle AEB$.

9. В обозначениях предыдущей задачи добавим точку P пересечения касательных, проведённых к окружности в точках A и B. Докажите, что $\angle CPM = \angle DPM$.

source:geometry/radical-axis-g9r2/main.tex

Радикальные оси — 2

1. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω, и точка B ($B \neq A$). Рассматриваются всевозможные треугольники BXY такие, что точки X и Y лежат на ω и хорда XY проходит через точку A. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY, лежат на одной прямой.

2. Вписанная окружность γ треугольника ABC касается его стороны BC в точке D. Обозначим центр вневписанной в угол A окружности через I, а середину отрезка DI через M. Докажите, что отрезок касательной, проведённой из точки M к γ равен MB.

3. Пусть AD — биссектриса угла A треугольника ABC. Окружность ω касается стороны BC в точке D и проходит через точку A. Обозначим точку пересечения ω с AB, отличную от A, через P. Прямая PC вторично пересекает ω в точке Q. Докажите, что AQ делит отрезок DC пополам.

4. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со сторонами BC, CA, AB соответственно. Точка P — произвольная. Серединный перпендикуляр к отрезку PA_1 пересекает прямую BC в точке A_2. Точки B_2, C_2 определяются аналогично. Докажите, что A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

source:geometry/radical-axis-g9r2/more.tex

Поворот

1. **(a)** По лучам, имеющим общее начало, с постоянными равными скоростями двигаются точки A и B. Докажите, что есть две точки плоскости, из-под которых отрезок AB виден под постоянным углом. **(b)** По двум равным окружностям с равными угловыми скоростями двигаются точки A и B. Докажите, что существует точка P плоскости такая, что $\angle APB = \mathrm{const}$.

2. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; точки M и P — середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

4. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P, из A_2 — на A_3P, из A_3 — на A_4P, из A_4 — на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра пересекаются в одной точке.

5. На двух противоположных сторонах выпуклого четырехугольника как на гипотенузах построены во внутреннюю сторону два равнобедренных прямоугольных треугольника. Оказалось, что они имеют общую вершину. Докажите, что аналогичные треугольники, построенные на двух других сторонах тоже будут иметь общую вершину.

6. У треугольника ABC все углы меньше $120°$. Выбирается такая точка T, что сумма $TA + TB + TC$ минимальна (*точка Торричелли*). Докажите, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$.

7. Дан треугольника ABC. На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

8. Шестиугольник $ABCDEF$ правильный, K и M — середины отрезков BD и EF. Докажите, что треугольник AKM правильный.

9. На сторонах AB, BC и CA, треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный $\triangle ABC$.

10. Два квадрата $BCDA$ и $BKNM$ имеют общую вершину B. Докажите, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBM лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

11. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D (A лежит на отрезке CD). Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина CD. Докажите, что точки M, K, A, N лежат на одной окружности.

Ориентированные углы

Определение. Ориентированным углом между прямыми l и m называется такой угол, на который нужно против часовой стрелки повернуть прямую l, чтобы она стала параллельна прямой m. Обозначается ориентированный угол через $\angle(l, m)$. Углы, отличающиеся на кратное 180 число градусов, считаются равными.

Упражнения.

(a) $\angle(l,m) = -\angle(m,l)$. **(b)** $\angle(l,m) + \angle(m,k) = \angle(l,k)$.

(c) $\angle(AC, CB) = \angle(AD, DB)$ $\Leftrightarrow$ точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

(d) $\angle(l,m) = \angle(l,k)$ $\Leftrightarrow$ $m \parallel k$.

1. **(a)** Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через P проходит прямая AB, причем A лежит на первой окружности, а B — на второй. Через Q проходит прямая CD, причем C лежит на первой окружности, а D — на второй. Докажите, что $AC \parallel BD$.
   (b) Дан вписанный шестиугольник $ABCDEF$. Пусть прямые AB и DE пересекаются в точке Q, прямые BC и EF — в точке P, а CD с FA — в точке R. Проведем описанную окружность треугольника PCF и продлим прямые CD и FA до вторичного пересечения с этой окружностью в точках U и V соответственно. Докажите, что соответственные стороны треугольников AQD и VPU параллельны.
   (c) *(теорема Паскаля)* Выведите из этого, что точки P, Q и R лежат на одной прямой.

2. Даны окружности S_1, S_2 и S_3, проходящие через точку X. Вторая точка пересечения окружностей S_1 и S_2 — точка P, S_2 и S_3 — точка Q, S_3 и S_1 — точка R. На окружности S_1 выбрана произвольная точка A. Вторая точка пересечения прямой AP с S_2 — точка B, прямой AR с S_3 — точка C. Докажите, что B, C и Q лежат на одной прямой.

3. На окружности даны точки A, B, C, D. M —середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что точки K, E, C и D лежат на одной окружности.

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая пересекает его стороны AB, BC, CD и AD в различных точках E, F, G, H соответственно. Описанные окружности треугольников AEF и AGH пересекаются вторично в точке P, а описанные окружности треугольников CEF и CGH пересекаются вторично в точке Q. Докажите, что прямая PQ делит отрезок BD пополам.

5. Даны 4 прямые общего положения. Всеми возможными способами выкидывается одна из них, и берется описанная окружность оставшегося треугольника. Докажите, что четыре таких окружности проходят через одну точку. Эта точка называется *точкой Микеля* для этой четверки прямых (или для четырехугольника, образованного этими прямыми).

6. В треугольнике ABC вписанная окружность с центром I касается его сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Прямая AI пересекает прямую A_1C_1 в точке K.

(a) Докажите, что угол CKA прямой.

(b) Докажите, что точка K лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AB.

(c) Окружность с центром O вписана в четырехугольник $ABCD$ и касается его непараллельных друг другу сторон BC и AD в точках E и F соответственно. Пусть прямая AO и отрезок EF пересекаются в точке K, прямая DO и отрезок EF — в точке N, а прямые BK и CN — в точке M. Докажите, что точки O, K, M и N лежат на одной окружности.

7. Окружности ω и γ касаются друг друга внутренним образом в точке A, причем γ находится внутри ω. Хорда BC окружности ω касается γ в точке P. Прямые AB и AC вторично пересекают γ в точках B' и C' соответственно.

(a) Докажите, что прямые $B'C'$ и BC параллельны. (подсказка: воспользуйтесь тем, что у обеих окружностей в точке A общая касательная)

(b) *Лемма Архимеда.* Докажите, что прямая AP проходит через середину дуги BC окружности ω, не содержащей точку A.

8. Точки O_1 и O_2 — центры соответственно описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Окружности, описанные около треугольников ABC и O_1O_2A, пересекаются в точках A и D. Докажите, что прямая BD касается окружности, описанной около треугольника O_1O_2A.

9. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Из точки B_1 восстанавливается перпендикуляр к стороне BC и продлевается до пересечения с дугой BC описанной окружности в точке K. Перпендикуляр из B на AK пересекает AC в точке L. Докажите, что L, K и середина дуги AC лежат на одной прямой.

10. Дан треугольник ABC и внутри него точка P, отличная от точки пересечения высот.

(a) Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников ABP, BCP, CAP, ABC, проходят через одну точку.

(b) Докажите, что описанная окружность педального треугольника точки P (треугольника, образованного проекциями точки на стороны исходного треугольника) также проходит через эту точку.

source:geometry/signed-angles-g9.tex

Компоненты связности

1. В графе 100 вершин, степень каждой вершины равна k. При каком наибольшем k этот граф может быть несвязным?

2. Какое максимальное количество ребер может быть в несвязном графе на 100 вершинах?

3. В стране 100 городов, среди которых столица, из которой выходит 33 дороги, и город Удельный, из которого выходит одна дорога. Из всех остальных городов выходит ровно по двадцать дорог. Обязательно ли из столицы можно добраться до Удельного?

4. Куб состоит из n^3 единичных кубических ячеек. Какое наименьшее количество перегородок между кубиками нужно удалить для того, чтобы из любой ячейки можно было добраться до поверхности куба? Выходить за поверхность куба не надо, то есть для $n = 1$ и $n = 2$ ответ 0.

5. Докажите, что связных графов на 100 вершинах больше, чем несвязных.

6. Турист, приехавший в Москву на поезде, весь день бродил по городу. Поужинав в кафе на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал, и при этом идти только по улицам, по которым он шел до этого нечетное число раз. Докажите, что он всегда сможет это сделать.

source:combinatorics/graph/connected-components-g9/r2.tex

Деревья

Все графы далее предполагаются без петель и кратных ребер.

1. Рыболовная сеть имеет форму квадрата 10×10. Какое наибольшее количество веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась?

2. Двое играют в следующую игру: изначально есть полный граф на 55 вершинах, игроки по очереди удаляют по одному ребру. Проигрывает тот, кто получает несвязный граф. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Может ли в графе быть ровно два остовных дерева?

Определение. *Точка сочленения* — вершина, при удалении которой вместе со всеми исходящими ребрами граф теряет связность.

4. В связном графе есть хотя бы две вершины. Докажите, что в нем есть хотя бы две вершины, не являющиеся точками сочленения.

5. В связном графе n вершин, степень каждой вершины равна 3. Раскраска ребер графа в 3 цвета называется *правильной*, если из любой вершины выходят ребра трех разных цветов. Докажите, что правильных раскрасок не больше, чем $3 \cdot 2^n$.

Ещё деревья

6. В дереве 101 вершина. Докажите, что можно удалить одну из них вместе со всеми выходящими ребрами так, чтобы в каждой из оставшихся компонент связности было меньше 50 вершин.

7. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями. Каждая авиалиния принадлежит одной из трех авиакомпаний, при этом при закрытии любой из трех авиакомпаний из любого города в любой можно будет добраться двумя оставшимися компаниями. Какое может быть наименьшее количество авиалиний в стране?

8. В дереве три вершины покрашены в красный так, что для любой вершины x все три красные вершины находятся на расстоянии не более, чем 10. Докажите, что существует такая вершина A, что все вершины дерева находятся от нее на расстоянии не превосходящем 9.

source:combinatorics/graph/tree-g9/r2.tex

Комбинаторика

Прыгая на 1 метр, невозможно перепрыгнуть яму шириной 2 метра…

1. Журнал «Юный диверсант» выходит нерегулярно — два или три раза в год. На обложке стоит номер журнала и год выпуска: №1 — 2001, №2 — 2001, №3 — 2002, … Докажите, что если редакцию не поймают, то рано или поздно выйдет номер, где два числа на обложке совпадут.

2. Существует ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых?

3. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

4. На плоскости отмечено 2014 точек. Обязательно ли существует круг, внутри которого ровно 100 из них?

5. **(a)** В комнате $2n$ юношей и $2n$ девушек. Всегда ли можно провести прямую черту по полу так, чтобы по каждую стороную от черты было n юношей и n девушек?
(b) Та же задача, только никакие три человека не стоят на одной прямой.

6. На плоскости отмечено 2016 точек общего положения. Обязательно ли их можно разбить на семерки так, чтобы семиугольники, вершинами которых служили бы точки из одной семерки, не имели общих точек?

`source:combinatorics/discrete-continuity-g9r2.tex`

Если из любого состояния есть выход, а состояний конечное число, то повтора не избежать…

7. На плоскости отмечено n красных и n синих точек общего положения. Докажите, что можно провести n непересекающихся отрезков, каждый из которых соединяет красную точку с синей.

8. Вдоль бесконечного в обе стороны коридора, расположены комнаты, занумерованные целыми числами. В этих комнатах живут пианисты (их конечное число). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (n и $n + 1$) решают, что мешают друг другу и разъезжаются, то есть переселяются в комнаты $n - 1$ и $n + 2$. (При этом несколько пианистов могут жить в одной комнате.)
(a) Докажите, что пианисты не смогут расселяться неограниченно далеко.
(b) Докажите, что когда-нибудь переселения прекратятся.

9. Барон Мюнхгаузен рассказывает историю про одну очень увлекательную игру. Он не помнит правил, но точно помнит, что в неё играют два игрока. Кроме того, он помнит, что в каждой игровой ситуации у игроков одни и те же доступные варианты ходов, каждый из которых меняет текущее состояние на какое-то другое, а всего состояний конечное число. А проигрывает тот, кто не может сделать ход. Барон уверен, что эта игра точно закончится через конечное число ходов, как бы ни действовали игроки. Из всего этого Мюнхгаузен делает вывод, что у одного из игроков есть выигрышная стратегия. Прав ли он?

source:combinatorics/semi-invariant-g9r2/main.tex

Игры

1. Есть клетчатый прямоугольник $m \times n$. Двое по очереди закрашивают любую строку или любой столбец в нем. Закрашивать строку, где все клетки уже закрашены, нельзя. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто выигрывает при правильной игре?

2. На плоскости отмечены n точек, никакие три не лежат на одной прямой. Двое соединяют стрелочками эти точки. Стрелочку можно проводить из конца предыдущей стрелочки в любую отмеченную точку, с которой стрелочки еще не было (ни в этом направлении, ни в обратном). Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто?

3. На доске $n \times n$ двое по очереди ходят фишкой. Сначала она стояла в углу, ходить можно на соседнюю по стороне клетку, на которой фишка еще не была. Докажите, что при четном n выигрывает первый, а при нечетном — второй игрок.

4. Есть куб. Первый красит три его ребра в красный цвет, потом второй красит еще три ребра в синий цвет, потом первый красит три ребра в красный, потом второй — оставшиеся в синий. Каждое ребро красить можно только один раз. Выигрывает тот, кому удалось покрасить в свой цвет ребра одной грани. Кто выигрывает?

5. Есть 17 куч из монет, в первой одна, во второй две и т. д. Играют двое. Ход такой: человек, у которого монет больше (если поровну, то ходивший в прошлый раз) выбирает еще не выбранную кучу (в первый раз ходящий избирается жребием). Его соперник решает, кому она достанется из них двоих. Далее следующий ход. Выигрывает тот, у кого в конце больше монет. Кто?

6. На доске написано число 2. Ход состоит в увеличении числа хотя бы на один, но не более, чем в два раза, и записывании его на доску вместо старого. Выигрывает тот, кто получил число 2014. Кто?

source:combinatorics/games-g9/r2.tex

Путешествие по состояниям. Зацикливание

1. Пусть A — конечное множество, $f\colon A \to A$ — некоторая функция. Докажите, что последовательность $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ рано или поздно становится периодической.

2. Метеорологическая служба Тридесятого Государства следит за погодой уже 100 лет. Они подразделяют погоду на дождливую или солнечную. Метеорологи утверждают, что погода на следующий день однозначно определяется погодой в предыдущие 7 дней. Последняя неделя в Тридесятом Государстве была полностью дождливая. Докажите, что такое уже было и еще будет.

3. Кубик Рубика вывели из исходного состояния некоторой последовательностью поворотов граней. Докажите, что если повторять эту последовательность поворотов достаточно долго, то кубик в конце концов вернется в исходное состояние.

4. Докажите, что найдется число Фибоначчи, большее миллиона, дающее остаток 8 при делении на 2014.

5. На столе лежат 2014 спичек. За один ход можно взять из кучи 1, 10 или 11 спичек. Выигрывает тот, кто взял последнюю спичку. Кто выиграет при правильной игре?

6. Натуральное число заменяют суммой квадратов его цифр. Докажите, что для любого натурального числа после некоторого количества таких операций процесс зациклится.

7. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан «периодический» текст, например: ...мамамыларамумамамылараму...

8. **(a)** Докажите, что всякая обыкновенная дробь процессом деления числителя на знаменатель обращается в бесконечную периодическую десятичную дробь.
(b) Докажите, что если натуральное число n не делится ни на 2, ни на 5, то десятичное разложение дроби $1/n$ не имеет предпериода (то есть зацикливание начинается с первого же знака после запятой).
(c) Докажите, что длина периода десятичной дроби $1/p$, где число p — простое, есть делитель числа $p-1$.

9. По кругу сидят 2014 хамелеонов, каждый либо красного, либо зеленого цвета. Каждую секунду каждый хамелеон перекрашивается в том и только в том случае, когда его соседи разных цветов. Докажите, что когда-то первоначальная ситуация повторится.

source:combinatorics/looping-g9/r2.tex

Комбинаторная теория чисел

1. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди первых 2014 натуральных чисел, чтобы сумма никаких двух чисел не делилась на их разность?

2. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди первых 2014 натуральных чисел, чтобы никакое из выбранных чисел не делилась на другое выбранное?

3. На какое наименьшее количество групп можно разбить числа от 1 до 2014 так, чтобы среди чисел одной группы ни одно из чисел не делилось ни на какое другое?

4. Каждое натуральное число покрашено в красный или синий цвет. Оказалось, что произведение любых двух разноцветных чисел красное, а сумма синяя. Какого цвета может быть произведение двух красных чисел?

5. **(a)** Докажите, что из n натуральных чисел можно выбрать несколько так, что их сумма будет делиться на n.
(b) Вася выбрал $(n-1)$ целых чисел, так что сумма любых нескольких чисел из этого набора не делится на n. Докажите, что все выбранные им числа попарно сравнимы по модулю n.
(c) Петя выбрал 100 натуральных чисел, каждое из которых меньше 100 так, что сумма всех чисел равна 200. Докажите, что сумма нескольких из них равна 100.

6. **(a)** Дано простое число p. Выбрали $(2k-1)$ чисел ($k \leqslant p$), среди которых нет $k+1$ одинаковых, и посчитали остаток суммы любых k из них при делении на p. Докажите, что получилось не меньше k различных остатков.
(b) Докажите, что из $(2p-1)$ целых чисел можно выбрать p, сумма которых делится на p. (p — простое).
(c) *Теорема Эрдеша-Гинзбурга-Зива.* Докажите, что из $(2n-1)$ целых чисел всегда можно выбрать n чисел с суммой, кратной n.

7. Имеется много карточек, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до n. Известно, что сумма чисел на всех карточках делится на $n!$. Докажите, что карточки можно разложить на несколько групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел, записанных на карточках, равнялась $n!$.

source:combinatorics/number-theory-g9/r2.tex

Мини-серия по полуинварианту

1. На доске написано несколько натуральных чисел. Каждую минуту выбираются два числа x и y и заменяются на $x-2$ и $y+1$. Докажите, что рано или поздно на доске появится отрицательное число.

2. В долине живут фермеры. Некоторые из них видят дома друг друга. Дом каждого из них покрашен в серый или фиолетовый цвет. Каждое утро один из фермеров, если видит, что цвет его дома не совпадает с цветом большинства из видимых им домов, перекрашивает свой дом. Докажите, что рано или поздно перекрашивания прекратятся.

3. По окружности выписаны n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. После этого прежние числа стирают, а с оставшимися проделывают ту же операцию. Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности будут равны.

`source:combinatorics/semi-invariant-g9r2/more.tex`

Индукция

0. В квадрате $2^n \times 2^n$ вырезана **(a)** угловая **(b)** произвольная клетка. Докажите, что оставшуюся доску можно разрезать на уголки из трех клеток.

1. Докажите, что любую сумму, большую 7 рублей, можно выдать купюрами 3 и 5 рублей.

2. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 6$ квадрат можно разрезать на n квадратов.

3. Несколько прямых разбивают плоскость на части. Докажите, что можно раскрасить эти части в два цвета так, чтобы цвета граничащих граней были различны.

4. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трех разных цветов.

5. На кольцевом шоссе стоят несколько автомобилей с общим запасом бензина, достаточным, чтобы объехать весь круг. Докажите, что можно сесть в один из автомобилей и проехать все шоссе, забирая по дороге бензин у остальных автомобилей.

6. В стране n городов, любые два из них соединены односторонней дорогой. Оказалось, что из каждого города можно доехать до каждого. Докажите, что можно выехать из любого города, посетить все города ровно по одному разу и вернуться обратно.

7. В соревновании участвуют 32 боксера. Каждый боксер в течение одного дня может проводить только один бой. Известно, что все боксеры имеют разную силу, и что сильнейший всегда выигрывает. Докажите, что за 15 дней можно определить место каждого боксера. (Расписание каждого дня соревнований составляется вечером накануне и в день соревнований не изменяется.)

source:combinatorics/induction-g9r2.tex

Глава 2

Бурундуки (9-1)

Олимпиада 9 классов

1. Дан приведённый квадратный трехчлен $P(x)$. Известно, что он имеет общий корень с многочленом $P(P(P(x)))$. Докажите, что $P(0) \cdot P(1) = 0$.

2. В клетчатом квадрате 101×101 каждая клетка внутреннего квадрата 99×99 покрашена в один из десяти цветов (клетки, примыкающие к границе квадрата, не покрашены). Может ли оказаться, что в каждом квадрате 3×3 в цвет центральной клетки покрашена еще ровно одна клетка?

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Прямая, перпендикулярная стороне AC и проходящая через точку A_1, пересекает прямую B_1C_1 в точке D. Докажите, что угол ADC прямой.

4. В компании из семи человек любые шесть могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

5. Неограниченная последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет следующему условию. Существуют натуральное число k и такие ненулевые целые числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$, что для любого натурального n выполнено равенство $b_1a_{n+1} + b_2a_{n+2} + \ldots + b_ka_{n+k} = 0$. Докажите, что в последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ встретится хотя бы одно составное число.

source:olympiad/g9.tex

Квадратичные вычеты

1. Пусть p — нечетное простое число. Докажите, что

(a) если a — квадратичный вычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$;

(b) если a — квадратичный невычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

Определение. Пусть p — простое число. *Символом Лежандра* называется выражение, обозначаемое $\left(\frac{a}{p}\right)$, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p, -1, если a — невычет по модулю p, и 0, если a кратно p.

Из задачи 1 следует, что если p нечетно, то

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

2. Докажите, что если p — нечетное простое число, то по модулю p существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и столько же невычетов.

3. Докажите, что для данного простого модуля p

(a) произведение двух квадратичных вычетов — вычет;

(b) произведение вычета на невычет — невычет;

(c) произведение двух невычетов — вычет.

4. При каких p вычет -1 является квадратичным вычетом по модулю p (где p — нечетное простое число)?

5. Пусть $x^2 + y^2$ делится на простое число $p = 4k + 3$. Докажите тогда, что x и y делятся на p.

6. **(a)** Найдите сумму всех квадратичных вычетов по простому модулю p.

(b) Известно, что x не делится на простое p. Найдите сумму

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k(k+x)}{p}\right).$$

7. Докажите, что многочлен $x^4 + 1$ неприводим как многочлен над $\mathbb{Z}$, но приводим как многочлен над полем $\mathbb{F}_p$ для любого простого числа p.

8. Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$

(a) не имеет решений в натуральных числах;

(b) имеет бесконечно много решений в целых числах.

source:algebra/number-theory/quadratic-residue-g9.tex

Многочлены с целыми коэффициентами

1. Известно, что $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что $f(n)$ кратно трем для любого целого n.

2. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(7) = 11$, а $P(11) = 13$. Докажите, что хотя бы один из его коэффициентов — не целое число.

3. Пусть f — многочлен с целыми коэффиентами. Докажите, что $f(a)-f(b)$ делится на $a-b$, где a и b — различные целые числа.

4. Все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа. Известно, что $P(1) = 1$ и что $P(n) = 0$ при некотором натуральном n. Найдите n.

5. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Если в него вместо неизвестного подставить 2 или 3, то получаются числа, кратные 6. Докажите, что если вместо неизвестного в него подставить 5, то также получится число, кратное 6.

6. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если уравнение $P(x) = 1$ имеет больше трех целочисленных корней, то уравнение $P(x) = -1$ не имеет целочисленных корней.

7. Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами принимает значение 5 при пяти различных целых значениях x. Может ли $f(x)$ иметь целые корни? Может ли $f(n)$ равняться -6 при целом n?

8. Многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения ± 1. Докажите, что этот многочлен нельзя разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

9. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что число $P(k)$ делится на $Q(k)$ при любом целом k. Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$.

10. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа. Докажите, что многочлен

$$(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) - 1$$

нельзя разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

source:algebra/polynomial/integer-g9.tex

Алгебраический разнобой

1. Все коэффициенты квадратного трехчлена — целые нечетные числа. Может ли он иметь целые корни?

2. Квадратный трехчлен x^2+ax+b имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что $|a+b+1|$ — составное число.

3. Докажите, что многочлен $x^p + x^{p-1} + \ldots + x + p = 0$, где p — простое число, не имеет рациональных корней.

4. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи, и $P(19) = P(94) = 1994$.

5. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

6. Докажите, что

$$x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)(x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(p-1)) \mod p\,.$$

7. Уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет n различных целых корней. Докажите, что если любые два корня взаимно просты, то и числа a_{n-1} и a_n взаимно просты.

8. Существуют ли такие приведенные квадратные трехчлены f и g, что для любого целого n число $f(n) \cdot g(n)$ — целое, а числа $f(n)$, $g(n)$ и $f(n)+g(n)$ — нецелые?

9. Назовем многочлен *средиземноморским*, если он имеет только действительные корни и имеет вид

$$P(x) = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$

Коэффициенты a_0, …, a_7 — действительные числа. Найдите наибольшее действительное число, которое может быть корнем средиземноморского многочлена.

`source:algebra/polynomial/mixture-g9.tex`

Многочлены. Домашнее задание

1. Бесконечная последовательность $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$ определена как

$$P_0(x) = x\,, \qquad P_n(x) = P_{n-1}(x-1) \cdot P_{n-1}(x+1)\,, \quad n \geqslant 1\,.$$

Найдите наибольшее k такое, что $P_{2014}(x)$ делится на x^k.

2. Пусть $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ при $x \in [-1; 1]$. Найдите максимум выражения $a^2 + b^2 + c^2$.

3. Докажите, что при любых отличных от нуля числах a, b, c хотя бы одно из квадратных уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет корень.

4. Даны корни x_0 и x_1, x_0 и x_2, ..., x_0 и x_n соответственно квадратных трехчленов $y = x^2 + a_1x + b_1$, $y = x^2 + a_2x + b_2$, ..., $y = x^2 + a_nx + b_n$. Найдите корни квадратного трехчлена

$$y = x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\,.$$

5. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен с действительными коэффиентами такой, что $P(x^3 + x) \geqslant P(x^2 + 1)$ для всех действительных x. Найдите сумму корней $P(x)$.

6. Даны два квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$. Известно, что каждое из выражений $3f(x) + g(x)$ и $f(x) - g(x)$ — квадратные трехчлены, имеющие ровно один корень. Известно также, что $f(x)$ имеет два корня. Докажите, что трехчлен $g(x)$ не имеет корней.

7. Пусть $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x)$ — кубический многочлен, корни которого являются квадратами корней многочлена $f(x)$. Найдите $g(x)$.

8. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Докажите, что $f(f(x)) = x$ не может иметь ровно три действительных корня.

source:algebra/polynomial/mixture-g9-more.tex

Разные задачи про квадратные уравнения

1. Рассматриваются квадратичные функции вида $y = x^2+px+q$, у которых $p+q/2 = 2001$. Докажите, что их графики проходят через одну точку.

2. Пусть a и b — положительные числа. Сумма минимального значения квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + 8x + b$ и минимального значения квадратного трехчлена $g(x) = bx^2 + 8x + a$ равна нулю. Докажите, что эти минимальные значения оба равны нулю.

3. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают отрицательные значения на непересекающихся интервалах. Докажите, что найдутся такие положительные числа α и β, что для любого действительного x будет выполняться неравенство $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) > 0$.

4. Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют ровно одну общую точку.

5. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешется заменить на один из трехчленов

$$x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}+1\right) \quad \text{или} \quad (x-1)^2 \cdot f\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Можно ли с помощью таких операций из трехчлена $x^2 + 4x + 3$ получить трехчлен $x^2 + 10x + 9$?

6. Различные числа a, b, c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите $a + b + c$.

7. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2+ax+b$. Известно, что для любого вещественного x существует вещественное y такое, что $f(y) = f(x)+y$. Найдите наибольшее возможное значение a.

8. Квадратный трехчлен $p(x)$ таков, что $|p(x)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Докажите, что $p(-1/2) \leqslant 7$.

source:algebra/polynomial/quadratic-g9.tex

Теорема Безу. Вокруг да около

1. Найдите остаток от деления многочлена $x^5 - 17x + 1$ на $x + 2$.

2. Найдите остатки от деления многочлена $x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + 1$ на $(x - 1)$ и $(x^2 - 1)$.

3. Многочлен $P(x)$ при делении на $(x - 1)$ дает остаток 2, а при делении на $(x - 2)$ дает остаток 1. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на $(x - 1)(x - 2)$?

4. Многочлен $P(x)$ при делении на $x^2 - 4$ дает остаток $x + 1$, а на $x^2 - 1$ — остаток $x + 2$. Найдите остаток при делении $P(x)$ на $(x^2 - 4)(x^2 - 1)$.

5. Докажите, что если значения двух многочленов, степени которых не превосходят n, совпадают в $n + 1$ различных точках, то эти многочлены равны.

6. Дан многочлен $P(x)$ такой, что многочлен $P(x^n)$ делится на $(x - 1)$. Докажите, что многочлен $P(x)$ также делится на $(x - 1)$.

7. Известно, что многочлен $x^n + x + 1$ делится на $x^2 + x + 1$. Докажите, что n есть число вида $3k + 2$.

8. Многочлен $P(x^3) + Q(x^3)$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$. Докажите, что многочлен $P(x) + Q(x)$ делится на многочлен $x - 1$.

9. При каких n многочлен $1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n-2}$ делится на $1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}$?

source:algebra/polynomial/remainder-theorem-g9.tex

Теорема Виета

1. Дано уравнение $x^2+px+q=0$. Составьте с помощью коэффициентов p и q квадратное уравнение, корнями которого были бы $y_1=x_1^2+x_2^2$, $y_2=x_1^3+x_2^3$.
2. При каких значениях параметра a множеством решений неравенства $x^2+ax-1<0$ будет интервал длины 5?
3. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $4x^2-28x+a=0$ равна 22.5?
4. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+x\sqrt{a^2-4a}-a-2=0$ принимает наименьшее значение?
5. При каких a разность корней уравнения $2x^2-(a+1)x+(a-1)=0$ равна их произведению?
6. Квадратное уравнение $x^2-6px+q=0$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Числа p, x_1, x_2, q — четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите x_1 и x_2.
7. Определите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения $x^3+(a^2-9a)x^2+8ax-64=0$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.
8. При каких значениях a четыре корня уравнения $x^4+(a-5)x^2+(a+2)^2=0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?
9. Известно, что α — корень уравнения $ax^2+bx+b=0$, β — корень уравнения $ax^2+ax+b=0$, а также, что $\alpha\beta=1$. Найдите α и β.
10. Известно, что каждое из уравнений $x^2+ax+b=0$ и $x^2+bx+a=0$ имеет два различных корня, и эти четыре корня в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите a и b.

source:algebra/polynomial/vietas-formulas-g9.tex

Гомотетия

Определение. *Гомотетией* с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, которое переводит каждую точку P в такую точку P', что $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$.

1. Точки A, B и C лежат на окружности Γ. Найдите ГМТ пересечения медиан треугольников ABC, если точки A и B фиксированы, а C двигается по Γ.

2. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и взята произвольная точка P. Через точку A провели прямую l_a, параллельную прямой PA_1. Аналогично определяются прямые l_b и l_c. Докажите, что прямые l_a, l_b, l_c пересекаются в одной точке.

3. В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в точке M, высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H, а O — вообще центр описанной окружности.
(a) Докажите, что точки, симметричные H относительно точки A_0 и относительно стороны BC лежат на описанной окружности треугольника.
(b) Докажите, что точки A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1 лежат на одной окружности (*окружность Эйлера*), радиус которой вдвое меньше радиуса описанной окружности треугольника ABH. Какие ещё три точки лежат на этой окружности?
(c) Докажите, что радиус вписанной окружности хотя бы вдвое меньше радиуса описанной окружности.
(d) Докажите, что точки H, O, M и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой и найдите отношения, в которых делят две последние точки отрезок с концами в первых двух.

4. *Построим сначала что-то похожее, а потом подгоним.*
(a) Даны угол ABC и точка M внутри его. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M.
(b) Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

5. Обозначим точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной AC треугольника ABC через P и Q соответственно. Докажите, что прямая BQ проходит через точку, диаметрально противоположную точке P на вписанной окружности.

6. Внутри треугольника расположены окружности α, β, γ, δ одинакового радиуса, причем каждая из окружностей α, β, γ касается двух сторон треугольника и окружности δ. Докажите, что центр окружности δ принадлежит прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей данного треугольника.

7. Пусть M_A, M_B, M_C — середины сторон треугольника ABC. Точки A', B', C' — суть точки касания
(a) вписанных окружностей треугольников M_AM_BC, AM_BM_C и M_ABM_C со сторонами треугольника $M_AM_BM_C$;
(b) вписанной окружности треугольника $M_AM_BM_C$ с его сторонами.
Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

8. Окружность S касается равных сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC в точках P и Q, а также касается внутренним образом описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что середина отрезка PQ является центром вписанной окружности треугольника ABC.

9. Докажите, что любой выпуклый многоугольник F содержит два непересекающихся во внутренних точках многоугольника F_1 и F_2, подобных F с коэффициентом $1/2$.

source:geometry/homothety-g9r1/basics.tex

Композиция гомотетий

1. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть H_A, H_B, H_C — точки, симметричные H относительно прямых B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 соответственно. Докажите, что треугольники ABC и $H_AH_BH_C$ перспективны.

2. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K. Окружность S_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD (S_1 вторично пересекает диагональ AC на отрезке AK). Окружность S_2 проходит через точку K и касается прямых CB и CD (S_2 вторично пересекает диагональ AC на отрезке KC). Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей S_1 и S_2, будут параллельны между собой.

3. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, I' — центр вневписанной в угол C окружности; L и L' — точки, в которых сторона AB касается этих окружностей. Докажите, что прямые IL', LI' и высота CH треугольника ABC пересекаются в одной точке.

4. Даны две окружности ω_1 и ω_2. Окружность γ касается их внешним образом в точках A и B. Докажите, что прямая AB проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора γ.

5. Из вершины A треугольника ABC проведён луч AM, лежащий внутри треугольника (M лежит на BC). Обозначим через γ_1, γ_2 вписанная и вневписанная окружности треугольника AMB соответственно (берется окружность, касающаяся стороны MB). Аналогично для треугольника ACM определены окружности ω_1, ω_2. Докажите, что общая внешняя касательная к окружностям γ_1 и ω_1, отличная от BC, и общая внешняя касательная к окружностям γ_2 и ω_2, отличная от BC, пересекаются на прямой BC.

6.* Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана точка O. Обозначим вписанную окружность треугольника OAB через ω_{AB}. Аналогично определим окружности ω_{BC}, ω_{CD} и ω_{DA}. Оказалось, что ω_{AB} касается ω_{BC}, ω_{BC} касается ω_{CD}, ω_{CD} касается ω_{DA} и ω_{DA} касается ω_{AB}. Докажите, что общая внешняя касательная к окружностям ω_{AB} и ω_{BC}, общая внешняя касательная к окружностям ω_{CD} и ω_{DA} и прямая AC пересекаются в одной точке.

source:geometry/homothety-g9r1/composition.tex

Разнобой по геометрии

1. **(a)** Постройте общую касательную к двум окружностям.
   (b) Дана окружность и точка P. Постройте в окружности хорду AB заданной длины и с заданной длиной перпендикуляра на неё из точки P.

2. Две окружности пересекаются в точках E и F. Прямая l пересекает первую окружность в точках A и B, вторую — в точках C и D так, что точка E лежит внутри треугольника ADF, а точки B и C — на отрезке AD. Оказалось, что $AB = CD$. Докажите, что $BE \cdot DF = CE \cdot AF$.

3. В окружность вписан пятиугольник $ABCDE$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке K. Отрезок CE касается описанной окружности треугольника ABK в точке N. Найдите $\angle CNK$, если известно, что $\angle ECD = 40°$.

4. Обозначим центр вписанной окружности треугольника ABC через I, а через L — середину дуги AB его описанной окружности. Из L опустили перпендикуляр на прямую AI, который пересек сторону AC в точке K. Докажите, что $KI \parallel AB$.

5. Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OM и ON на стороны AB и BC, а затем построили параллелограмм $MONK$. Докажите, что точки B, K и ортоцентр H треугольника ABC лежат на одной прямой.

6. Докажите, что в прямоугольном треугольнике высота, проведённая из прямого угла, равна сумме радиуса вписанной в треугольник окружности и радиусов вписанных окружностей треугольников, на которые эта высота делит исходный треугольник.

7. Два квадрата $ABCD$ и $AKLM$ имеют общую вершину и одинаково ориентированы. Докажите, что $BK \perp DM$.

source:geometry/mixture-g9r1.tex

Маленькая добавка

1. Даны 5 прямых общего положения. Докажите, что пять точек Микеля всевозможных четверок из этих прямых лежат на одной окружности.

2. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины дуг BAC, ABC, ACB описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что ортоцентры треугольников A_1BC_1, B_1CA_1, C_1AB_1 образуют треугольник, подобный $A_1B_1C_1$.

3. На диагоналях выпуклого четырехугольника $ABCD$ построены правильные треугольники ACB' и BDC', причем точки B и B' лежат по одну сторону от AC, а точки C и C' лежат по одну сторону от BD. Найдите $\angle BAD + \angle CDA$, если известно, что $B'C' = AB + CD$.

4. Пусть ABC — правильный треугольник. На его стороне AC выбрана точка T, а на дугах AB и BC его описанной окружности выбраны точки M и N соответственно так, что MT параллельно BC и NT параллельно AB. Отрезки AN и MT пересекаются в точке X, а отрезки CM и NT — в точке Y. Докажите, что периметры многоугольников $AXYC$ и $XMBNY$ равны.

5. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC; O_A, O_B, O_C — центры вписанных окружностей треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 соответственно; T_A, T_B, T_C — точки касания вписанной окружности ABC со сторонами BC, CA, AB соответственно. Докажите, что все стороны шестиугольника $T_AO_BT_CO_AT_BO_C$ равны.

source:geometry/mixture-g9r1-more.tex

Поворот

1. **(a)** По лучам, имеющим общее начало, с постоянными равными скоростями двигаются точки A и B. Докажите, что есть две точки плоскости, из-под которых отрезок AB виден под постоянным углом. **(b)** По двум равным окружностям с равными угловыми скоростями двигаются точки A и B. Докажите, что существует точка P плоскости такая, что $\angle APB = \text{const}$.

2. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; точки M и P — середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

4. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P, из A_2 — на A_3P, из A_3 — на A_4P, из A_4 — на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра пересекаются в одной точке.

5. На двух противоположных сторонах выпуклого четырехугольника как на гипотенузах построены во внутреннюю сторону два равнобедренных прямоугольных треугольника. Оказалось, что они имеют общую вершину. Докажите, что аналогичные треугольники, построенные на двух других сторонах тоже будут иметь общую вершину.

6. У треугольника ABC все углы меньше $120°$. Выбирается такая точка T, что сумма $TA + TB + TC$ минимальна (*точка Торричелли*). Докажите, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$.

7. Дан треугольника ABC. На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

8. Шестиугольник $ABCDEF$ правильный, K и M — середины отрезков BD и EF. Докажите, что треугольник AKM правильный.

9. На сторонах AB, BC и CA, треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный $\triangle ABC$.

10. Два квадрата $BCDA$ и $BKNM$ имеют общую вершину B. Докажите, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBM лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

11. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D (A лежит на отрезке CD). Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина CD. Докажите, что точки M, K, A, N лежат на одной окружности.

source:geometry/rotation-g9.tex

Ориентированные углы

Определение. Ориентированным углом между прямыми l и m называется такой угол, на который нужно против часовой стрелки повернуть прямую l, чтобы она стала параллельна прямой m. Обозначается ориентированный угол через $\angle(l, m)$. Углы, отличающиеся на кратное 180 число градусов, считаются равными.

Упражнения.

(a) $\angle(l,m) = -\angle(m,l)$. **(b)** $\angle(l,m) + \angle(m,k) = \angle(l,k)$.

(c) $\angle(AC, CB) = \angle(AD, DB) \Leftrightarrow$ точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

(d) $\angle(l,m) = \angle(l,k) \Leftrightarrow m \parallel k$.

1. **(a)** Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через P проходит прямая AB, причем A лежит на первой окружности, а B — на второй. Через Q проходит прямая CD, причем C лежит на первой окружности, а D — на второй. Докажите, что $AC \parallel BD$.
   (b) Дан вписанный шестиугольник $ABCDEF$. Пусть прямые AB и DE пересекаются в точке Q, прямые BC и EF — в точке P, а CD с FA — в точке R. Проведем описанную окружность треугольника PCF и продлим прямые CD и FA до вторичного пересечения с этой окружностью в точках U и V соответственно. Докажите, что соответственные стороны треугольников AQD и VPU параллельны.
   (c) *(теорема Паскаля)* Выведите из этого, что точки P, Q и R лежат на одной прямой.

2. Даны окружности S_1, S_2 и S_3, проходящие через точку X. Вторая точка пересечения окружностей S_1 и S_2 — точка P, S_2 и S_3 — точка Q, S_3 и S_1 — точка R. На окружности S_1 выбрана произвольная точка A. Вторая точка пересечения прямой AP с S_2 — точка B, прямой AR с S_3 — точка C. Докажите, что B, C и Q лежат на одной прямой.

3. На окружности даны точки A, B, C, D. M —середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что точки K, E, C и D лежат на одной окружности.

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая пересекает его стороны AB, BC, CD и AD в различных точках E, F, G, H соответственно. Описанные окружности треугольников AEF и AGH пересекаются вторично в точке P, а описанные окружности треугольников CEF и CGH пересекаются вторично в точке Q. Докажите, что прямая PQ делит отрезок BD пополам.

5. Даны 4 прямые общего положения. Всеми возможными способами выкидывается одна из них, и берется описанная окружность оставшегося треугольника. Докажите, что четыре таких окружности проходят через одну точку. Эта точка называется *точкой Микеля* для этой четверки прямых (или для четырехугольника, образованного этими прямыми).

6. В треугольнике ABC вписанная окружность с центром I касается его сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Прямая AI пересекает прямую A_1C_1 в точке K.

(a) Докажите, что угол CKA прямой.

(b) Докажите, что точка K лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AB.

(c) Окружность с центром O вписана в четырехугольник $ABCD$ и касается его непараллельных друг другу сторон BC и AD в точках E и F соответственно. Пусть прямая AO и отрезок EF пересекаются в точке K, прямая DO и отрезок EF — в точке N, а прямые BK и CN — в точке M. Докажите, что точки O, K, M и N лежат на одной окружности.

7. Окружности ω и γ касаются друг друга внутренним образом в точке A, причем γ находится внутри ω. Хорда BC окружности ω касается γ в точке P. Прямые AB и AC вторично пересекают γ в точках B' и C' соответственно.

(a) Докажите, что прямые $B'C'$ и BC параллельны. (подсказка: воспользуйтесь тем, что у обеих окружностей в точке A общая касательная)

(b) *Лемма Архимеда.* Докажите, что прямая AP проходит через середину дуги BC окружности ω, не содержащей точку A.

8. Точки O_1 и O_2 — центры соответственно описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Окружности, описанные около треугольников ABC и O_1O_2A, пересекаются в точках A и D. Докажите, что прямая BD касается окружности, описанной около треугольника O_1O_2A.

9. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Из точки B_1 восстанавливается перпендикуляр к стороне BC и продлевается до пересечения с дугой BC описанной окружности в точке K. Перпендикуляр из B на AK пересекает AC в точке L. Докажите, что L, K и середина дуги AC лежат на одной прямой.

10. Дан треугольник ABC и внутри него точка P, отличная от точки пересечения высот.

(a) Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников ABP, BCP, CAP, ABC, проходят через одну точку.

(b) Докажите, что описанная окружность педального треугольника точки P (треугольника, образованного проекциями точки на стороны исходного треугольника) также проходит через эту точку.

source:geometry/signed-angles-g9.tex

Компоненты связности

1. В графе 101 вершина, степени всех вершин равны k. При каком наибольшем k этот граф может быть несвязным?

2. В стране 100 городов, среди которых столица, из которой выходит 33 дороги, и город Удельный, из которого выходит одна дорога. Из всех остальных городов выходит ровно по двадцать дорог. Обязательно ли из столицы можно добраться до Удельного?

3. Куб состоит из n^3 единичных кубических ячеек. Какое наименьшее количество перегородок между кубиками нужно удалить для того, чтобы из любой ячейки можно было добраться до поверхности куба? Выходить за поверхность куба не надо, то есть для $n = 1$ и $n = 2$ ответ 0.

4. В стране 50 городов, любые два соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно выбрать одну из дорог и поменять на ней направление движения так, чтобы из любого города можно было приехать в любой другой.

5. Турист, приехавший в Москву на поезде, весь день бродил по городу. Поужинав в кафе на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал, и при этом идти только по улицам, по которым он шел до этого нечетное число раз. Докажите, что он всегда сможет это сделать.

6. Ребра связного графа раскрашены в N цветов, причем из каждой вершины выходит ровно по одному ребру каждого цвета. В графе удалили $N - 1$ ребро, причем никакие два удаленных ребра не имеют одинаковый цвет. Докажите, что граф остался связен.

source:combinatorics/graph/connected-components-g9/r1.tex

Планарные графы

1. Каждая грань выпуклого многогранника является либо пятиугольником, либо шестиугольником. Каким может быть количество пятиугольников?

2. Докажите, что в любом планарном графе найдется вершина степени 5 или меньше.

3. Ребра полного графа на 11 вершинах покрасили в два цвета. Может ли быть так, что ребра каждого цвета образуют планарный граф?

4. Можно ли ребра полного графа на 8 вершинах покрасить в два цвета так, чтобы ребра каждого цвета образовывали планарный граф?

5. В планарном графе все вершины имеют степень 4. По ребрам графа ползет муравей, при этом он на каждом перекрестке поворачивает либо влево, либо вправо. Через некоторое время муравей прополз по тому ребру, по которому двигался ранее. Докажите, что он полз в том же направлении.

6. На плоскости нарисовано несколько непересекающихся кругов, соединенных непересекающимися отрезками; из каждого круга выходит четное число отрезков, и вся конструкция связна. Докажите, что существует замкнутый несамопересекающийся маршрут, проходящий по каждому отрезку и по некоторым дугам окружностей.

7. Из гипотезы четырех красок выведите следующее утверждение: если в планарном графе нет мостов и степень каждой вершины равна 3, то его ребра можно правильным образом раскрасить в 3 цвета.

`source:combinatorics/graph/planar-g9r1.tex`

Деревья

Определение. *Точка сочленения* — вершина, при удалении которой вместе со всеми исходящими ребрами граф теряет связность.

Определение. *Мост* — ребро, при удалении которого граф теряет связность.

Все графы далее предполагаются без петель и кратных ребер.

1. Может ли в графе быть ровно два остовных дерева?
2. В связном графе есть хотя бы две вершины. Докажите, что в нем есть хотя бы две вершины, не являющиеся точками сочленения.
3. В графе n вершин, степень каждой вершины равна 3. Раскраска ребер графа в 3 цвета называется *правильной*, если из любой вершины выходят ребра трех разных цветов. Докажите, что правильных раскрасок не больше, чем $3 \cdot 2^n$.
4. В дереве три вершины покрашены в красный так, что для любой вершины x все три красные вершины находятся на расстоянии не более, чем 10. Докажите, что существует такая вершина A, что все вершины дерева находятся от нее на расстоянии не превосходящем 9.
5. Есть дерево на n вершинах. На плоскости отмечены n точек общего положения. Докажите, что можно провести $n-1$ отрезок между этими точками так, чтобы получившийся граф был изоморфен исходному дереву.
6. У дерева 100 висячих вершин. Докажите, что можно провести 50 новых ребер так, чтобы в получившемся графе не было мостов.

source:combinatorics/graph/tree-g9/r1.tex

Игры

1. Есть клетчатый прямоугольник $m \times n$. Двое по очереди закрашивают любую строку или любой столбец в нем. Закрашивать строку, где все клетки уже закрашены, нельзя. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто выигрывает при правильной игре?

2. На плоскости отмечены n точек, никакие три не лежат на одной прямой. Двое соединяют стрелочками эти точки. Стрелочку можно проводить из конца предыдущей стрелочки в любую отмеченную точку, с которой стрелочки еще не было (ни в этом направлении, ни в обратном). Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто?

3. На доске $n \times n$ двое по очереди ходят фишкой. Сначала она стояла в углу, ходить можно на соседнюю по стороне клетку, на которой фишка еще не была. Докажите, что при четном n выигрывает первый, а при нечетном — второй игрок.

4. Есть клетчатый листок $m \times n$. Первый вырезает из него столбец или строку и откладывает ее в сторону. Затем второй выбирает один из прямоугольников, на которые распался лист (прямоугольник мог быть и всего один), и с ним проделывает то же самое. Если в какой-то момент есть прямоугольник со стороной 1, его можно просто взять целиком. А можно, например, из него вырезать любую клеточку. Проигрывает тот, кто не может ходить. Кто?

5. В вершинах куба стоят действительные неотрицательные числа с суммой один. Игра такая: первый выбирает произвольную грань, второй выбирает еще одну, не параллельную грани первого, потом первый выбирает грань, не параллельную обеим предыдущим. Тогда у таких трех граней есть общая вершина. Первый хочет, чтобы число в ней было не больше $1/6$, а второй ему мешает. Докажите, что первый выигрывает.

6. Есть куб. Первый красит три его ребра в красный цвет, потом второй красит еще три ребра в синий цвет, потом первый красит три ребра в красный, потом второй — оставшиеся в синий. Каждое ребро красить можно только один раз. Выигрывает тот, кому удалось покрасить в свой цвет ребра одной грани. Кто выигрывает?

7. Есть 17 куч из монет, в первой одна, во второй две и т. д. Играют двое. Ход такой: человек, у которого монет больше (если поровну, то ходивший в прошлый раз) выбирает еще не выбранную кучу (в первый раз ходящий избирается жребием). Его соперник решает, кому она достанется из них двоих. Далее следующий ход. Выигрывает тот, у кого в конце больше монет. Кто?

8. На доске написано число 2. Ход состоит в увеличении числа хотя бы на один, но не более, чем в два раза, и записывании его на доску вместо старого. Выигрывает тот, кто получил число 2010. Кто?

9. Пока все играли, кот Васька скучал в одиночестве и придумал себе такое занятие. Он нашел две кучи камней. Он выбирает из куч любую с четным количеством камней, делит ее пополам и половину перекладывает в другую кучу. Потом опять то же самое. Он очень хочет делать так вечно. При каких первоначальных размерах куч у него получится?

10. Два игрока по очереди ставят на шахматную доску коней. Первый ставит коня на произвольную клетку доски. Каждый следующий конь должен бить предыдущего и не должен бить остальные поставленные фигуры. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

source:combinatorics/games-g9/r1.tex

Путешествие по состояниям. Зацикливание

1. Пусть A — конечное множество, $f\colon A \to A$ — некоторая функция. Докажите, что последовательность $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ рано или поздно становится периодической.

2. Докажите, что найдется число Фибоначчи, большее миллиона, дающее остаток 8 при делении на 2014.

3. Метеорологическая служба Тридесятого Государства следит за погодой уже 100 лет. Они подразделяют погоду на дождливую или солнечную. Метеорологи утверждают, что погода на следующий день однозначно определяется погодой в предыдущие 7 дней. Последняя неделя в Тридесятом Государстве была полностью дождливая. Докажите, что такое уже было и еще будет.

4. Кубик Рубика вывели из исходного состояния некоторой последовательностью поворотов граней. Докажите, что если повторять эту последовательность поворотов достаточно долго, то кубик в конце концов вернется в исходное состояние.

Предположим, что f — биекция конечного множества на себя. Тогда множество состояний, «достижимых» из элемента x функцией f, назовем *орбитой*.

5. **(a)** Всем известен такой способ перемешивания колоды из 36 карт: верхние 18 карт снимаются, а затем «скрещиваются» с нижней половиной, то есть в новой колоде верхние карты будут идти под четными номерами в том же порядке, а нижние — под нечетными номерами также без изменения порядка (номера в колоде считаются сверху вниз). Сколько раз нужно проделать такое перемешивание, чтобы порядок карт стал таким же, как изначально?
(b) Тот же вопрос, только верхние карты кладутся на нечетные места.

6. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан «периодический» текст, например: …мамамыларамумамамылараму…

7. На столе лежат 2014 спичек. За один ход можно взять из кучи 1, 10 или 11 спичек. Выигрывает тот, кто взял последнюю спичку. Кто выиграет при правильной игре?

8. Натуральное число заменяют суммой квадратов его цифр. Докажите, что для любого натурального числа после некоторого количества таких операций процесс зациклится.

9. **(a)** Докажите, что всякая обыкновенная дробь процессом деления числителя на знаменатель обращается в бесконечную периодическую десятичную дробь.
(b) Докажите, что если натуральное число n не делится ни на 2, ни на 5, то десятичное разложение дроби $1/n$ не имеет предпериода (то есть зацикливание начинается с первого же знака после запятой).
(c) Докажите, что длина периода десятичной дроби $1/p$, где число p — простое, есть делитель числа $p-1$.

10. По кругу сидят 2014 хамелеонов, каждый либо красного, либо зеленого цвета. Каждую секунду каждый хамелеон перекрашивается в том и только в том случае, когда его соседи разных цветов. Докажите, что когда-то первоначальная ситуация повторится.

source:combinatorics/looping-g9/r1.tex

Комбинаторная теория чисел

1. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди первых 2014 натуральных чисел, чтобы сумма никаких двух чисел не делилась на их разность?

2. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди первых 2014 натуральных чисел, чтобы никакое из выбранных чисел не делилась на другое выбранное?

3. На какое наименьшее количество групп можно разбить числа от 1 до 2014 так, чтобы среди чисел одной группы ни одно из чисел не делилось ни на какое другое?

4. Каждое натуральное число покрашено в красный или синий цвет. Оказалось, что произведение любых двух разноцветных чисел красное, а сумма синяя. Какого цвета может быть произведение двух красных чисел?

5. **(a)** Докажите, что из n натуральных чисел можно выбрать несколько так, что их сумма будет делиться на n.
(b) Вася выбрал $(n-1)$ целых чисел, так что сумма любых нескольких чисел из этого набора не делится на n. Докажите, что все выбранные им числа попарно сравнимы по модулю n.
(c) Петя выбрал 100 натуральных чисел, каждое из которых меньше 100 так, что сумма всех чисел равна 200. Докажите, что сумма нескольких из них равна 100.

6. **(a)** Дано простое число p. Выбрали $(2k-1)$ чисел $(k \leqslant p)$, среди которых нет $k+1$ одинаковых, и посчитали остаток суммы любых k из них при делении на p. Докажите, что получилось не меньше k различных остатков.
(b) Докажите, что из $(2p-1)$ целых чисел можно выбрать p, сумма которых делится на p. (p — простое).
(c) *Теорема Эрдеша-Гинзбурга-Зива.* Докажите, что из $(2n-1)$ целых чисел всегда можно выбрать n чисел с суммой, кратной n.

7. Имеется много карточек, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до n. Известно, что сумма чисел на всех карточках делится на $n!$. Докажите, что карточки можно разложить на несколько групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел, записанных на карточках, равнялась $n!$.

source:combinatorics/number-theory-g9/r1.tex

Глава 3

Выхухоли (10-2)

Немного об Эйлере

1. **(a)** Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, H — его ортоцентр, A_1 — середина стороны BC. Докажите, что $AH = 2OA_1$.
   (b) Докажите, что в треугольнике ABC точка пересечения высот, точка пересечения медиан и центр описанной окружности лежат на одной прямой, причем $HM = 2MO$.
2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. H_A и H_B — ортоцентры треугольников BCD и ACD соответственно. Докажите, что $H_AH_B = AB$.
3. В условиях предыдущей задачи аналогично определим точки H_C и H_D. Докажите, что отрезки AH_A, BH_B, CH_C и DH_D пересекаются в одной точке H.
4. Из середины каждой стороны вписанного четырехугольника $ABCD$ опустили перпендикуляр на противоположную сторону. Докажите, что эти четыре прямых пересекаются в одной точке. Что это за точка?
5. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, и прямая, соединяющая середины диагоналей, пересекаются в одной точке M.
6. Докажите, что точка H из задачи 3, точка M из задачи 5, а также центр O описанной окружности вписанного четырехугольника $ABCD$ лежат на одной прямой, причем $OM = MH$.
7. Докажите, что центры окружностей Эйлера треугольников ABC, ABD, ACD, BCD лежат на одной окружности.
8. Докажите, что окружности Эйлера треугольников ABC, ABD, ACD, BCD пересекаются в точке H.

`source:geometry/euler-line-g10r2/main.tex`

Ещё немного об Эйлере

Дан треугольник ABC; H — его ортоцентр; M — точка пересечения медиан; O — центр описанной окружности; I — центр вписанной окружности; M_A, M_B, M_C — середины сторон BC, AC, AB соответственно; H_A, H_B, H_C — основания высот из вершин A, B, C соответственно; I_A, I_B, I_C — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC и AB соответственно.

1. Докажите, что отрезки, соединяющие M_A, M_B, M_C с серединами AH, BH, CH пересекаются в одной точке.

2. P — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и AH_BH_C. Докажите, что прямая PH делит отрезок BC пополам.

3. Докажите, что одна из дуг H_AM_A, H_BM_B, H_CM_C окружности Эйлера равна сумме двух других.

4. **(a)** Пусть O_A, O_B, O_C — центры описанных окружностей треугольников BCH, ACH, ABH соответственно. Докажите, что треугольники $O_AO_BO_C$ и ABC равны.
   (b) Докажите, что окружности Эйлера треугольников ABC и $O_AO_BO_C$ совпадают.

5. **(a)** Докажите, что прямые, проходящие через I_A, I_B, I_C перпендикулярно BC, AC и AB пересекаются в одной точке X.
   (b) Докажите, что X, O, I лежат на одной прямой, причем $IO = OX$.

6. Докажите, что прямая, соединяющая проекции H на биссектрисы внутреннего и внешнего углов A делит отрезок BC пополам.

7. **(a)** В треугольнике ABC угол $\angle A$ равен 120°. Докажите, что $OH = BA + AC$.
   (b) Пусть T — точка внутри треугольника ABC такая, что стороны треугольника видны из нее под углами 120° *(точка Торричелли)*. Докажите, что прямая Эйлера треугольника BCT параллельна AT.
   (c) Докажите, что прямые Эйлера треугольников ABC, ABT, ACT, BCT пересекаются в одной точке.

source:geometry/euler-line-g10r2/more.tex

Гомотетия

1. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

2. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K, а её диагонали — в точке L. Докажите, что точки K, L, M и N, где M и N — середины оснований BC и AD, лежат на одной прямой.

3. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C движется по этой окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC.

4. Окружность S касается равных сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC в точках P и K, а также касается внутренним образом описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что середина отрезка PK является центром вписанной окружности треугольника ABC.

5. **(a)** Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D, DM — её диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K. Докажите, что $AK = DC$.
   (b) В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H, а также прямые MC и MD, пересекающие прямую AB в точках F и K. Докажите, что $EF = KH$.

6. Внутри угла A выбрана произвольная точка M. Постройте с помощью циркуля и линейки окружность, проходящую через M и касающуюся сторон угла A.

7. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K. Окружность S_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD (S_1 вторично пересекает диагональ AC на отрезке AK). Окружность S_2 проходит через точку K и касается прямых CB и CD (S_2 вторично пересекает диагональ AC на отрезке KC). Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей S_1 и S_2, будут параллельны между собой.

source:geometry/homothety-g10r2/basics.tex

Композиция гомотетий

1. *Лемма о трех колпаках.* Общие внешние касательные к парам окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 пересекаются в точках A, B и C соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

2. Из вершины A треугольника ABC проведён луч AM, лежащий внутри треугольника (M лежит на BC). Обозначим через γ_1, γ_2 вписанную и вневписанную окружности треугольника AMB соответственно (берется окружность, касающаяся стороны MB). Аналогично для треугольника ACM определены окружности ω_1, ω_2. Докажите, что общая внешняя касательная к окружностям γ_1 и ω_1, отличная от BC и общая внешняя касательная к окружностям γ_2 и ω_2, отличная от BC, пересекаются на прямой BC.

3. Пусть M_A, M_B, M_C — середины сторон треугольника ABC. Точки A', B', C' — суть точки касания:
(a) вписанных окружностей треугольников M_AM_BC, AM_BM_C и M_ABM_C со сторонами треугольника $M_AM_BM_C$;
(b) вписанной окружности треугольника $M_AM_BM_C$ с его сторонами.
Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

4. Внутри треугольника расположены окружности α, β, γ, δ одинакового радиуса, причем каждая из окружностей α, β, γ касается двух сторон треугольника и окружности δ. Докажите, что центр окружности δ принадлежит прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей данного треугольника.

5. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

6. В четырехугольнике $ABCD$ отметили точку P. В каждый из треугольников ABP, BCP, CDP, DAP вписали по окружности с центрами O_1, O_2, O_3, O_4 соответственно. Оказалось, что каждая из окружностей касается двух соседних. Докажите, что прямые O_1O_2, O_3O_4 и AC пересекаются в одной точке либо параллельны.

source:geometry/homothety-g10r2/composition.tex

Гомотетическая добавка

1. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, I' — центр вневписанной в угол C окружности; L и L' — точки, в которых сторона AB касается этих окружностей. Докажите, что прямые IL', LI' и высота CH треугольника ABC пересекаются в одной точке.

2. Ортоцентр треугольника ABC отразили симметрично относительно сторон его ортотреугольника, получили точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через B, пересекает первую окружность в точке C, а вторую в точке D; M — середина CD. Найдите ГМТ M.

4. Докажите, что любой выпуклый многоугольник Φ содержит два непересекающихся многоугольника Φ_1 и Φ_2, подобных Φ с коэффициентом $1/2$.

source:geometry/homothety-g10r2/more.tex

Поворотная гомотетия

1. **(a)** Пусть P — точка пересечения прямых AB и A_1B_1. Докажите, что если среди точек A, B, A_1, B_1 и P нет совпадающих, то общая точка описанных окружностей треугольников PAA_1 и PBB_1 является центром поворотной гомотетии, переводящей точку A в A_1, а точку B в B_1, причем такая поворотная гомотетия единственна.
(b) Докажите, что центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок BC, является точка пересечения окружности, проходящей через точку A и касающейся прямой BC в точке B, и окружности, проходящей через точку C и касающейся прямой AB в точке B.

2. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. При поворотной гомотетии с центром A, переводящей S_1 в S_2, точка M_1 окружности S_1 переходит в M_2. Докажите, что прямая M_1M_2 проходит через точку B.

3. **(a)** По лучам, имеющим общее начало, с постоянными неравными скоростями двигаются точки A и B. Докажите, что есть две точки плоскости, из под которых отрезок AB виден под постоянным углом.
(b) По двум неравным окружностям с равными угловыми скоростями двигаются точки A и B. Докажите, что существует точка P плоскости такая, что $\angle APB = \mathrm{const}$.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B, а хорды AM и AN касаются этих окружностей. Треугольник MAN достроен до параллелограмма $MANC$ и отрезки BN и MC разделены точками P и Q в равных отношениях. Докажите, что $\angle APQ = \angle ANC$.

5. Дана полуокружность с диаметром AB. Для каждой точки X этой полуокружности на луче XA откладывается точка Y так, что $XY = k \cdot XB$. Найдите ГМТ Y.

6. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC. Найдите сумму углов $\angle B_2A_1C_2$, $\angle C_2B_1A_2$ и $\angle A_2C_1B_2$.

7. Точка M выбрана на стороне BC так, что $MA = MC$. Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM, перпендикулярна биссектрисе угла AKB.

8. Постройте четырехугольник $ABCD$ по сумме $\angle B + \angle D$ и сторонам $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ и $d = DA$.

source:geometry/homothety-g10r2/rotational.tex

Геометрический разнобой

1. Дан треугольник ABC. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты соответственно точки C_1 и A_1 так, что $AC = A_1C = AC_1$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABA_1 и CBC_1 пересекаются на биссектрисе угла B.

2. Три окружности попарно пересекаются в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. Докажите, что $A_1B_2 \cdot B_1C_2 \cdot C_1A_2 = A_2B_1 \cdot B_2C_1 \cdot C_2A_1$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C — прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину K диагонали AC.

4. Даны четыре точки A, B, C, D. Известно, что любые две окружности, одна из которых проходит через A и B, а другая — через C и D, пересекаются. Докажите, что общие хорды всех таких пар окружностей проходят через одну точку.

5. Внутри четырехугольника $ABCD$ взята точка M так, что $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\angle CBM = \angle CDM$, то $\angle ACD = \angle BCM$.

source:geometry/mixture-g10r2.tex

Радикальные оси

Определение. Величина $OA^2 - r^2$ называется *степенью точки A* относительно окружности с радиусом r и центром O.

1.° **(a)** Докажите, что геометрическое место точек с равными степенями относительно двух неконцентрических окружностей есть прямая, перпендикулярная их линии центров. Эта прямая называется *радикальной осью* двух окружностей.
(b) Докажите, что радикальные оси трех окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке. Эта точка называется *радикальным центром* трёх окружностей.

2. **(a)** Докажите, что радикальная ось делит отрезок общей касательной двух окружностей пополам.
(b) В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках A и B, а другая — в точках C и D соответственно. Докажите, что прямая AD высекает на этих окружностях равные хорды.

3. Через вершину B остроугольного треугольника ABC проведено две окружности, которые касаются стороны AC в точках A и C и пересекаются вторично в точке M.
(a) Докажите, что M лежит на медиане треугольника, выходящей из вершины B.
(b) Докажите, что A, C, M и ортоцентр треугольника H лежат на одной окружности.

4. Внутри выпуклого многоугольника расположено несколько попарно непересекающихся кругов различных радиусов. Докажите, что многоугольник можно разрезать на маленькие многоугольники так, чтобы все они были выпуклыми и в каждом из них содержался ровно один из данных кругов.

5. **(a)** *Лемма Архимеда.* Окружность s_1 касается окружности s внутренним образом в точке N. Хорда AB окружности s касается окружности s_1 в точке M. Докажите, что MN делит дугу AB, не содержащую точку N, пополам.
(b) Окружности s_1 и s_2 касаются окружности s внутренним образом. Хорда AB окружности s является общей внешней касательной окружностей s_1 и s_2. Докажите, что их радикальная ось проходит через середину дуги AB.

6. AB — диаметр окружности ω, C — точка на ней же. Окружность с центром в точке C касается прямой AB в точке D и пересекает ω в точках E, F. Докажите, что отрезок EF точкой пересечения делит отрезок CD пополам.

7. На стороне BC треугольника ABC взята точка A'. Серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ пересекает сторону AB в точке M, а серединный перпендикуляр к отрезку $A'C$ пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что точка, симметричная точке A' относительно прямой MN, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

source:geometry/radical-axis-g10r2.tex

Двудольные графы и теорема Холла

Определение. Если вершины графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы никакое ребро не соединяло вершины одинакового цвета, такой граф называется *двудольным*.

1. Докажите, что граф двудольный тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

2. Какое наибольшее количество ребер может быть в двудольном графе на n вершинах?

3. На вечере ни один мальчик не танцевал со всеми девочками, а каждая девочка танцевала хотя бы с одним мальчиком. Докажите, что существует 2 мальчика и 2 девочки такие, что первый танцевал с первой, второй — со второй, а первый со второй и второй с первой не танцевали.

4. Вершины конечного графа как-то пронумеровали от 1 до n, затем на каждом ребре записали сумму номеров его концов, а номера в вершинах стерли. Докажите, что если граф не двудольный, то нумерация однозначно восстанавливается.

5. Леша записал в клетки шахматной доски числа $1, 2, \ldots, 64$ в неизвестном порядке. Он сообщил Юлию сумму чисел в каждом прямоугольнике из двух клеток и добавил, что 1 и 64 лежат на одной диагонали. Докажите, что по этой информации Юлий может точно определить, где какое число записано.

6. Пусть вершины графа — это узлы клетчатой бумаги, ребра — отрезки фиксированной длины L. Докажите, что получившийся граф двудольный.

7. Предположим, что в графе G через каждую вершину проходит не более n простых нечетных циклов. Тогда граф можно правильно раскрасить в $n+2$ цветов.

Теорема Холла

Рассматриваем двудольный граф $G = V \cup U$, где V и U — доли. Часто V будем называть *первой,* а U — *второй долей.* Множество всех ребер графа G обозначим традиционно E.

Определение. *Паросочетанием* называется набор ребер P, в котором никакие два ребра не имеют общих вершин. При этом мы будем писать, что вершина $v \in P$, если она смежна хотя бы одному ребру из P.

8. **Теорема Холла.**[1] Для любого $A \subseteq V$ определим $F(A)$ как множество всех вершин из второй доли, которые соединены хотя бы с одной вершиной из A:

$$F(A) = \{u \in U : \exists v \in A,\ vu \in E\}.$$

(a) Покажите, что если существует паросочетание, покрывающее все вершины доли V, то выполнено условие

$$\forall A \subseteq V \quad |F(A)| \geqslant |A|.$$

[1] Philip Hall

(b) Докажите, что если условие из предыдущего пункта выполнено, то тогда найдется паросочетание, полностью покрывающее V.

Замечание. Доли не равноправны, теорема не имеет «симметричный» характер!

9. *Теорема Холла.* Пусть имеется набор конечных множеств $S_1, S_2, \dots, S_n$. *Системой различных представителей* называется набор $x_1, x_2, \dots, x_n$, $x_i \in S_i$ такой, что $i \neq j \;\Rightarrow\; x_i \neq x_j$. Система различных представителей существует тогда и только тогда, когда

$$\forall k \geqslant 1 \ \forall i_1, \dots, i_k \quad |S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}| \geqslant k\ .$$

10. Докажите, что в регулярном двудольном графе есть паросочетание, покрывающее каждую вершину ровно один раз *(1-фактор)*.

Определение. *Латинским прямоугольником* называется числовой прямоугольник (таблица) $n \times m$, $n \geqslant m$, в который записаны числа $1, 2, \dots, n$, причем в любой строчке и любом столбце нет равных чисел.

11. Докажите, что латинский прямоугольник всегда можно дополнить до латинского квадрата.

12. В кубе $8 \times 8 \times 8$ несколько нижних слоев заполнены не бьющими друг друга ладьями. (Заполнены — это значит, что в каждом слое находится максимальное число ладьей — 8.) Докажите, что можно заполнить оставшиеся слои с сохранением того свойства, что ладьи не бьют друг друга.

13. Труппа из 16 человек играет пьесу, в которой 16 ролей. Один актер в каждом спектакле играет ровно одну роль, и роли у каждого актера не повторяются в одном сезоне. Труппа заканчивает сезон, когда нельзя подобрать роли актерам, удовлетворяющие этому требованию. Может ли труппа закончить сезон быстрее, чем за 16 спектаклей? *(ФЮМ, 1995г.)*

14. Квадратный лист бумаги разбит на сто многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на сто других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот квадрат можно проткнуть ста иголками так, что каждый из двухсот многоугольников проткнут по разу.

15. Докажите, что регулярный двудольный граф разбивается на 1-факторы.

source:combinatorics/graph/hall-theorem-g10r2.tex

Инварианты

1. На клетке a2 стоит белый конь, на клетке g8 черный конь. Ходят по очереди. На одном из ходов один из коней был съеден другим. Какой конь остался на доске?

2. У Буратино 100 круглых монет, 101 квадратная и 102 треугольная. В обменном пункте, организованном котом Базилио, можно обменять две монеты разной формы на монету третьей формы. После серии обменов у Буратино осталась одна монета. Какая?

3. На доске написано число, состоящее из 100 цифр 7. Каждую минуту последняя цифра числа запоминается, затем стирается и умноженная на 5 прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Может ли на доске оказаться число 99?

4. Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй 49, а в третьей 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

5. В трех левых нижних клетках доски 8×8 стоят ладьи. За один ход разрешается передвигать ладью по обычным правилам так, чтобы после каждого хода каждая из ладей была бы под защитой какой-нибудь другой ладьи. Может ли после некоторого хода каждая ладья оказаться в в клетке, симметричной исходной относительно диагонали a8–h1?

6. Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя из них разрешается проделывать следующее: если эти числа равны a и b, то их можно заменить на $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли с помощью таких операций получить тройку $(1-\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$ из тройки $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$?

7. На плоскости внутри квадрата 1×1 сидят n зайцев. Если $AA'BB'$ прямоугольник, то за один ход два зайца могут прыгнуть из точек A и B в точки A' и B'. Докажите, что никакие два зайца не удалятся друг от друга на расстояние, большее **(a)** n **(b)** $2\sqrt{n}$.

source:combinatorics/invariant-g10r2.tex

Полуинварианты

1. Если на доске написан квадратный трехчлен $x^2 + bx + c$, Петя может выбрать произвольное d и написать новый трехчлен $x^2 + (b + 2d)x + (c + bd)$. Может ли на доске после нескольких таких операций появиться трехчлен $x^2 - 2000x + 1\,000\,000$, если изначальный трехчлен имел свободный член -1?

2. В квадрате 10×10 покрашено 9 клеток. Каждый день закрашивают те клетки, у которых не менее двух соседних по стороне уже покрашены. Докажите, что полностью квадрат закрашен никогда не будет.

Остановите процесс

3. Дан граф — несколько городов, соединенных дорогами так, что из каждого города выходит нечетное число дорог. Некоторые из городов раскрашены в красный цвет, а некоторые — в белый. В городе может произойти революция, если большинство его соседей раскрашено не в тот же цвет, что он сам.
(a) Каждый день ровно в одном из городов происходит революция, и он меняет цвет на тот, в который раскрашено большинство его соседей. Докажите, что в конце концов революции прекратятся.
(b) Каждый день революция одновременно происходит во всех городах, в которых она может произойти, и они меняют цвет на тот, в который было раскрашено большинство их соседей. Докажите, что начиная с определенного момента любой город либо остановится на некотором цвете, либо будет менять цвет каждый ход.

4. На книжной полке каким-то образом расставлены тома полного собрания сочинений Васи Пупкина. Пьяный библиотекарь пытается расставить их по порядку.
(a) Для этого он берет два тома (не обязательно соседних), которые стоят относительно друг друга не по порядку (то есть больший номер раньше меньшего), и переставляет их местами.
(b) Для этого он берет какой-то том, стоящий не на своем месте, сдвигает несколько промежуточных томов, и ставит этот том на место.
Докажите, что в конце концов он расставит книги по порядку.

Запустите процесс

5. В парламенте у каждого парламентария есть не более трех врагов. Разделите парламент на две палаты так, чтобы у каждого парламентария было не более одного врага в его палате.

6. На плоскости даны n красных и n синих точек. Пронумеруйте точки каждого цвета числами от 1 до n так, чтобы отрезки, соединяющие точки с одинаковыми номерами, не пересекались.

7. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на три дуги так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше, чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

8. В парламенте некоторые депутаты залепили некоторым другим пощечины, причем каждый депутат залепил не более **(a)** одной **(b)** двух пощечин (пощечины не рефлексивны: если A ударил B, то, возможно, не наоборот). Докажите, что можно разбить парламент на **(a)** три **(b)** пять палат так, чтобы в каждой палате не было дерущихся пар депутатов.
Пункты этой задачи сдаются одновременно.

source:combinatorics/semi-invariant-g10r2/main.tex

Полуинварианты. Добавка

9. Дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Постройте несамопересекающуюся ломаную с узлами в этих точках.

10. В строчку выписаны n натуральных чисел. Разрешается взять любые два числа a и b такие, что a стоит левее b и b не кратно a, и заменить a на (a, b), b на $[a, b]$. Докажите, что такие операции не могут проводиться бесконечно много раз.

11. Есть куча из n камней. Разрешается заменять кучу на любое количество куч с меньшим количеством камней (возможно, различным в разных кучах). Докажите, что такие операции не могут проводиться бесконечно много раз.

12. На плоскости даны n точек и n попарно непараллельных прямых. Пронумеруйте точки и прямые числами от 1 до n так, чтобы отрезки перпендикуляров, опущенных из соответствующих точек на соответствующие прямые, соединяющие точки с одинаковыми номерами, не пересекались.

13. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое количество пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k-й и $(k + 1)$-й, приходят к выводу, что они мешают друг другу и переселяются соответственно в $(k - 1)$-ю и $(k + 2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.

source:combinatorics/semi-invariant-g10r2/more.tex

Таблички

0. Дана таблица размером 8×8, изображающая шахматную доску. За каждый шаг разрешается поменять местами любые два столбца или любые две строки. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы верхняя половина таблицы стала белой, а нижняя половина — черной?

0′. В угловой клетке таблицы 5×5 стоит плюс, а в остальных клетках стоят минусы. Разрешается в любой строке или любом столбце поменять знаки на противоположные. Можно ли за несколько таких операций получить все знаки плюсами?

1. В клетках таблицы $2N \times 2N$ некоторым образом расставлены плюсы и минусы. За ход можно изменить знак во всех клетках любого «креста», то есть объединения некоторых строки и столбца. Докажите, что за несколько ходов можно получить таблицу, во всех клетках которой стоят плюсы.

2. В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторой строки или некоторого столбца. Докажите, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, неотрицательны.

3. Во всех клетках шахматной доски 8×8 расставлены плюсы, за исключением одной не угловой клетки, где стоит минус. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках одной горизонтали, одной вертикали или одной диагонали (диагональ — линия по которой ходит шахматный слон). Докажите, что такими операциями невозможно получить доску с одними плюсами.

4. В каждой клетке таблицы $n \times n$ стоят минусы. За один ход можно поменять знаки в одной фигуре Z-тетрамино (то есть клетчатой фигуре, которая получается сдвигом, поворотом или отражением из объединения клеток a1, b1, b2, c2 шахматной доски). При каких n можно получить таблицу со всеми плюсами?

5. Шахматная доска 6×6 покрыта 18 костями домино 2×1. Докажите, что при любом таком покрытии можно разрезать доску на две части по горизонтальной или вертикальной линии, не повредив ни одной кости домино.

6. Можно ли расставить цифры 0, 1, 2 в клетках таблицы 100×100 таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике 3×4 клетки оказалось 3 нуля, 4 единицы и 5 двоек?

7. Какое наибольшее число дамок можно расставить на шашечной доске 8×8 так, чтобы каждая дамка билась хотя бы одной другой дамкой (по правилам игры в шашки)?

8. Какое наименьшее число фишек нужно поставить на поля шахматной доски размером **(a)** 8×8; **(b)** $n \times n$ для того, чтобы на каждой прямой, проходящей через центр произвольного поля и параллельной какой-либо стороне или диагонали доски, стояла хотя бы одна фишка?

Глава 4

Саблезубики (10-1)

Лемма об уточнении показателя

Определение. *Порядком вхождения* $\operatorname{ord}_p(n)$ будем обозначать степень, в которой простое число p входит в разложение n на простые множители.

Лемма об уточнении показателя[1]**.** Даны простое число p и натуральные числа k, a и b, причем $p \mid (a-b)$, $a \neq b$, a и b не делятся на p. Тогда если $p > 2$ или $\operatorname{ord}_p(a-b) > 1$, то $\operatorname{ord}_p(a^k - b^k) = \operatorname{ord}_p(a-b) + \operatorname{ord}_p(k)$.

Замечание. Иногда эту лемму называют *леммой Гензеля,* но это не совсем правильно: это другое утверждение, хотя и близкое по смыслу.

1. На какую максимальную степень пятерки делится число $3^{1000} - 2^{1000}$?
2. Сколькими нулями оканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?
3. При каких натуральных значениях n число $(2014^n - 1)$ делится на $(100^n - 1)$?
4. Пусть натуральные числа x, y, p, n и k таковы, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если число n $(n > 1)$ — нечетное, а число p — нечетное простое, то n является степенью числа p (с натуральным показателем).
5. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.
6. Докажите, что порядок числа 2 по модулю 3^n (т. е. наименьшее натуральное число d такое, что $2^d \equiv 1 \pmod{3^n}$) равен $\varphi(3^n)$.
7. Решите в натуральных числах уравнение $z^x + 1 = (z+1)^y$.
8. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Докажите, что лишь для конечного числа $n \in \mathbb{N}$ сумма $\left(a + 1/2\right)^n + \left(b + 1/2\right)^n$ — целая.

source:algebra/number-theory/lifting-exponent-g10r1.tex

[1] англ. lifting the exponent lemma

Производная многочлена

1. Докажите, что произвольный непостоянный многочлен с действительными коэффициентами начиная с некоторого момента монотонно возрастает или убывает.

2. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что все коэффициенты его n-й производной $P^{(n)}(x)$ делятся на $n!$ для любого натурального n.

3. Докажите, что многочлен $P(x)$ степени $n > 1$ имеет кратный корень тогда и только тогда, когда $P(x)$ и $P'(x)$ имеют общий корень.

4. Докажите, что многочлен

$$P(x) = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

5. У многочлена степени n имеется n действительных корней. Докажите, что их среднее арифметическое равно среднему арифметическому корней производной этого многочлена.

6. Четыре корня многочлена четвертой степени образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что корни его производной также образуют арифметическую прогрессию.

7. Исходно на доске написаны многочлены $x^2 - 4x$ и $x^3 - 3x^2 + 5$. Если на доске написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, то разрешается дописать на нее многочлены $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $\lambda f(x)$, где λ – произвольная константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться многочлен вида $x^n - 1$?

8. Пусть f и g – многочлены степени n. Докажите, что многочлен

$$fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + f''g^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n f^{(n)} g$$

является константой.

9. Можно ли из какой-либо точки плоскости провести к графику многочлена n-й степени более, чем n касательных?

10. Докажите, что при умножении многочлена $(x+1)^{n-1}$ на любой многочлен, отличный от нуля, получается многочлен, имеющий не менее n ненулевых коэффициентов.

11. У многочлена степени n имеется n различных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

source:algebra/polynomial/derivative-g10r1.tex

Многочлены

1. Существует ли многочлен, который в каждой положительной целой точке принимает значение, равное ее сумме цифр?

2. Многочлен $P(x)$ дает остаток 5 при делении на $(x-2)$ и остаток 7 при делении на $(x-3)$. Какой остаток многочлен $P(x)$ дает при делении на $(x-2)(x-3)$?

3. Многочлен степени 101 таков, что в каждой целой точке он принимает целое значение. Какое наименьшее количество целых чисел может быть среди его коэффициентов?

4. Существуют ли два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами такие, что множество значений рациональной функции $f(x) = P(x)/Q(x)$ есть промежуток $[\sqrt{2}; +\infty)$?

5. Многочлен $P(x)$ степени n таков, что

$$P(0) = 1\,,\; P(1) = 1/2\,,\; \dots,\; P(n) = 1/(n+1)\,.$$

Найдите $P(2n)$.

6. Даны взаимно простые многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что существует натуральное число C такое, что для любого целого n верно $(P(n), Q(n)) < C$.

7. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что существуют различные целые числа $x_1, \dots, x_n$ и многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$, для которых

$$P(x_1) = x_2\,,\; P(x_2) = x_3\,,\; \dots,\; P(x_n) = x_1\,.$$

8. Дан многочлен $P(x)$ с **(a)** натуральными **(b)** целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом. Докажите, что найдется бесконечно много натуральных чисел n_i, таких, что у всех чисел $P(n_i)$ одинаковая сумма цифр.

9. Найдите все многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ такие, что $P(Q(x)) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-35)$.

10. Пусть α и β — наибольшие действительные корни многочленов $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 15x + 9$ и $Q(x) = 12x^3 + 6x^2 - 7x + 1$ соответственно. Докажите, что $\alpha^2 + 3\beta^2 = 4$.

source:algebra/polynomial/mixture-g10r1.tex

Основания биссектрис

Дан треугольник ABC; O — центр описанной окружности; I — центр вписанной окружности; I_A, I_B и I_C — центры вневписанных окружностей; A_1, B_1 и C_1 — основания биссектрис; A_0, B_0 и C_0 — середины дуг BC, AC, AB.

1. Докажите, что B_1C_1 — радикальная ось описанной окружности треугольников ABC и I_BII_C.

2. Пусть D и E — точки пересечения прямой B_1C_1 с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника DIE в два раза больше радиуса описанной окружности треугольника ABC.

3. Докажите, что прямые B_1C_1 и OI_A перпендикулярны.

4. Докажите, что основания внешних биссектрис лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой OI.

5. Пусть K — основание внешней биссектрисы на прямой AC, B_0' — середина дуги AC, содержащая точку B. Докажите, что прямые KI и I_BB_0' перпендикулярны.

6. Пусть прямые B_1C_1 и B_0C_0 пересекаются в точке P_A. Докажите, что тогда P_AI параллельно BC, а P_AA является касательной к описанной окружности треугольника ABC.

7. Определим точки P_B и P_C аналогично. Докажите, что P_A, P_B и P_C лежат на одной прямой, которая параллельна прямой, проходящей через основания внешних биссектрис.

8. Пусть L — точка пересечения B_0C_1 и B_1C_0. Докажите, что прямая LI делит отрезок BC пополам.

9. Описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ высекает три отрезка на сторонах треугольника ABC. Докажите, что один из них равен сумме двух других.

source:geometry/bisector-foot-g10r1.tex

Комплексные координаты

Замечание. Во всех задачах точка A имеет координату a, B — координату b, Z_i — координату z_i.

1. *Основные факты.* Докажите.

(a) Точка B делит отрезок AC в отношении $p : q$. Тогда

$$b = a \cdot \frac{q}{p+q} + c \cdot \frac{p}{p+q}.$$

(b) Квадрат расстояния между точками Z_1 и Z_2 равен $(z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})$.

(c) Точки Z_1, Z_2, Z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}$ является действительным, т. е.

$$\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = \frac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{\overline{z_2} - \overline{z_3}}.$$

(d) Отрезки Z_1Z_2 и Z_3Z_4 перпендикулярны тогда и только тогда, когда число $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}$ является мнимым («чисто мнимым»), т. е.

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = -\frac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{\overline{z_3} - \overline{z_4}}.$$

Докажите также, что в случае, когда Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 лежат на единичной окружности, это эквивалентно $z_1z_2 + z_3z_4 = 0$.

(e) Докажите, что прямая, проходящая через точки A и B единичной окружности, задается уравнением $z + ab\overline{z} = a + b$.

(f) A, B — точки на единичной окружности, C — произвольная точка. Найдите координату основания высоты из вершины C треугольника ABC.

(g) Выразите через координаты вершин координату точки пересечения медиан треугольника ABC, вписанного в единичную окружность.

(h) Выразите через координаты вершин координату ортоцентра треугольника ABC, вписанного в единичную окружность.

(i) Даны точки A и B на единичной окружности. Выразите координаты точки пересечения касательных в точках A и B через их координаты.

2. Докажите, что в описанном четырехугольнике центр вписанной окружности лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

3. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABDE$ и $BCFG$. Докажите, что медиана BM треугольника ABC перпендикулярна DG.

4. На окружности даны шесть точек. Они произвольным образом разбиваются на две тройки, в первой тройке выбирается ортоцентр H_i, $i = 1, \ldots, 20$, а во второй

(a) точка пересечения высот M_i **(b)** точка пересечения медиан M_i.

Докажите, что все отрезки H_iM_i пересекаются в одной точке, и найдите отношение, в котором они делятся этой точкой.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Рассмотрим прямую Симсона точки A относительно треугольника BCD, прямую Симсона точки B относительно треугольника ACD и т. д. Докажите, что эти четыре прямые пересекаются в одной точке.

6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка P. Рассмотрим отрезки, соединяющие проекции точки P на прямые AB и CD, AC и BD, AD и BC. Докажите, что их середины лежат на одной прямой.

source:geometry/complex-coordinates-g10r1/main.tex

Ещё комплексные координаты

Определение. Двойным отношением четырех точек Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 назовем число

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

1. Докажите, что точки Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 лежат на одной прямой или окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение является действительным числом.

2. Прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром в O. Точка M на стороне AD такова, что $AM/MD = 2$. Луч CM пересекает ω в точке P. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника OPD лежит на описанной окружности треугольника OCD.

3. Основание каждой высоты треугольника спроецировали на две прилежащие стороны треугольника. Докажите, что шесть полученных точек лежат на одной окружности.

source:geometry/complex-coordinates-g10r1/more.tex

Геометрические решения — зло!

1. **(a)** В треугольнике ABC прямая AS симметрична медиане AM относительно биссектрисы угла A, $S \in BC$. Докажите, что $BS : SC = AB^2 : AC^2$.
   (b) Касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке P. Докажите, что AP симметрична медиане AM относительно биссектрисы угла A.
   (c) Окружность ω_1 проходит через вершины A и B и касается прямой AC, окружность ω_2 проходит через вершины A и C и касается прямой AB. Докажите, что общая хорда этих двух окружностей является симедианой треугольника ABC.

2. **Тригонометрические теоремы Чевы и Менелая.** Даны точки A_1, B_1, C_1 на прямых BC, AC, AB. Тогда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (либо параллельны) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}=1\,;$$

   Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда это же выражение равно -1 (все углы ориентированные).

3. Докажите, что точки пересечения серединных перпендикуляров к биссектрисам с прямыми, содержащими соответствующие стороны, лежат на одной прямой.

4. Вписанная окружность касается сторон AB, BC, AC треугольника ABC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Внутри треугольника ABC взята точка X. Прямые AX, BX, CX пересекают дуги B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

5. A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC, P и Q — точки пересечения прямых AA_1 и B_1C_1, CC_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

6. Точки O и H — ортоцентр и центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC; X, Y, Z — точки на стороне AC такие, что $HZ \parallel OX \parallel AB$, $AX = CY$. Докажите, что $ZY = YH$.

7. В треугольнике ABC через точку X биссектрисы BB_1 угла B проведена прямая l, параллельная AC. Она пересекает сторону AB в точке Y. Прямые B_1Y и CX пересекаются в точке Z. Докажите, что ZB касается описанной окружности треугольника ABC.

8. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке I; A_1, B_1, C_1 — точки касания с соответствующими сторонами; M — середина AC. Докажите, что прямые A_1C_1, BM, IB_1 пересекаются в одной точке.

Ориентированные углы

Определение. Ориентированным углом $\angle(l_1, l_2)$ между прямыми l_1 и l_2 называется такой угол, на который нужно против часовой стрелки повернуть прямую l_2, чтобы она стала параллельна l_1. Углы, отличающиеся на $n \cdot 180°$, считаются равными.

Упражнения.

(a) $\angle(l_1, l_2) + \angle(l_2, l_1) = 0$. **(b)** $\angle(l_1, l_2) + \angle(l_2, l_3) = \angle(l_1, l_3)$.

(c) $\angle(l_1, l_2) = \angle(l_1, l_3) \iff l_2 \parallel l_3$.

(d) $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC) \iff$ точки A, B, C, D лежат на одной окружности или прямой.

1. Две окружности пересекаются в точках X и Y. Через точки X и Y проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, а вторую в точках B и D. Докажите, что $AC \parallel BD$.

2. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, AC, AB соответственно. Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, пересекаются в одной точке.

3. В треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что основания перпендикуляров из точки C_1 на прямые AA_1, BB_1, AC, BC лежат на одной прямой.

4. *Обобщенная прямая Симсона.* Из точки P на описанной окружности треугольника ABC провели прямые l_A, l_B, l_C такие, что $\angle(l_A, BC) = \angle(l_B, CA) = \angle(l_C, AB)$. Докажите, что точки пересечения прямых l_A и BC, l_B и AC, l_C и AB лежат на одной прямой.

5. **(a)** *Точка Микеля.* Даны четыре прямые общего положения. Докажите, что описанные окружности четырех образовавшихся треугольников пересекаются в одной точке.
(b) Докажите, что точка Микеля и центры окружностей лежат на одной окружности.

6. Докажите, что в четырехугольнике $ABCD$ окружности Эйлера треугольников ABC, ABD, ACD, BCD пересекаются в одной точке.

7. Стороны выпуклого пятиугольника продлены до пересечения так, что образовалась пятиконечная звезда. Вокруг каждого из треугольников этой звезды, примыкающего к одной из сторон исходного пятиугольника, описана окружность. Докажите, что точки пересечения соседних окружностей, отличные от вершин пятиугольника, лежат на одной окружности.

`source:geometry/signed-angles-g10r1.tex`

Графы — 1: n-связность (теорема Менгера)

Определение. Пусть s и t — две различные вершины связного графа G. Две простых пути, соединяющих s и t, называются *непересекающимися* (или *вершинно непересекающимися*), если у них нет общих вершин, отличных от s и t (и, следовательно, нет общих ребер), и *реберно непересекающимися*, если у них нет общих ребер. Множество W вершин, ребер или вершин и ребер *разделяет* s и t, если s и t принадлежат различным компонентам связности графа $(G - W)$.

Замечание. Ясно, что не бывает множеств вершин, разделяющих две смежные вершины. Кроме того, очевидно, что вершин в любом разделяющем s и t наборе не меньше, чем путей в любом наборе непересекающихся $s{-}t$ путей.

Теорема Менгера

Теорема Менгера (1927 год). Наименьшее число вершин, разделяющих две несмежные вершины s и t, равно наибольшему числу непересекающихся простых $s{-}t$ путей.

Доказательство теоремы Менгера (Дирак, 1966 год).

1. Докажите теорему Менгера для пар вершин s и t, которые разделяются одной вершиной w.

Предположим, что теорема неверна. Тогда среди всех графов G и пар вершин $s, t \in G$ найдется тот, который *последовательно* удовлетворяет трем условиям минимальности:
(1) наименьшее число вершин, разделяющих s и t, минимально (обозначим его h);
(2) число вершин в графе G наименьшее среди всех графов, для которых теорема Менгера неверна и которые удовлетворяют предыдущему пункту;
(3) множество ребер в G обладает тем свойством, что удаление любого несмежного ни с s, ни с t ребра ведет к уменьшению минимального числа вершин, разделяющих s и t.

Из последнего условия минимальности следует, что для любого ребра x можно определить множество вершин $S(x)$, содержащее не более $(h-1)$ элемента и разделяющего s и t в графе $(G - x)$.

2. Докажите, что для произвольного ребра $x = uv$ в графе G множество $S(x) \cup \{u\}$, равно как и множество $S(x) \cup \{v\}$, разделяет s и t; в частности, x содержится в некотором $s{-}t$ пути.

3. Докажите, что в графе G нет вершин w, смежных и с s, и с t.

Пусть W — произвольный набор h вершин, разделяющих s и t.

4. Докажите, что любой $s{-}t$ путь содержит какую-нибудь вершину из W.

Осмысленно рассмотреть для любого $s{-}t$ пути момент его входа в множество W и момент его выхода оттуда. Поэтому назовем пути от s до $w \in W$, не содержащие вершин из W (кроме

w), *s—W путями*, и, аналогично, w—t пути ($w \in W$), «напрямую» (т. е. не проходя через другие вершины W) соединяющие W с t, назовем *W—t путями.*

5. Докажите, что никакой s—W путь ни с каким W—t путем не может иметь общих вершин, не принадлежащих W.

6. Докажите, что любая вершина $w \in W$ содержится и в некотором s—W пути, и в некотором W—t пути.

7. Докажите, что либо все s—W пути состоят из одного ребра каждый, либо все W—t пути состоят из одного ребра каждый; иными словами, любое разделяющее s и t множество смежно хотя бы с одной из вершин s и t.

8. Завершите доказательство теоремы Менгера.
Указание. Пусть $su_1u_2 \dots t$ — кратчайший s—t путь в G. Положим $x = u_1u_2$. Что можно сказать о $S(x) \cup \{u_1\}$ и $S(x) \cup \{u_2\}$?

Задачи

9. Докажите, что теорема Менгера равносильна такой теореме:

> Для любых двух непересекающихся непустых множеств вершин V_1 и V_2, таких что никакая $v_1 \in V_1$ не смежна ни с какой $v_2 \in V_2$, наибольшее число непересекающихся путей, соединяющих V_1 и V_2, равно наименьшему числу вершин, разделяющих V_1 и V_2.

(Два простых пути, соединяющих V_1 и V_2, называются *непересекающимися,* если они не имеют общих вершин, отличных от концевых вершин.)

10. Между зажимами A и B включено несколько сопротивлений. Каждое сопротивление имеет входной и выходной зажимы. Какое наименьшее число сопротивлений необходимо иметь и какова может быть схема их соединения, чтобы при порче любых 9 сопротивлений цепь оставалось соединяющей зажимы A и B, но не было короткого замыкания? (Порча сопротивления — это либо короткое замыкание, либо обрыв.) *(Мосгор 1958 г.)*

11. В некотором городе для любых трех перекрестков A, B и C есть путь, ведущий из A в B и не проходящий через C. Докажите, что с любого перекрестка на любой другой ведут по крайней мере два непересекающихся пути (перекресток — место, где сходятся по крайней мере две улицы; в городе не меньше двух перекрестков). *(Всерос 1966г.)*

Определение. Связный граф G называется *n–связным*, если…
(1) …он остается связным при выкидывании любых $(n-1)$ вершин.
(2) …любые две вершины соединяются хотя бы n непересекающимися путями.

12. Докажите эквивалентность двух определений n–связности.

13. *Теорема Дирака.* Граф, имеющий не менее $2n$ вершин, n–связен тогда и только тогда, когда для любых двух непересекающихся множеств V_1 и V_2, в каждом из которых по n вершин, существует n соединяющих их непересекающихся путей (имеющих, в частности, разные концы).

14. *Теорема Форда–Фалкерсона (1955 год).* Наименьшее число ребер, разделяющих две несмежные вершины s и t, равно наибольшему числу реберно непересекающихся простых s—t путей.

source:combinatorics/graph/min-and-max-theorems/menger.tex

Графы — 2: паросочетания (теоремы Кенига, Холла)

Рассматриваем двудольный граф $G = V \cup U$, где V и U — доли. Часто V будем называть *первой*, а U — *второй долей.* Множество всех ребер графа G обозначим традиционно E.

Определение. *Паросочетанием* называется набор ребер P, в котором никакие два ребра не имеют общих вершин. При этом мы будем писать, что вершина $v \in P$, если она смежна хотя бы одному ребру из P. *Вершинным покрытием* называется такой набор вершин, что любое ребро смежно хотя бы одной вершине из этого набора.

1. **Теорема Кенига.**[2] Если α_1 — количество ребер в наибольшем паросочетании, а β_0 — количество вершин в наименьшем вершинном покрытии, то $\alpha_1 = \beta_0$.

2. *Теорема Кенига.* В обществе из женихов и невест нельзя образовать $n+1$ брак по любви. Докажите, что можно выбрать n человек так, чтобы из любой пары влюбленных был кто-то выбран.

3. *Теорема Кенига-Эгервари.* На бесконечной клетчатой доске стоят ладьи. *Линией* называется строка или столбец. Оказалось, что N — минимальное число линий, содержащих все ладьи. Докажите, что можно выбрать N ладей, не бьющих друг друга.

4. **Теорема Холла.**[3] Для любого $A \subseteq V$ определим $F(A)$ как множество всех вершин из второй доли, которые соединены хотя бы с одной вершиной из A:

$$F(A) = \{u \in U : \exists v \in A,\ vu \in E\}.$$

(a) Покажите, что если существует паросочетание, покрывающее все вершины доли V, то выполнено условие

$$\forall A \subseteq V \quad |F(A)| \geqslant |A|.$$

(b) Докажите, что если условие из предыдущего пункта выполнено, то тогда найдется паросочетание, полностью покрывающее V.

Замечание. Доли не равноправны, теорема не имеет «симметричный» характер!

5. *Теорема Холла.* Пусть имеется набор конечных множеств $S_1, S_2, \ldots, S_n$. *Системой различных представителей* называется набор $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_i \in S_i$ такой, что $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$. Система различных представителей существует тогда и только тогда, когда

$$\forall k \geqslant 1\ \forall i_1, \ldots, i_k \quad |S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k}| \geqslant k.$$

Определение. *Латинским прямоугольником* называется числовой прямоугольник (таблица) $n \times m$, $n \geqslant m$, в который записаны числа $1, 2, \ldots, n$, причем в любой строчке и любом столбце нет равных чисел.

[2] Dénes Kőnig
[3] Philip Hall

6. Докажите, что латинский прямоугольник всегда можно дополнить до латинского квадрата.

7. В кубе $8 \times 8 \times 8$ несколько нижних слоев заполнены не бьющими друг друга ладьями. (Заполнены — это значит, что в каждом слое находится максимальное число ладьей — 8.) Докажите, что можно заполнить оставшиеся слои с сохранением того свойства, что ладьи не бьют друг друга.

8. Труппа из 16 человек играет пьесу, в которой 16 ролей. Один актер в каждом спектакле играет ровно одну роль, и роли у каждого актера не повторяются в одном сезоне. Труппа заканчивает сезон, когда нельзя подобрать роли актерам, удовлетворяющие этому требованию. Может ли труппа закончить сезон быстрее, чем за 16 спектаклей? *(ФЮМ, 1995г.)*

9. Квадратный лист бумаги разбит на сто многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на сто других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот квадрат можно проткнуть ста иголками так, что каждый из двухсот многоугольников проткнут по разу.

10. Докажите, что в регулярном двудольном графе есть паросочетание, покрывающее каждую вершину ровно один раз *(1-фактор)*.

11. Докажите, что регулярный двудольный граф разбивается на 1-факторы.

12. *Теорема Петерсена.* Дан регулярный граф четной степени.
(a) Докажите, что в таком графе есть цикл, проходящий по всем ребрам ровно по одному разу. Далее ориентируем граф так, чтобы этот цикл был ориентированным.
(b) «Раздвоим» каждую вершину на «вершину для входа ребер» и «вершину для выхода ребер». Докажите, что в получившемся двудольном графе есть 1-фактор.
(c) Докажите, что все вершины можно покрыть несколькими непересекающимися циклами (т. е. можно выделить *2-фактор*).

13. Есть юноши и девушки. Каждый юноша знаком с некоторыми девушками. Рассмотрим какое-нибудь множество из k юношей. Пусть количество девушек которые знают хотя бы одного из этих юношей — k_1, а количество девушек которые знают хотя бы двух из них — k_2. Назовем это множество *хорошим*, если $k_1 + k_2 \geqslant 2k$. Докажите, что если любое множество юношей хорошее, то каждому юноше можно найти знакомую жену и знакомую любовницу (они должны быть разными), так что каждая девушка не более чем для одного — жена и не более чем для одного — любовница.

14. Дано множество мощности $(2k + 1)$. Пусть X — набор всех его k–элементных подмножеств. Докажите, что есть биекция $f\colon X \to X$, такая, что
$$\forall y \in X \quad y \cap f(y) = \emptyset\,.$$

15. Есть n юношей и $2n - 1$ девушка. Каждому юноше нравятся некоторые девушки. Докажите, что каждому юноше можно найти жену так, что или она ему нравится, или ему не нравится ни одна из чужих жен.

16. Докажите, что из 52 натуральных чисел, не превосходящих 100, можно выбрать 6 чисел, любая пара из которых отличается в обоих разрядах.

source:combinatorics/graph/min-and-max-theorems/konig-and-hall.tex

Графы — 3: упорядоченные множества (теорема Дилуорса)

1. Из любых ли **(a)** девяти **(b)** десяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать четыре, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания? (Обобщение этой задачи на $mn+1$ чисел — выбираем $m+1$ либо $n+1$ — назвается теоремой Э́рдёша — Се́кереша.)

2. На прямой даны 50 отрезков. Докажите, что если среди них нельзя найти 8 отрезков, каждые два из которых имеют общую точку, то среди данных 50 отрезков можно найти 8 отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

Определение. *Частично упорядоченное* (или просто *упорядоченное*) множество M — это множество, для любых двух элементов a и b которого известно, находятся они в некотором отношении $\prec$ или нет. При этом должны быть выполнены следующие свойства:
(1) $c \prec c$ *(рефлексивность)*;
(2) если $a \prec b$ и $b \prec a$, то обязательно $a = b$ *(антисимметричность)*;
(3) если $a \prec b$ и $b \prec c$, то $a \prec c$ *(транзитивность)*.

3. Докажите, что в частично упорядоченном множестве из $mn + 1$ элементов есть либо *цепь* (множество, все элементы которого сравнимы) из идущих в порядке возрастания или убывания $m+1$ элементов, либо $n+1$ попарно несравнимых элементов *(антицепь).*

4. **Теорема Мирского, 1971г.** Обозначим через d наибольшее количество элементов цепи данного конечного частично упорядоченного множества M. Тогда M можно разбить на d антицепей.

5. Король сказочной страны пригласил на пир всех людоедов своей страны. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. Известно, что наидлиннейшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй — третьего и так далее, состоит из n людоедов. Докажите, что король может так рассадить людоедов за n столов, что ни за каким столом никто не будет хотеть съесть никого из сидящих за тем же столом.

6. **Теорема Дилуорса,[4] 1950г.** Наименьшее количество цепей, которые покрывают данное конечное частично упорядоченное множество M, равно наибольшему количеству попарно несравнимых элементов (т. е. наибольшей антицепи).

   Воспользуйтесь теоремой Кенига для двудольного графа, обе доли которого совпадают с M, а ребра… догадайтесь :)

7. Даны несколько различных натуральных чисел. Пусть среди любых n из них можно выбрать два так, что одно делится на другое. Докажите, что все числа можно покрасить в $(n-1)$ цветов так, чтобы из любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.

`source:combinatorics/graph/min-and-max-theorems/dilworth.tex`

[4] Robert P. Dilworth

Графы — 4: практикум (минимаксные теоремы)

1. Докажите лемму Холла индукцией по количеству вершин.

2. Даны натуральные числа $k \leqslant m < n$. В графе G степени всех вершин не менее m и не более n. Докажите, что можно выкинуть несколько ребер, чтобы степени стали не менее $m - k$ и не более $n - k$.

3. В летний лагерь приехало некоторое количество школьников, причем каждый имеет от 50 до 100 знакомых среди остальных. Докажите, что вожатый Гриша сможет раздать им шапочки 1331 цветов так, чтобы у каждого школьника среди его знакомых было не менее 20 различных цветов.

4. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

5. Ваня выписал на доску все натуральные делители числа 120, после чего стер некоторые из них. Оказалось, что среди оставшихся чисел нет двух таких, что одно делится на другое. Какое наибольшее число чисел могло остаться на доске?

6. У Вовы есть набор из всевозможных карточек, на каждой из которых написано несколько различных натуральных чисел от 1 до 100.
(a) Сколько всего карточек у Вовы?
(b) Вова разложил все свои карточки на несколько кучек так, что среди карточек одной кучки нет двух таких, что все числа одной карточки встречаются на другой. Какое наименьшее число кучек у него могло получиться?
(c) Какое наибольшее число карточек могло быть у Вовы в одной кучке?

7. Дан 1001 прямоугольник с натуральными сторонами не больше 1000. Докажите, что можно выбрать три из них A, B и C такие, что A можно поместить в B, а B можно поместить в C.

source:combinatorics/graph/min-and-max-theorems/mixture.tex

Глава 5

Бобры (11-2)

Биномиальные коэффициенты в теории чисел

Считаем, что $C_n^k = 0$ при $n < k$.

1. Пусть n — натуральное нечетное число. Докажите, что среди чисел

$$\{C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{\frac{n-1}{2}}\}$$

нечетное число нечетных чисел.

2. Пусть p — простое. Докажите, что для любых натуральных n и k число $C_{p^n}^k$ делится на p.

3. Пусть m, n — натуральные числа, $1 \leqslant m \leqslant n$. Докажите, что m является делителем числа

$$n(C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^{m-1}C_n^{m-1}).$$

4. *Биномиальная система счисления.* Пусть k — некоторое натуральное число. Докажите, что любое натуральное число n можно единственным образом представить в виде:

$$n = C_{a_1}^1 + C_{a_2}^2 + \dots + C_{a_k}^k,$$

где $0 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k$.

5. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 3$ верно неравенство

$$\text{НОК}(1, 2, \dots, n) > 2^{n-1}.$$

6. Докажите, что для любого натурального числа n сумма

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k}$$

не делится на 5.

source:algebra/number-theory/binomial-g11r2.tex

Теория чисел

1. Для каждого натурального n найдите наибольший общий делитель чисел $n!+1$ и $(n+1)!$.
2. Дано натуральное число n. Докажите, что существует число, состоящее только из нулей и единиц, делящееся на n.
3. a и b – различные натуральные числа такие, что $ab(a+b)$ делится на a^2+ab+b^2. Докажите, что $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.
4. Через $S(n)$ обозначим сумму цифр числа n. Докажите, что не существует натурального N такого, что для любого $n > N$ выполнялось бы неравенство $S(2^n) \leqslant S(2^{n+1})$.
5. Докажите, что при любом натуральном n число 2^n-1 не делится на n.
6. Докажите, что при любом простом нечетном p число $p^{p+1}+(p+1)^p$ не является полным квадратом.

source:algebra/number-theory/mixture-g11/r2.tex

Решётки

Бесполезные определения. Множество G векторов на прямой / в плоскости / в пространстве будем называть *группой,* если оно содержит нулевой вектор и замкнуто относительно операций сложения векторов и взятия противоположного вектора. Если кто не понял, имеется ввиду, что если $x \in G$ и $y \in G$, то тогда $0 \in G$, $x + y \in G$ и $-x \in G$. Подмножество группы, само являющееся группой, будем называть *подгруппой.*

1. В трех вершинах квадрата сидят кузнечики. Каждый год один из кузнечиков перепрыгивает через одного из других (т. е. отражается центрально-симметрично). В конце они вновь оказываются в каких-то трех вершинах исходного квадрата. Докажите, что каждый кузнечик сидит в своей стартовой вершине.

2. На плоскости расположена фигура площади больше 1 (фигура — это объединение конечного числа многоугольников). Докажите, что в ней можно отметить две различные точки так, чтобы вектор, их соединяющий, имел целые координаты.

3. *Целые гауссовы числа* — комплексные числа вида $a + bi$, где a, b — целые. Докажите, что если z и w целые гауссовы, $w \neq 0$, то существуют целые гауссовы s, r такие, что $z = ws+r$ и $|r| < |w|$. Таким образом целые гауссовы числа можно делить друг на друга с остатком. Такие r и w не обязательно определены однозначно.

4. Два вектора с целыми координатами таковы, что все целые точки плоскости можно выразить их целочисленными линейными комбинациями. Докажите, что площадь параллелограмма, натянутого на эти два вектора, равна 1.

5. Кузнечики живут ровно по 100 лет. Каждый кузнечик рождается ровно в момент начала какого-то года. В какой-то момент появился первый кузнечик, в какой-то момент умрет последний. За всю историю случилось нечетное число кузнечиков. Докажите, что существует по крайней мере 100 лет (возможно, не подряд), когда существовало нечетное число кузнечиков.

6. Внутри правильного треугольника расположена точка. Ее поотражали несколько раз относительно прямых, содержащих стороны, и она опять попала внутрь треугольника. Докажите, что она вернулась на исходное место.

7. На плоскости отмечены некоторые целые точки. В любом круге радиуса 2014 хотя бы одна есть. Докажите, что существуют четыре отмеченные точки, лежащие на одной окружности.

Ещё бесполезное определение. *Дискретная* группа векторов — это когда в некотором шарике с центром в начале координат нет концов векторов, кроме нулевого (все векторы торчат из начала координат).

8. *(Теорема о решетках)* **(a)** На прямой; **(b)** на плоскости; **(c)** в пространстве дана дискретная группа векторов (смотри бесполезные определения). Докажите, что можно выбрать несколько векторов (не больше чем размерность пространства, возможно нуль), что любой элемент группы представляется как целочисленная линейная комбинация выбранных, причем единственным образом.

Дискретная группа векторов в пространстве называется *решеткой.* Задача 8 объясняет, почему именно. Набор векторов, который мы в ней строим, называется *базисом решетки.* Задача 4 говорит, что если в решетке выбраны два базиса, то площади параллелограммов, натянутых на эти базисы, равны.

source:algebra/grid/main.tex

Ещё две задачки

1. Рассмотрим на плоскости множество точек с вещественными координатами (x, y) таких, что неравенство

$$mx + ny \geqslant \frac{m^2 + n^2}{2}$$

имеет ровно 2014 целых решений (m, n). Найдите площадь этого множества.

2. Через точки с целыми координатами в пространстве провели все плоскости, параллельные координатным. Пространство разбилось на кубики. a, b, c — натуральные числа, взаимно простые в совокупности. Кубики высекают на плоскости $ax + by + cz = 0$ многоугольники. Многоугольники на плоскости называются *эквивалентными,* если они получаются друг из друга параллельным переносом. Докажите, что число классов эквивалентности не превосходит $a + b + c$.

source:algebra/grid/more.tex

Разнобой

1. В треугольнике ABC проведены чевианы AB_1, AC_1, симметричные относительно биссектрисы угла A. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABB_1, ABC_1, ACB_1, ACC_1 лежат на одной окружности.

2. Точки B', C' симметричны вершинам B, C треугольника ABC относительно сторон AC, AB соответственно. Описанные окружности треугольников ABB' и ACC' пересекаются в точке D. Докажите, что AD проходит через центр описанной окружности треугольника.

3. На высотах BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC отмечены точки B_2, C_2, так что $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

4. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. E, F, K, M — соответственно середины отрезков AB, CD, AD, AK. Оказалось, что AF, BK, DE, CM пересекаются в одной точке X. Докажите, что площадь четырехугольника $BCFX$ равна половине площади $ABCD$.

5. Треугольник ABC лежит внутри окружности ω. В криволинейный треугольник, образованный продолжениями сторон AB, AC за точку A и дугой ω, вписана окружность, касающаяся ω в точке A_1. Аналогично определяются B_1, C_1. Докажите, что AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

6. На продолжении стороны BC отмечены точки P и Q, такие что $AP = AQ = p$, где p — полупериметр треугольника. Докажите, что описанная окружность треугольника APQ касается вневписанной.

source:geometry/mixture-g11r2.tex

Ориентированные углы

1. ABC — треугольник. Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, CA, AB, то окружности A_1CB_1, B_1AC_1, C_1BA_1 имеют общую точку.

2. Четыре окружности пересекают друг друга по циклу (т. е. первая вторую, вторая третью, третья четвертую, четвертая первую) в четырех парах точек. Известно, что из этих четырех пар можно выбрать по одной точке, так чтобы они лежали на одной окружности или прямой. Докажите, что оставшиеся четыре точки тоже лежат на одной окружности или прямой.

3. Из основания высоты треугольника опустили перпендикуляры на его стороны и высоты. Докажите, что основания опущенных перпендикуляров лежат на одной прямой.

4. *(Обобщённая теорема Симсона)* Из точки P на описанной окружности треугольника ABC провели прямые l_a, l_b, l_c такие, что $\angle(l_a, BC) \equiv \angle(l_b, CA) \equiv \angle(l_c, AB)$. Докажите, что точки пересечения l_a и BC, l_b и CA, l_c и AB лежат на одной прямой. (Если равные углы из условия прямые, то эта прямая называется прямой Симсона)

5. Точку на описанной окружности треугольника ABC отразили симметрично относительно его сторон. Докажите, что три полученные таким образом точки лежат на одной прямой, проходящей через ортоцентр треугольника ABC.

6. *(Точка Микеля)* Даны четыре прямые общего положения. Вокруг треугольников, образованных всевозможными тройками прямых, описаны окружности. Докажите, что они имеют общую точку.

7. Даны два неколлинеарных направленных отрезка. Докажите, что существует поворотная гомотетия (т. е. композиция гомотетии и поворота с одним и тем же центром), переводящая один отрезок в другой. Как построить ее центр?

8. Стороны выпуклого пятиугольника продолжены до пересечения так, что образовалась пятиконечная звезда (пентаграмма). Вокруг каждого из лучей этой звезды, т. е. треугольника, примыкающего к одной из сторон пятиугольника, описана окружность. Докажите, что точки пересечения соседних окружностей, отличные от вершин пятиугольника, лежат на одной окружности.

source:geometry/signed-angles-g11r2.tex

Стереометрия

1. Тетраэдр называется ортоцентрическим, если его высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Докажите, что ортоцентрическом тетраэдре общие перпендикуляры каждой пары противоположных ребер пересекаются в одной точке.

2. В четырехугольную пирамиду $ABCDS$, основанием которой является параллелограмм $ABCD$, вписана сфера. Докажите, что сумма площадей треугольников ABS и CDS равна сумме площадей треугольников BCS и ADS.

3. Докажите, что если у тетраэдра два отрезка, идущие из концов некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, пересекаются, то отрезки, выпущенные из концов скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей двух других граней, также пересекаются.

4. В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах CD, BD, BC пополам. Докажите, что плоскость $(B'C'D')$ параллельна плоскости (BCD).

5. Высота четырехугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения диагоналей её основания $ABCD$. Из вершин основания опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA и SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 проходят через одну точку.

6. Сфера ω проходит через вершину S пирамиды $SABC$ и пересекает ребра SA, SB и SC вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Сфера Ω, описанная около пирамиды $SABC$, пересекается с ω по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости (ABC). Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин ребер SA, SB и SC соответственно. Докажите, что точки A, B, C, A_2, B_2 и C_2 лежат на одной сфере.

7. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке P, и SP является высотой пирамиды. Докажите, что проекции точки P на боковые грани пирамиды лежат на одной окружности.

8. Плоскость α пересекает ребра AB, BC, CD и DA треугольной пирамиды $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Оказалось, что двугранные углы $\angle(KLA, KLM)$, $\angle(LMB, LMN)$, $\angle(MNC, MNK)$ и $\angle(NKD, NKL)$ равны. Докажите, что проекции вершин A, B, C и D на плоскость α лежат на одной окружности.

9. На ребрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах с общей вершиной, проведена плоскость. Докажите, что если три из четырех проведенных плоскостей касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвертая плоскость также его касается.

Касательные к сферам

1. В четрырехгранный угол вписана сфера. Докажите, что суммы его противоположных плоских углов равны.

2. Дана плоскость и две точки A и B, лежащие по одну сторону от нее. Рассматриваются всевозможные сферы, проходящие через A и B, и касающиеся данной плоскости. Найдите ГМТ точек касания.

3. Докажите, что на ребрах тетраэдра можно написать по положительному числу так, чтобы сумма чисел, записанных на ребрах каждой грани, равнялась бы площади этой грани.

4. Стороны треугольника равны a, b, c. Три шара попарно касаются друг друга внешним образом и плоскости треугольника в его вершинах. Найдите радиусы шаров.

5. Около сферы описан пространственный четырехугольник. Докажите, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.

6. Дан тетраэдр $ABCD$. Сфера, проходящая через точки A, B и C пересекает ребра DA, DB и DC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точки A_1, B_1 и C_1 отразили относительно середин соответствующих ребер, на которых они лежат, и получили точки A_2, B_2 и C_2. Докажите, что центр сферы, описанной около тетраэдра $DA_2B_2C_2$, равноудален от точек A, B и C.

7. Точка O — основание высоты четырехугольной пирамиды. Сфера с центром O касается всех боковых граней пирамиды. Точки A, B, C и D взяты последовательно по одной на боковых ребрах пирамиды так, что отрезки AB, BC и CD проходят через три точки касания сферы с гранями. Докажите, что отрезок AD проходит через четвертую точку касания.

8. Сферы S_1, S_2 и S_3 касаются друг друга внешним образом и некоторой плоскости в точках A, B и C. Сфера S касается сфер S_1, S_2 и S_3 внешним образом и данной плоскости в точке D. Докажите, что проекции точки D на стороны треугольника ABC являются вершинами правильного треугольника.

9. Дан тетраэдр $ABCD$. Вписанная в него сфера S касается грани ABC в точке T. Сфера S' касается грани ABC в точке T', а также продолжений граней ABD, BCD и CAD. Докажите, что прямые AT и AT' симметричны относительно биссектрисы угла BAC.

10. Сфера вписана в четырехугольную пирамиду $ABCDS$. Пусть T — точка касания этой сферы с основанием $ABCD$. Докажите, что проекции точки T на стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на одной окружности.

11. Сфера с центром в плоскости основания ABC тетраэдра $SABC$ проходит через вершины A, B и C и вторично пересекает ребра SA, SB и SC в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке O. Докажите, что O — центр сферы, описанной около тетраэдра $SA_1B_1C_1$.

Комбинаторный разнобой

1. Есть куча монет. Известно, что настоящих среди них больше, чем фальшивых, все настоящие монеты весят одинаково. Любая фальшивая монета отличается по весу от настоящей, но фальшивые монеты могут иметь разный вес. Мы можем пользоваться чашечными весами, владелец которых после каждого взвешивания забирает себе (в качестве нашей платы) любую выбранную им монету из взвешенных. Докажите, что можно выделить хотя бы одну настоящую монету, которая останется у нас.

2. Дан полный граф на n вершинах. За ход разрешается найти какие-то 4 ребра, образующие цикл, и стереть одно из них. Какое наименьшее количество ребер могло остаться?

3. На острове Логики живут 90 рыцарей и 10 обманщиков. Рыцари на все вопросы отвечают правдиво, а обманщики могут как сказать правду, так и соврать. Разрешается выбрать любое множество жителей острова и спросить любого аборигена, есть ли в этом множестве обманщики. Докажите, что 10 вопросов достаточно для того, чтобы определить хотя бы одного рыцаря.

4. На плоскости даны такие $3n$ точек, что все попарные расстояния между ними не больше 1. Докажите, что их можно разделить на n треугольников (групп по 3 точки) так, чтобы сумма их площадей была не больше $1/2$.

5. В игре «Последний людоед» на необитаемый остров высаживают 16 участников. Каждый из людоедов считает некоторых своих конкурентов вкусными, а других невкусными, и не меняет своего мнения. (Сам себя людоед считает невкусным). Каждое утро проводится голосование: каждый участник пишет список вкусных, по его мнению, обитателей острова, и тех участников игры, которые признаны вкусными не менее, чем половиной людоедов, съедают. Докажите, что на девятый день никого не съедят.

6. На съезде учителей математики делегаты сидели в 50 рядов по 100 человек (расположенных в виде прямоугольника). Ни у одного из делегатов нет в карманах долларов и рублей одновременно. Каждый делегат выяснил, что у всех его соседей справа, слева, спереди и сзади в сумме столько же рублей, сколько и долларов. Докажите, что у каждого делегата в карманах нет ни долларов, ни рублей.

7. На прямой через равные промежутки отмечены 2843546 точек. Петя раскрашивает половину из них в красный цвет, а остальные – в синий. Затем Вася разбивает их на пары «красная»–«синяя» так, чтобы сумма расстояний между точками в парах была максимальной. Докажите, что этот максимум не зависит от того, какую раскраску сделал Петя.

`source:combinatorics/mixture-g11r2.tex`

Упорядочивание

1. Докажите, что цифры любого шестизначного числа можно переставить так, что сумма первых трех будет отличаться от суммы остальных не более, чем на 9.

2. Пусть каждое из $2n$ различных натуральных чисел $a_1, \ldots, a_{2n}$ не превосходит n^2 $(n > 2)$. Докажите, что среди попарных разностей найдутся хотя бы три равные.

3. Каждое из семи различных натуральных чисел не превосходит 1706. Докажите, что среди них найдутся три, a, b и c, такие, что $a < b + c < 4a$.

4. В таблице 10×10 записаны числа от 1 до 100. В каждой строке выбирается третье по величине число. Докажите, что сумма этих чисел не меньше суммы чисел хотя бы в одной из строк.

5. Обозначим через a и A соответственно наименьшее и наибольшее из n различных натуральных чисел. Докажите, что их НОК не меньше na и их НОД не больше A/n.

6. Докажите, что из 69 различных натуральных чисел, не превосходящих 100, можно выбрать четыре a, b, c, d так, что $a < b < c$ и $a + b + c = d$. Верно ли это для 68 чисел?

7. Докажите, что из 25 различных натуральных чисел можно выбрать два, сумма и разность которых не совпадают ни с одним из оставшихся 23.

source:combinatorics/rearrangement/1.tex

Упорядочивание-2

1. На плоскости отмечено $2n+2$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать из них две так, что прямая, проходящая через них делит остальные $2n$ точек поровну.
2. На плоскости расположено $4n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать n непересекающихся четырехугольников (не обязательно выпуклых) с вершинами в этих точках.
3. На плоскости расположены $2n+3$ точек так, что никакие три не лежат на одной прямой и никакие четыре не лежат на одной окружности. Докажите, что среди них найдутся три, окружность проходящая через которые содержит внутри ровно n из этих точек.
4. На прямой дано $2n+1$ отрезков. Известно, что каждый пересекается не менее, чем с n из оставшихся. Доказать, что найдется отрезок, который пересекается со всеми.
5. На плоскости дано $\left[\frac{4}{3}n\right]$ прямоугольников со сторонами параллельными линиям сетки. Причем известно, что каждый пересекается хотя бы с n из оставшихся. Докажите, что существует прямоугольник, который пересекается со всеми.

source:combinatorics/rearrangement/2.tex

Глава 6

Ондатры (11-1)

Биномиальные коэффициенты в теории чисел. Теорема Люка

Считаем, что $C_0^0 = 1$ и $C_n^k = 0$ при $n < k$.

1. Пусть m, n — натуральные числа, $1 \leqslant m \leqslant n$. Докажите, что m является делителем числа
$$n(C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{m-1}C_n^{m-1}).$$

2. *Биномиальная система счисления.* Пусть k — некоторое натуральное число. Докажите, что любое натуральное число n можно единственным образом представить в виде:
$$n = C_{a_1}^1 + C_{a_2}^2 + \ldots + C_{a_k}^k,$$
где $0 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k$.

3. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 3$ верно неравенство
$$\text{НОК}(1, 2, \ldots, n) > 2^{n-1}.$$

4. Докажите, что для любого натурального n число
$$S_n = C_{2n+1}^0 \cdot 2^{2n} + C_{2n+1}^2 \cdot 2^{2n-2} \cdot 3 + \ldots + C_{2n+1}^{2n} \cdot 3^n$$
является суммой двух подряд идущих квадратов натуральных чисел.

Теорема Люка́. Пусть p — простое, n — натуральное и $n = \overline{n_m n_{m-1} \ldots n_0}_p$ (т. е. $n = n_0 + n_1 p + \ldots + n_m p^m$, $n_m \neq 0$). Также пусть дано натуральное число $i < n$. Тогда, если $i = i_0 + i_1 p + \ldots + i_m p^m$, где $0 \leqslant i_0, i_1, \ldots, i_m \leqslant p - 1$, то
$$C_n^i \equiv C_{n_0}^{i_0} \cdot C_{n_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot C_{n_m}^{i_m} \pmod{p}.$$

5. Будем говорить, что многочлены $f(x)$ и $g(x)$ *сравнимы по модулю p*, если все коэффициенты многочлена $\big(f(x) - g(x)\big)$ делятся на p (обозначать будем $f(x) \equiv g(x) \pmod{p}$, помня при этом, что $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены).
   (a) Пусть p — простое. Для любого натурального n докажите, что
$$(1 + x)^{p^n} \equiv 1 + x^{p^n} \pmod{p}.$$
   (b) Докажите теорему Лукаса.

6. Пусть n — натуральное число. Докажите, что количество чисел $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, таких, что C_n^k — нечетное, является степенью двойки.

7. Пусть p — простое нечетное число. Найдите все натуральные числа n такие, что каждое из чисел $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$ делится на p.

8. Докажите, что все числа вида $C_{2^n}^k$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ являются четными, и только ровно одно из них не делится на 4.

Теория чисел

1. Пусть a и b — различные натуральные числа такие, что $ab(a+b)$ делится на a^2+ab+b^2. Докажите, что $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

2. Через $S(n)$ обозначим сумму цифр числа n. Докажите, что не существует натурального N такого, что для любого $n > N$ выполнялось бы неравенство $S(2^n) \leqslant S(2^{n+1})$.

3. Найдите все такие натуральные $n \geqslant 2$, что числа C_{n-k}^k — четные при $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$.

4. Докажите, что при любом простом нечетном p число $p^{p+1}+(p+1)^p$ не является полным квадратом.

5. Последовательность $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ определяется следующим образом: a_0 — положительное рациональное число меньшее $\sqrt{1998}$, и если $a_n = p_n/q_n$, где p_n и q_n — взаимно просты, то $a_{n+1} = (p_n^2+5)/(p_n q_n)$. Докажите, что $a_n < \sqrt{1998}$ для любого натурального n.

6. Известно, что a, b, c, m — натуральные числа такие, что $1 + a^2 + b^2 + c^2 = abcm$. Докажите, что $m = 4$.

source:algebra/number-theory/mixture-g11/r1.tex

Стереометрия

1. Тетраэдр называется ортоцентрическим, если его высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Докажите, что ортоцентрическом тетраэдре общие перпендикуляры каждой пары противоположных ребер пересекаются в одной точке.

2. В четырехугольную пирамиду $ABCDS$, основанием которой является параллелограмм $ABCD$, вписана сфера. Докажите, что сумма площадей треугольников ABS и CDS равна сумме площадей треугольников BCS и ADS.

3. Докажите, что если у тетраэдра два отрезка, идущие из концов некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, пересекаются, то отрезки, выпущенные из концов скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей двух других граней, также пересекаются.

4. В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах CD, BD, BC пополам. Докажите, что плоскость $(B'C'D')$ параллельна плоскости (BCD).

5. Высота четырехугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения диагоналей её основания $ABCD$. Из вершин основания опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA и SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 проходят через одну точку.

6. Сфера ω проходит через вершину S пирамиды $SABC$ и пересекает ребра SA, SB и SC вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Сфера Ω, описанная около пирамиды $SABC$, пересекается с ω по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости (ABC). Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин ребер SA, SB и SC соответственно. Докажите, что точки A, B, C, A_2, B_2 и C_2 лежат на одной сфере.

7. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке P, и SP является высотой пирамиды. Докажите, что проекции точки P на боковые грани пирамиды лежат на одной окружности.

8. Плоскость α пересекает ребра AB, BC, CD и DA треугольной пирамиды $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Оказалось, что двугранные углы $\angle(KLA, KLM)$, $\angle(LMB, LMN)$, $\angle(MNC, MNK)$ и $\angle(NKD, NKL)$ равны. Докажите, что проекции вершин A, B, C и D на плоскость α лежат на одной окружности.

9. На ребрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах с общей вершиной, проведена плоскость. Докажите, что если три из четырех проведенных плоскостей касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвертая плоскость также его касается.

Касательные к сферам

1. В четрырехгранный угол вписана сфера. Докажите, что суммы его противоположных плоских углов равны.

2. Дана плоскость и две точки A и B, лежащие по одну сторону от нее. Рассматриваются всевозможные сферы, проходящие через A и B, и касающиеся данной плоскости. Найдите ГМТ точек касания.

3. Докажите, что на ребрах тетраэдра можно написать по положительному числу так, чтобы сумма чисел, записанных на ребрах каждой грани, равнялась бы площади этой грани.

4. Стороны треугольника равны a, b, c. Три шара попарно касаются друг друга внешним образом и плоскости треугольника в его вершинах. Найдите радиусы шаров.

5. Около сферы описан пространственный четырехугольник. Докажите, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.

6. Дан тетраэдр $ABCD$. Сфера, проходящая через точки A, B и C пересекает ребра DA, DB и DC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точки A_1, B_1 и C_1 отразили относительно середин соответствующих ребер, на которых они лежат, и получили точки A_2, B_2 и C_2. Докажите, что центр сферы, описанной около тетраэдра $DA_2B_2C_2$, равноудален от точек A, B и C.

7. Точка O — основание высоты четырехугольной пирамиды. Сфера с центром O касается всех боковых граней пирамиды. Точки A, B, C и D взяты последовательно по одной на боковых ребрах пирамиды так, что отрезки AB, BC и CD проходят через три точки касания сферы с гранями. Докажите, что отрезок AD проходит через четвертую точку касания.

8. Сферы S_1, S_2 и S_3 касаются друг друга внешним образом и некоторой плоскости в точках A, B и C. Сфера S касается сфер S_1, S_2 и S_3 внешним образом и данной плоскости в точке D. Докажите, что проекции точки D на стороны треугольника ABC являются вершинами правильного треугольника.

9. Дан тетраэдр $ABCD$. Вписанная в него сфера S касается грани ABC в точке T. Сфера S' касается грани ABC в точке T', а также продолжений граней ABD, BCD и CAD. Докажите, что прямые AT и AT' симметричны относительно биссектрисы угла BAC.

10. Сфера вписана в четырехугольную пирамиду $ABCDS$. Пусть T — точка касания этой сферы с основанием $ABCD$. Докажите, что проекции точки T на стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на одной окружности.

11. Сфера с центром в плоскости основания ABC тетраэдра $SABC$ проходит через вершины A, B и C и вторично пересекает ребра SA, SB и SC в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке O. Докажите, что O — центр сферы, описанной около тетраэдра $SA_1B_1C_1$.

Глава 7

Раки (X)

Функциональные уравнения — 1

Обозначения: $\mathbb{Q}_+$ — положительные рациональные числа, $\mathbb{R}_+$ — положительные действительные числа.

1. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношениям $f(x+y) = f(x)+f(y)$ и $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для всех x и y.

2. Найдите все действительные α, для которых существует не равная тождественно нулю функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$f\big(\alpha \cdot (x+y)\big) = f(x) + f(y)$$

для любых действительных x и y.

3. Найдите все функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющие соотношению

$$f\big(f(n)\big) + f(n+1) = n+2\,.$$

4. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношению

$$f\big(x \cdot f(x) + f(y)\big) = y + f(x)^2$$

для всех x и y.

5. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющие соотношению

$$f\big(f(x)\big) + a \cdot f(x) = b \cdot (a+b) \cdot x$$

для всех положительных x. (Положительные числа a и b фиксированы.)

6. Найдите все функции $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$, при всех $x \in \mathbb{Q}_+$ удовлетворяющие обоим следующим соотношениям:
(1) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$; **(2)** $f(1+2x) = \frac{f(x)}{2}$.

7. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющие соотношению

$$f(f(x)+y) = x \cdot f(1+xy)$$

для всех положительных пар x и y.

8. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношению

$$\big(1 + f(x+y)^2\big) \cdot (f(x) - f(y)) = (x-y)^3 \cdot f(x+y)\,.$$

source:algebra/functional-equations-gX/1.tex

Функциональные уравнения — 2

8.[+] Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношению

$$\big(1 + f(x+y)^2 + f(x+y+1)^2\big) \cdot \big(f(x) - f(y)\big) = (x-y)^3 \cdot f(x+y+1)\,.$$

9. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнениям $f(x+y) = f(x+f(y))$ и (при $x \neq 0$) $f(x) \cdot f(\frac{1}{x}) = 1$. Докажите, что f линейна.

10. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такие, что

$$f(x) \cdot f(y) = 2f(x + y \cdot f(x))$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$.

11. Найдите все функции $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ такие, что

$$f(x^2 + y^2) = x \cdot f(x) + y \cdot f(y)\,.$$

Хитрые свойства

12. Обязательно ли непрерывная функция, принимающая в иррациональных точках рациональные значения, постоянна?

13. **(a)** Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ при фиксации любой переменной становится многочленом. Обязательно ли сама функция f — многочлен от двух переменных?
(b) Такой же вопрос про функцию $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$.

14. Может ли функция на любом отрезке принимать *все* действительные значения?

15. Существуют ли две периодические функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для всех x выполнено
(a) $f(x) + g(x) = x$; **(b)** $f(x) + g(x) = x^2$?

source:algebra/functional-equations-gX/2.tex

Функциональные уравнения — 3

16. Найдите все дифференцируемые функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$f'(x) + f(x) = 0\,.$$

17. Найдите все пары функций $f(x)$ и $g(x)$, определенных на всей вещественной оси, такие, что

$$f(x) - f(y) = (x - y) \cdot g(x + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$$

18. Найдите все функции $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такие, что для любых положительных x и y выполняется равенство

$$f\big(x \cdot f(y)\big) = f(xy) + x\,.$$

19. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f\big(f(x) + y\big) = 2x + f\big(f(y) - x\big)\,.$$

source:algebra/functional-equations-gX/3.tex

[Московские сборы по математике] Владимир Шарич

[*10–21 ноября 2014*] группа: Раки (X) *10 ноября 2014, пара 2*

Клетчатая комбинаторика — 1: разрезания

Задачи из short list'ов.

1. **(1999, CAN)**
   (a) Пусть прямоугольник $5 \times n$ можно покрыть с помощью n пятиклеточных фигур вида . Докажите, что n четно.
   (b) Докажите, что существует более $2{\cdot}3^{k-1}$ способов покрытия прямоугольника $5{\times}2k$, $(k \geqslant 3)$, с помощью $2k$ таких фигур. (Симметричные покрытия считаются различными.)

2. **(2000, ITA)** *Блок* представляет собой трехступенчатую лестницу ширины 2, построенную из двенадцати одинаковых единичных кубиков. Найдите все целые n, для которых с помощью таких блоков можно построить куб со стороной n.

3. **(2002, ARM)** Дано нечетное $n \in \mathbb{N}$. Единичные квадраты доски $n \times n$ покрашены в шахматном порядке, причем углы черные. Назовем *уголком* фигуру из трех единичных квадратов. При каких n можно покрыть все черные квадраты неперекрывающимися уголками? В случае, когда это возможно, какое минимальное количество уголков понадобится?

4. **(2004, EST)** Найдите все пары натуральных чисел (m, n), такие что прямоугольник $m \times n$ может быть покрыт *крюками* , состоящими из шести единичных квадратов. Крюки можно поворачивать и симметрично отражать. Прямоугольник должен быть покрыт без дыр и перекрытий. Ни один крюк не должен вылезать за пределы прямоугольника.

source:combinatorics/checkered-gX/cutting.tex

Клетчатая комбинаторика — 2: матрицы

Задачи из short list'ов.

1. **(1997, IRN)** Матрица $n \times n$, элементы которой принадлежат множеству целых чисел от 1 до $(2n-1)$, называется *разнообразной*, если при всех i все $(2n-1)$ чисел в i-той строке и i-том столбце различны. Докажите, что:
   (a) не существует разнообразной матрицы при $n = 1997$;
   (b) разнообразные матрицы существуют для бесконечно многих n.

2. **(1998, UKR)** Дана прямоугольная матрица. Сумма чисел в каждой строчке и каждом столбце целая. Докажите, что каждое нецелое число x в матрице может быть заменено либо на $\lceil x \rceil$, либо на $\lfloor x \rfloor$ так, что суммы чисел в строчках и столбцах останутся неизменными. (За $\lceil x \rceil$ обозначим наименьшее целое число, большее либо равное x, а за $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, меньшее либо равное x.)

3. **(2004, POL)** Дано четное натуральное число n. Рассмотрим множество матриц размера $n \times n$, элементы которых — вещественные числа, по модулю не превосходящие 1, таких, что сумма элементов в каждой матрице равна 0. Найдите наименьшее число C такое, что в каждой такой матрице найдется линия (столбец или строка), сумма элементов в которой по модулю не превосходит C.

4. **(2004, IRN)** Рассмотрим матрицу A размера $n \times n$. Обозначим за X_i множество элементов в ее i-той строке, а за Y_j — множество элементов в ее j-том столбце, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Будем называть A *серебряной*, если множества $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ различны. Найдите наименьшее натуральное n такое, что существует серебряная матрица размера 2004×2004 с элементами из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

source:combinatorics/checkered-gX/matrix.tex

Клетчатая комбинаторика — 3: раскраски

Задачи из short list'ов.

1. **(1996, UKR)** Квадрат $(n-1)\times(n-1)$ поделен естественным образом на $(n-1)^2$ единичных квадратиков. Каждая из n^2 вершин этих квадратиков должна быть раскрашена в красный или синий. Найдите количество всех таких различных раскрасок, что каждый квадратик имеет в точности две красные вершины. (Две схемы раскраски считаются различными, если в этих двух схемах хотя бы одна вершина раскрашена по-разному.)

2. **(1998, IRN)** Игра производится на прямоугольной доске $m \times n$, используя mn фишек. Каждая фишка с одной стороны белая, а с другой — черная. Изначально в каждой клетке доски лежит фишка белой стороной вверх, кроме одного угла, в котором фишка черной стороной вверх. За одно действие можно убрать одну фишку с черной верхней стороной и перевернуть все фишки в квадратах, имеющих общую сторону с квадратом, с которого была удалена фишка. Найдите все пары натуральных чисел (m, n) таких, что все фишки могут быть удалены с доски.

3. **(1999, BLR)** Дано четное $n \in \mathbb{N}$. Скажем, что две различные клетки доски $n\times n$ *соседние,* если у них есть общая сторона. Найдите наименьшее число клеток на доске $n \times n$, которые надо отметить, чтобы каждая клетка (отмеченная или нет) имела отмеченную соседнюю клетку.

4. **(2000, CZE)** Пусть n и k — натуральные числа такие, что $n/2 < k \leqslant 2n/3$. Найдите наименьшее m, для которого можно разместить m пешек в m квадратах шахматной доски $n\times n$ так, что ни одна строка и ни один столбец не содержит блока из k смежных пустых квадратов.

source:combinatorics/checkered-gX/painting.tex

Комбинаторика[1]

0. На отрезке AB отмечено $2n$ точек, симметричных относительно середины AB. При этом n из них покрашены в красный цвет, оставшиеся n — в синий. Докажите, что сумма расстояний от точки A до красных точек равна сумме расстояний от точки B до синих точек.

1. В каждой клетке таблицы $n \times n$ ($n \geqslant 4$) написано число 1 или -1. Произведение n чисел, никакие два из которых не стоят в одной строке или столбце, назовём *основным* произведением. Через S обозначим сумму всевозможных основных произведений данной таблицы. Докажите, что S делится на 4.

2. Рассмотрим перестановку $(a_1, a_2, \ldots, a_{20})$ чисел $1, 2, \ldots, 20$ (среди $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ нет одинаковых). За один ход разрешается поменять два числа местами. Нашей целью является получить набор $(1, 2, \ldots, 20)$ из $(a_1, a_2, \ldots, a_{20})$. Для перестановки $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{20})$ обозначим минимальное число ходов, которые приводят к цели из перестановки a через k_a. Найдите максимально возможное значение k_a.

3. Найдите максимальное количество ориентированных циклов длины 3 в турнире из 14 вершин (*турниром* называется полный направленный граф).

4. Пусть число 2008 представлено в виде суммы нескольких различных натуральных слагаемых. Чему равно максимально возможное произведение чисел, составляющих такое разбиение?

source:combinatorics/local-adjustment-method.tex

[1] Метод локальных изменений

Глава 8

Дополнительные материалы

Клетчатая комбинаторика — 1: разрезания

Задачи из short list'ов.

Версия с решениями. *Решения являются слабообработанным переводом с английского. Beware!*

1. **(1999, CAN)**
(a) Пусть прямоугольник $5 \times n$ можно покрыть с помощью n пятиклеточных фигур вида . Докажите, что n четно.
(b) Докажите, что существует более $2{\cdot}3^{k-1}$ способов покрытия прямоугольника $5{\times}2k$, ($k \geqslant 3$), с помощью $2k$ таких фигур. (Симметричные покрытия считаются различными.)

(a) Покрасим первый, третий и пятый ряды в красный, а остальные квадратики в белый. Всего n фигур и $3n$ красных квадратов. Поскольку каждая фигура покрывает не более трех красных квадратов, она должна покрывать ровно 3 красных квадратика. Отсюда следует, что два белых квадратика, покрытых фигурой, лежат в одном ряду, иначе их будет не менее трех. Следовательно, каждый белый ряд разбивается на пары квадратов, принадлежащих одному кусочку. Отсюда следует, что количество клеток в ряду, равное n, четно.

(b) За a_k обозначим количество различных покрытий прямоугольника $5{\times}2k$. За b_k обозначим количество покрытий, не разбивающихся на меньшие разбиения вертикальной линией (без пересечения кусочков). Легко видеть, что $a_1 = b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $a_2 = 6 = 2 \cdot 3$, $b_3 = 4$, и далее, по индукции, $b_{3k} \geqslant 4$, $b_{3k+1} \geqslant 2$ и $b_{3k+2} \geqslant 2$. Также $a_k = b_k + \sum_{i=1}^{k-1} b_i a_{k-i}$. При $k \geqslant 3$ по индукции

$$a_k > 2 + \sum_{i=1}^{k-1} 2a_{k-i} \geqslant 2 \cdot 3^{k-1} + 2a_{k-1} \geqslant 2 \cdot 3^k\,.$$

2. **(2000, ITA)** *Блок* представляет собой трехступенчатую лестницу ширины 2, построенную из двенадцати одинаковых единичных кубиков. Найдите все целые n, для которых с помощью таких блоков можно построить куб со стороной n.

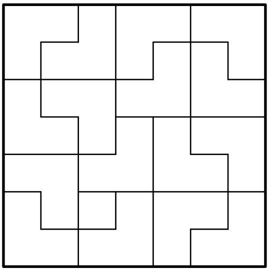
Так как объем каждого блока равен 12, сторона любого такого куба должна делиться на 6. Предположим, что куб со стороной $n = 6k$ может быть построен из $n^3/12 = 18k^3$ блоков. Введем систему координат, где куб будет задан как $[0;n]\times[0;n]\times[0;n]$, а каждый единичный кубик $[2p, 2p{+}1]\times[2q, 2q{+}1]\times[2r, 2r{+}1]$ окрашен в черный цвет. Всего таких кубиков ровно $n^3/8 = 27k^3$. Каждый блок покрывает либо один, либо три черных кубика, что в любом случае будет нечетным числом. Из этого следует, что общее число черных кубиков должно быть четно, что означает, что k — четно. Следовательно, $12 \mid n$.

С другой стороны, два блока могут быть сложены в параллелепипед $2 \times 3 \times 4$. Используя такие новые блоки, можно легко построить куб со стороной 12, и, следовательно, любой куб со стороной, делящейся на 12.

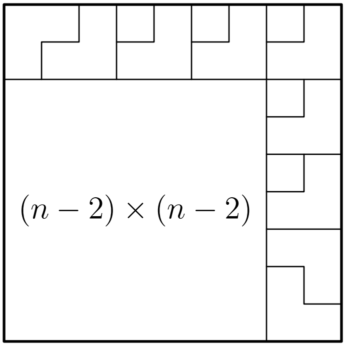
3. **(2002, ARM)** Дано нечетное $n \in \mathbb{N}$. Единичные квадраты доски $n \times n$ покрашены в шахматном порядке, причем углы черные. Назовем *уголком* фигуру  из трех единичных квадратов. При каких n можно покрыть все черные квадраты неперекрывающимися

уголками? В случае, когда это возможно, какое минимальное количество уголков понадобится?

Пусть $n = 2k+1$. Рассмотрим черные квадраты на нечетных линиях: их в целом $(k+1)^2$ и никакие два их них не могут быть покрыты уголком. Таким образом, нам необходимо как минимум $(k+1)^2$ уголков, что покрывает в общем $3(k+1)^2$ квадратов. $3(k+1)^2$ больше, чем n^2 для $n = 1, 3, 5$, поэтому будем считать, что $n \geqslant 7$.



(a) база индукции



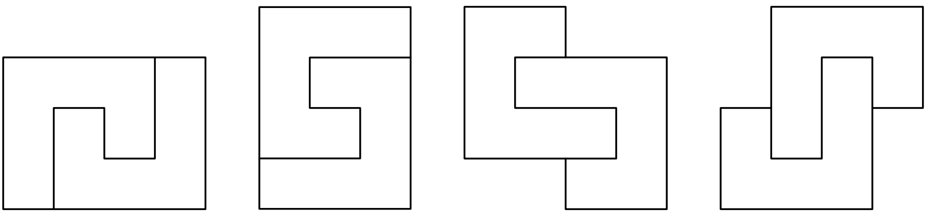
(b) переход индукции

Рис. 8.1: пример (оценка сверху) к решению задачи 3.

Случай $n = 7$ может быть покрыт, как показано на рис. 8.1a. Для $n > 7$ это тоже можно сделать, это следует по индукции из рис. 8.1b.

4. **(2004, EST)** Найдите все пары натуральных чисел (m, n), такие что прямоугольник $m \times n$ может быть покрыт *крюками* , состоящими из шести единичных квадратов. Крюки можно поворачивать и симметрично отражать. Прямоугольник должен быть покрыт без дыр и перекрытий. Ни один крюк не должен вылезать за пределы прямоугольника.

Предположим, что прямоугольник $m \times n$ может быть покрыт «крюками». Для каждого крюка H существует единственный крюк K, покрывающий «внутренний» квадрат H. H также покрывает внутренний квадрат K, поэтому множество крюков распадается на пары $\{H, K\}$, каждая из которых образует одну из двух фигур (будем называть их *плитками*) площади 12, изображенных на рис. 8.2. Ясно, что наш прямоугольник должен покрываться такими



A_1 B_1 A_2 B_2

Рис. 8.2: к решению задачи 4

плитками и поэтому $12 \mid mn$.

Предположим, что одно из чисел m, n делится на 4. Пусть, например, $4 \mid m$. Если $3 \mid n$, то прямоугольник легко покрывается прямоугольниками 3×4, а значит и крюками. Также, если $12 \mid m$ и $n \notin \{1, 2, 5\}$, то существуют $k, l \in \mathbb{N}_0$ такие, что $n = 3k + 4l$, поэтому прямоугольник $m \times n$ можно разделить на и 3×12 и 4×12, которые покрываются крюками. Если же $12 \mid m$ и $n = 1, 2$ или 5, то легко видеть, что покрытие крюками невозможно.

Предположим теперь, что $4 \nmid m$ и $4 \nmid n$. Тогда m, n четны, а количество плиток нечетно. Предположим, что общее количество плиток типов A_1 и A_2 нечетно (иначе общее количество плиток типов B_1 и B_2 нечетно, что аналогично). Покрасим в черный цвет столбцы нашего прямоугольника, номера которых делятся на 4. Тогда каждая плитка типа A_1 или A_2 покрывает три черных квадратика, и всего этими плитками покрыто нечетное их число. Поэтому число черных квадратиков, покрытых плитками B_1 и B_2, также должно быть нечетным. Но это невозможно, так как каждая такая плитка покрывает либо два, либо четыре черных квадратика.

source:combinatorics/checkered-gX/cutting.tex

Клетчатая комбинаторика — 2: матрицы

Задачи из short list'ов.

Версия с решениями. *Решения являются слабообработанным переводом с английского. Beware!*

1. **(1997, IRN)** Матрица $n \times n$, элементы которой принадлежат множеству целых чисел от 1 до $(2n-1)$, называется *разнообразной*, если при всех i все $(2n-1)$ чисел в i-той строке и i-том столбце различны. Докажите, что:
   (a) не существует разнообразной матрицы при $n = 1997$;
   (b) разнообразные матрицы существуют для бесконечно многих n.

(a) Предположим, что для некоторого $n > 1$ существует разнообразная матрица A размера $n \times n$.

Пусть число $x \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ не встречается среди элементов главной диагонали A. Такое число существует, так как на диагонали не более n различных чисел. Будем называть *i-тым крестом* совокупность i-того столбца и i-той строки. Всего крестов n, и каждый из них содержит ровно одно число x. С другой стороны, каждый элемент матрицы A, равный x, содержится ровно в двух крестах. Следовательно, n должно быть четным и, так как число 1997 нечетно, то разнообразных матриц для $n = 1997$ не существует.

(b) Для $n = 2$ и $n = 4$ такие матрицы существуют:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Эту конструкцию можно обобщить. Предположим, что $n \times n$ матрица A_n — разнообразная. Матрица B_n получается из A_n добавлением $2n$ к каждому элементу, а C_n получается из B_n заменой всех диагональных элементов (по индукции они равны $2n+1$) на $2n$. Тогда матрица

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & A_n \end{pmatrix}$$

разнообразная. Докажем это. Рассмотрим $i \leqslant n$ (случай $i > n$ аналогичен).

В нашей матрице i-й крест состоит из i-го креста A_n, i-й строки B_n и i-го столбца C_n. Числа $1, 2, \ldots, 2n-1$ содержатся в i-м кресте матрицы A_i. В i-й строке B_n содержатся все числа вида $2n+j$, где j принадлежит i-й строке A_n (включая $j = 1$). Аналогично, i-й столбец C_n содержит $2n$ и все числа вида $2n + k$, где $k > 1$ принадлежат i-му столбцу A_n. Итак, мы видим, что все числа $\{1, 2, \ldots, 4n-1\}$ содержатся в i-м кресте A_{2n}, и, значит, матрица A_{2n} разнообразная. Следовательно, разнообразные матрицы существуют для всех n, являющихся степенями 2.

Второе решение для пункта b. Построим разнообразную матрицу для $n = 2^k$. По ходу решения будем рассматривать индексы по модулю n. Определим i-диагональ ($0 \leqslant i < n$) как множество элементов матрицы с индексами $(j, j+i)$ для всех j. Заметим, что каждый крест содержит ровно один элемент 0-диагонали (главной диагонали) и по два элемента на остальных диагоналях. Два элемента диагонали будем называть родственными, если некоторый крест их содержит. Понятно, что у всякого элемента, не лежащего на 0-диагонали, ровно два родственных. Таким образом, отношение родственности разбивает каждую i-диагональ ($i > 0$) на циклы длины больше 1. Из-за симметрии по модулю n все циклы имеют равную длину, и, так как $n = 2^k$, то эта длина четна.

Теперь очевидно, как строить разнообразную матрицу. Выбираем число, скажем, 1, и берем все элементы 0-диагонали равными этому числу. Оставшиеся числа разбиваем на пары и каждой диагонали сопоставляем свою пару (скажем, i-диагонали сопоставляем пару $(2i, 2i+1)$). Проходя вдоль каждого цикла i-диагонали, по-очереди расставляем значения $2i$ и $2i + 1$. Так как длины всех циклов четны, то каждый элемент будет родственным только отличным от него элементам, а значит, что каждый крест содержит как $2i$, так и $2i + 1$.

2. **(1998, UKR)** Дана прямоугольная матрица. Сумма чисел в каждой строчке и каждом столбце целая. Докажите, что каждое нецелое число x в матрице может быть заменено либо на $\lceil x \rceil$, либо на $\lfloor x \rfloor$ так, что суммы чисел в строчках и столбцах останутся неизменными. (За $\lceil x \rceil$ обозначим наименьшее целое число, большее либо равное x, а за $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, меньшее либо равное x.)

Очевидно, мы можем заменить x на $\lfloor x \rfloor$ или $\lceil x \rceil$ так, что сумма чисел по столбцам останется неизменной. Тем не менее, этого недостаточно, чтобы с суммами по строчкам было все так же, поэтому давайте рассмотрим сумму S модулей изменений сумм в строчках. Очевидно, что S — неотрицательная, и мы хотим, чтобы она была 0.

Сумма в строке может увеличится или уменьшится при замене (или остаться неизменной). Пометим ячейку знаком $-$, если ее содержимое x было изменено на $\lfloor x \rfloor$, и знаком $+$, если оно было изменено на $\lceil x \rceil$. Назовем строчку R_2 *доступной* для строчки R_1, если есть такой столбец C, что $C \cap R_1$ помечено знаком $+$, а $C \cap R_2$ помечено знаком $-$. Заметим, что столбец, содержащий $+$, должен содержать также и $-$, так как сумма столбца не изменяется. Следовательно, для каждой строчки с увеличившейся суммой мы имеем доступ к какой-то другой строчке.

Предположим, что сумма в строчке R_1 увеличилась. Если $R_1, R_2, \dots, R_k$ — последовательность строчек, где R_{i+1} доступна для R_i через некоторый столбец C_i и такая, что сумма в строчке R_k уменьшилась, тогда изменением знака в $C_i \cap R_i$ и $C_i \cap R_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$) мы уменьшаем S на 2, оставляя суммы в столбцах неизменными. Мы утверждаем, что такая последовательность строчек всегда существует.

Пусть $\mathcal{R}$ — множество всех строчек, доступных для R_1, прямо и косвенно; а $\overline{\mathcal{R}}$ — множество оставшихся строчек. Покажем, что для любого столбца C сумма в $\mathcal{R} \cap C$ не увеличилась. Если $\mathcal{R} \cap C$ не содержит плюсы, тогда это очевидно. Если $\mathcal{R} \cap C$ содержит $+$, то так как строчки $\overline{\mathcal{R}}$ не доступны, множество $\overline{\mathcal{R}} \cap C$ не содержит минусы. Из этого следует, что сумма в $\overline{\mathcal{R}} \cap C$ не увеличилась, и так как суммы в столбце неизменны, мы снова приходим к тому же выводу.

Таким образом, общая сумма в $\mathcal{R}$ не увеличилась. Следовательно, существует строчка из $\mathcal{R}$ с уменьшившейся суммой, оправдывающей наше утверждение.

3. **(2004, POL)** Дано четное натуральное число n. Рассмотрим множество матриц размера $n \times n$, элементы которых — вещественные числа, по модулю не превосходящие 1, таких, что сумма элементов в каждой матрице равна 0. Найдите наименьшее число C такое,

что в каждой такой матрице найдется линия (столбец или строка), сумма элементов в которой по модулю не превосходит C.

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, элементы которой a_{ij} равны 1 если $i, j \leqslant n/2$, -1 если $i, j > n/2$ и 0 в остальных случаях. Такая матрица удовлетворяет условиям задачи, суммы элементов в ее строках и столбцах равны $\pm n/2$. Следовательно $C \geqslant n/2$.

Покажем, что $C = n/2$. Предположим, что это не так, и существует матрица $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, все суммы элементов в строках и столбцах которой либо больше $n/2$, либо меньше $-n/2$. Без ограничения общности можно считать, что по крайней мере $n/2$ сумм по строкам положительны и что первые $n/2$ строк имеют положительные суммы (если это не так, то переставим строки). Сумма элементов $n/2 \times n$ подматрицы B', состоящей из первых $n/2$ строк, превосходит $n^2/4$. Так как сумма элементов в каждом столбце матрицы B' не больше $n/2$, то более половины столбцов матрицы B', а значит и B, имеют положительные суммы. Снова можно считать, что суммы первых $n/2$ столбцов положительны. Итак, суммы R^+ и C^+ элементов в первых $n/2$ строках и первых $n/2$ столбцах больше, чем $n^2/4$.

Сумма всех элементов B может быть записана в виде

$$\sum a_{ij} = R^+ + C^+ + \sum_{\substack{i>n/2 \\ j>n/2}} a_{ij} - \sum_{\substack{i\leqslant n/2 \\ j\leqslant n/2}} a_{ij} > \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{4} = 0.$$

Противоречие. Итак, $C = n/2$.

4. **(2004, IRN)** Рассмотрим матрицу A размера $n \times n$. Обозначим за X_i множество элементов в ее i-той строке, а за Y_j — множество элементов в ее j-том столбце, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Будем называть A *серебряной*, если множества $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ различны. Найдите наименьшее натуральное n такое, что существует серебряная матрица размера 2004×2004 с элементами из множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

Так как X_i, Y_i, $i = 1, \dots, 2004$ — это 4008 различных подмножеств множества $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$, то $2^n \geqslant 4008$, то есть $n \geqslant 12$.

Предположим, что $n = 12$. Пусть $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_{2004}\}$, $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_{2004}\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$. В $\mathcal{A}$ не содержится ровно $2^{12} - 4008 = 88$ подмножеств S_n.

Так как каждая строка пересекает каждый столбец, то $X_i \cap Y_j \neq \emptyset$ для всех i, j. Предположим, что $|X_i|, |Y_j| \leqslant 3$ для некоторых i, j. Поскольку тогда $|X_i \cup Y_j| \leqslant 5$, то ни одно из по крайней мере $2^7 > 88$ подмножеств $S_n \setminus (X_i \cup Y_j)$ не может содержаться ни в $\mathcal{X}$, ни в $\mathcal{Y}$, что невозможно. Следовательно, или в $\mathcal{X}$, или в $\mathcal{Y}$ все множества содержат 4 элемента или больше. Предположим без ограничения общности, что $k = |X_l| = \min_i |X_i| \geqslant 4$. Тогда

$$n_k = \binom{12-k}{0} + \binom{12-k}{1} + \dots + \binom{12-k}{k-1}$$

подмножеств $S \backslash X_l$ содержат меньше k элементов и ни одно из них не принадлежит ни $\mathcal{X}$ (так как $|X_l|$ наименьшее в $\mathcal{X}$), ни $\mathcal{Y}$ (так как не пересекаются с X_l). Поэтому должно выполняться $n_k \leqslant 88$. Так как $n_4 = 93$ и $n_5 = 99$, то $k \geqslant 6$. Но тогда ни одно из $\binom{12}{0} + \dots + \binom{12}{5} = 1586$ подмножеств S_n, содержащих меньше 6 элементов, не попадает в $\mathcal{X}$, следовательно хотя бы $1586 - 88 = 1498$ из них должны попасть в $\mathcal{Y}$. 1498 их дополнений (которые содержат более 6 элементов) также не могут содержаться в $\mathcal{X}$, то есть уже 3084 подмножеств S_n не содержатся в $\mathcal{X}$. Противоречие.

Построим серебряную матрицу для $n = 13$. Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_m = \begin{pmatrix} A_{m-1} & A_{m-1} \\ A_{m-1} & B_{m-1} \end{pmatrix} \quad \text{для } m = 2, 3, \ldots,$$

где B_{m-1} — матрица размера $2^{m-1} \times 2^{m-1}$, все элементы которой равны $m + 2$. Легко проверяется по индукции, что все матрицы A_m серебряные. Более того, всякая квадратная подматрица A_m размера больше чем 2^{m-1}, полученная пересечением первых строк с первыми столбцами, также серебряная. Так как $2^{10} < 2004 < 2^{11}$, то мы получили серебряную матрицу размера 2004 со значениями в S_{13}.

source:combinatorics/checkered-gX/matrix.tex

Клетчатая комбинаторика — 3: раскраски

Задачи из short list'ов.

Версия с решениями. *Решения являются слабообработанным переводом с английского. Beware!*

1. **(1996, UKR)** Квадрат $(n-1)\times(n-1)$ поделен естественным образом на $(n-1)^2$ единичных квадратиков. Каждая из n^2 вершин этих квадратиков должна быть раскрашена в красный или синий. Найдите количество всех таких различных раскрасок, что каждый квадратик имеет в точности две красные вершины. (Две схемы раскраски считаются различными, если в этих двух схемах хотя бы одна вершина раскрашена по-разному.)

Пусть вершинам в нижнем ряду присвоена произвольная раскраска, и предположим, что некоторые две смежные вершины получили одинаковый цвет. Количество подобных раскрасок равно (2^n-2). Несложно увидеть, что тогда цвета оставшихся вершин получаются заданными единственными образом, чтобы удовлетворить требованию. Таким образом, в этом случае (2^n-2) возможных раскрасок.

Далее, предположим, что вершины в нижнем ряду раскрашены попеременно в красный и синий. Существует две подобных раскраски. В этом случае,то же должно выполняться для каждого ряда, и отсюда мы получаем 2^n возможных раскрасок.

Отсюда следует, что полное число рассматриваемых раскрасок $(2^n-2)+2^n=(2^{n+1}-2)$.

2. **(1998, IRN)** Игра производится на прямоугольной доске $m\times n$, используя mn фишек. Каждая фишка с одной стороны белая, а с другой — черная. Изначально в каждой клетке доски лежит фишка белой стороной вверх, кроме одного угла, в котором фишка черной стороной вверх. За одно действие можно убрать одну фишку с черной верхней стороной и перевернуть все фишки в квадратах, имеющих общую сторону с квадратом, с которого была удалена фишка. Найдите все пары натуральных чисел (m,n) таких, что все фишки могут быть удалены с доски.

Пусть A — количество фишек с белой верхней стороной, а B — количество пар фишек, чьи квадраты имеют общую сторону.

Мы утверждаем, что четность суммы $A+B$ не изменяется во время игры. Предположим, что некоторым ходом мы удаляем фишку ровно с k соседями, среди которых r лежат белой стороной вверх $(0\leqslant r\leqslant k\leqslant 4)$. Само собой, эта фишка лежит черной стороной верх. Когда мы ее удаляем, r белых фишек становятся черными, в то время как $(k-r)$ черных фишек становятся белыми. Таким образом, A изменяется на $(k-2r)$. А B уменьшается на k. Из этого следует, что $A+B$ уменьшается на $2r$ и сохраняет свою четность, как и предполагалось.

Изначально, $A=mn-1$, а $B=m(n-1)+n(m-1)$; следовательно, $A+B$ равно $(3mn-m-n-1)$. Если нам удалось удалить все фишки, то в конце $A+B=0$. Следовательно, $(3mn-m-n-1)=(m-1)(n-1)+2(mn-1)$ должно быть четно, что равносильно тому, что хотя бы одно из чисел m и n должно быть нечетно.

С другой стороны, если m или n нечетно, игра может быть успешно закончена. Пусть m — нечетно. Как показано на рис. 8.3, мы можем прийти к позиции (1) за m ходов; за $\frac{m+1}{2}$ ходов мы делаем позицию ($1'$), и за следующие $\frac{m-1}{2}$ ходов — позицию (2). Будем продолжать это, пока не опустошим все колонки.

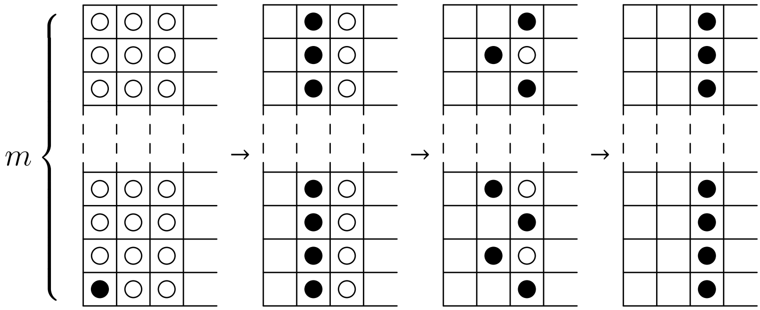


Рис. 8.3: позиции (0), (1), ($1'$), (2) к решению задачи 2

3. **(1999, BLR)** Дано четное $n \in \mathbb{N}$. Скажем, что две различные клетки доски $n \times n$ *соседние,* если у них есть общая сторона. Найдите наименьшее число клеток на доске $n \times n$, которые надо отметить, чтобы каждая клетка (отмеченная или нет) имела отмеченную соседнюю клетку.

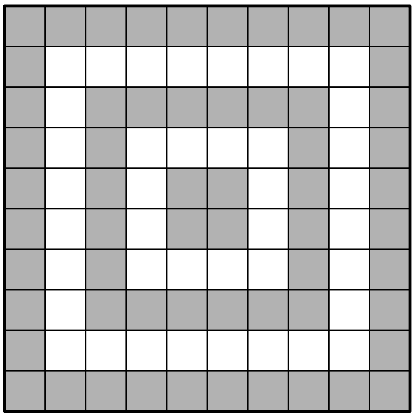


Рис. 8.4: к решению задачи 3.

Пусть $n = 2k$. Покрасим крайние квадратики в черный, соседние к ним — в белый. Далее, красим попеременно в черный и белый цвета, пока не покрасим все клетки (рис. 8.4). Назовем клетки, покрашенные некоторой итерацией, «рамкой». В описанной раскраске каждая клетка (белая или черная) будет соседней ровно двум черным клеткам. Количество черных клеток равно $2k(k+1)$, следовательно, нужно покрасить не менее $k(k+1)$ клеток.

С другой стороны, идя вдоль черной рамки, мы будем отмечать пару соседних клеток, а следующую пару не отмечать. Каждая клетка черной рамки будет иметь одного отмеченного соседа. По отметке в черной рамке можно выбрать такую отметку в следующей, чтобы каждая клетка белой рамки имела ровно одного отмеченного соседа. Следовательно, совершив такие операции, начиная с внешней рамки, мы отметим ровно половину черных клеток, т. е. $k(k+1)$, и у каждой клетки будет отмеченный сосед.

Отсюда следует, что искомое число отметок равно $k(k+1)$.

Примечание. Для $n = (4k-1)$ и $n = (4k+1)$ можно построить аналогичные отметки для получения $4k^2 - 1$ и $(2k+1)^2$ отметок соответственно.

4. **(2000, CZE)** Пусть n и k — натуральные числа такие, что $n/2 < k \leqslant 2n/3$. Найдите наименьшее m, для которого можно разместить m пешек в m квадратах шахматной доски $n \times n$ так, что ни одна строка и ни один столбец не содержит блока из k смежных пустых квадратов.

Назовем *хорошей расстановкой* пешек — такую расстановку, в которой нет блока из k смежных квадратов в строках или в столбцах.

Мы можем сделать хорошую расстановку следующим образом: обозначим строки и колонки числами $0, 1, \dots, n-1$ и поставим пешку в квадрат (i, j) тогда и только тогда, когда k делит $i + j + 1$. Очевидно, это будет хорошей расстановкой, в которой пешки лежат на трех линиях в k, $(2n-2k)$, и $(2n-3k)$ квадратах, что в сумме дает $(4n-4k)$ пешек.

$$\begin{array}{cccc}
n-k & A & B & C \\
2k-n & H & \cdot & D \\
n-k & G & F & E \\
 & n-k & 2k-n & n-k
\end{array}$$

Рис. 8.5: к решению задачи 4.

Докажем теперь, что хорошая расстановка должна содержать не менее $(4n-4k)$ пешек. Предположим, что мы имеем хорошую расстановку m пешек. Разделим доску на девять прямоугольников, как показано на рис. 8.5. Пусть $a, b, \dots, h$ — количества пешек в прямоугольниках $A, B, \dots, H$ соответственно. Заметим, что каждый столбец, проходящий через A, B, и C, либо содержит пешку в B, либо содержит пешку и в A и в C. Из этого следует, что $a + c + 2b \geqslant 2(n-k)$. Аналогично получаем, что $c + e + 2d$, $e + g + 2f$, и $g + a + 2h$ все не менее $2(n-k)$. Сложив и разделив на 2, получаем $a + b + \dots + h \geqslant 4(n-k)$, что доказывает утверждение.

source:combinatorics/checkered-gX/painting.tex