1 Линейное движение точек

Простые задачи для первого знакомства с линейным движением. Никаких специальных знаний не требуют. Соображений подобия, векторов и здравого смысла должно быть достаточно. Задача 0 — основной инструмент доказательства линейности движения. В задачах с окружностями полезно следить за серперами. Двух состояний везде достаточно.

0. Докажите или опровергните:
   (a) Середина отрезка между двумя линейно движущимися точками движется линейно.
   (b) Прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку, движется линейно.
   (c) Прямая, проведённая через две линейно движущиеся точки, движется линейно.
   (d) Точка пересечения линейно движущихся прямых движется линейно.

1. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, AC в точках C_1, B_1 соответственно. На отрезках BC_1, AB_1 отмечены точки P и Q соответственно так, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

2. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно так, что $BP = AQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника CPQ лежит на диагонали BD.

3. На стороне BC равностороннего треугольника ABC с центром I отмечена точка X. Из точки X опустили перпендикуляры XP и XQ на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что прямая XI делит отрезок PQ пополам.

4. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются точке H. Прямая ℓ, перпендикулярная стороне BC, пересекает отрезок BC в точке S и пересекает отрезки BB_1 и CC_1 в точках D и E. Докажите, что ортоцентр треугольника DEH лежит на прямой AS.

5. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. На прямой AO отмечена произвольная точка X. Окружности (ABX) и (ACX) второй раз пересекают прямые AC и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что середина отрезка PQ равноудалена от точек B и C.

6. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне BC, пересекает отрезок AB и прямую AC в точках Q и P соответственно. Докажите, что точки A, O и середины отрезков BP и CQ лежат на одной окружности.

7. (**Теорема Монжа**) Докажите, что четыре перпендикуляра, опущенных из середин сторон вписанного четырёхугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке.

8. Некоторая окружность с центром в точке I пересечения биссектрис треугольника ABC пересекает стороны треугольника в точках A_B, A_C, B_C, B_A, C_A, C_B (обозначения: точка X_Y лежит на стороне напротив вершины X и ближе к точке Y). Докажите, что прямая, соединяющая точку A с точкой пересечения C_BA_B и B_CA_C, делит отрезок A_BA_C пополам.

В следующем блоке собраны несложные задачи, где число необходимых состояний оценивается тройкой. Иногда помогает непосредственно теорема ниже, иногда полезны идеи из её алгебраического объяснения.

Теорема. *Если три линейно движущиеся точки лежат на одной прямой в три различных момента времени, то они всегда лежат на одной прямой.*

Условие коллинеарности точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) записывается так:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

Если все координаты — линейные функции времени t, то перед нами многочлен степени не более 2.

1. (**Прямая Гаусса**) На плоскости проведено четыре прямые общего положения. Докажите, что середины трёх отрезков, соединяющих точку пересечения двух прямых с точкой пересечения двух оставшихся (и так для трёх разбиений прямых на пары), лежат на одной прямой.

2. На сторонах BC, CA, AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечены точки P, X, Y так, что $PX \parallel AB$, $PY \parallel CA$. Точка T — середина дуги BC окружности (ABC). Докажите, что $TP \perp XY$.

3. **(a)** На сторонах AB, AC треугольника ABC отмечены точки B_1, C_1 соответственно. Докажите, что прямая, соединяющая ортоцентры треугольников ABC и AB_1C_1, перпендикулярна прямой, соединяющей середины отрезков BC_1 и B_1C.
   (b) (**Прямая Обера**) Докажите, что ортоцентры четырёх треугольников, образованных четырьмя прямыми общего положения, лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой Гаусса этих четырёх прямых.

4. Докажите, что середины трех отрезков, соединяющих проекции произвольной точки плоскости на пары противоположных сторон или диагоналей вписанного в окружность четырехугольника, лежат на одной прямой.

5. На высотах остроугольного треугольника ABC из вершин A, B, C отметили точки A_1, B_1, C_1 соответственно, а H — ортоцентр. Докажите, что A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности тогда и только тогда сумма площадей треугольников A_1BC, B_1CA и C_1AB равна площади треугольника ABC.

В последней задаче выше попробуйте двигать все три точки разом с тремя независимыми временами. Какие поверхности в фазовом пространстве задаются условиями, эквивалентность которых надо доказать?

Следующий блок — задачи посложнее с high-level-олимпиад.

1. (*Финал всероса, 2005.9.7*) На описанной окружности треугольника ABC отмечена точка X. Прямые BX и CX пересекают высоты CC_1, BB_1 в точках P, Q соответственно. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Прямая XY пересекает окружность (ABC) в точках P и Q. Докажите, что середины отрезков BY, CX, XY и PQ лежат на одной окружности.

3. (*Финал всероса, 2008.10.3*) Окружность ω с центром O вписана в угол BAC и касается его сторон в точках B и C. Внутри угла BAC выбрана точка Q. На отрезке AQ нашлась такая точка P, что $AQ \perp OP$. Прямая OP пересекает окружности ω_1 и ω_2, описанные около треугольников BPQ и CPQ, вторично в точках M и N. Докажите, что $OM = ON$.

4. (*Финал всероса, 2011.11.2*) На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90°$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.

5. (*Финал всероса, 2018.9.4*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN , а точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.

6. (*IMO shortlist, 2016-G5*) Let D be the foot of perpendicular from A to the Euler line (the line passing through the circumcentre and the orthocentre) of an acute scalene triangle ABC. A circle ω with centre S passes through A and D, and it intersects sides AB and AC at X and Y respectively. Let P be the foot of altitude from A to BC, and let M be the midpoint of BBC. Prove that the circumcentre of triangle XSY is equidistant from P and M.

7. (*IMO shortlist, 2018-G5*) Let ABC be a triangle with circumcircle Ω and incenter I. A line ℓ intersects the lines AI, BI, and CI at points D, E, and F, respectively, distinct from the points A, B, C, and I. The perpendicular bisectors x, y, and z of the segments AD, BE, and CF, respectively determine a triangle Θ. Show that the circumcircle of the triangle Θ is tangent to Ω.

8. (*Финал всероса 2018.11.8*) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке K. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'K$ пересекает окружность (APQ) в точке S. Докажите, что окружность (BSC) касается окружности (APQ).

2 Движение с сохранением двойных отношений

Начинаем с простых задач, где утверждение удаётся переформулировать в виде тождественности замкнутой цепочки проективных отображений. Полезно ввести сущность «пучок прямых», внутри которой иногда происходят повороты и отражения. Все отображения простые и понятные, даже окружностей толком нет.

1. На отрезках биссектрис BB_1, CC_1 треугольника ABC взяты точки P и Q так, что $\angle QAB = \angle PAC$. Докажите, что прямые QB и PC пересекаются на биссектрисе угла BAC. *Да, это частный случай леммы об изогоналях. Можно и саму лемму об изогоналях столь же легко задвигать.*

2. На продолжении стороны CD за точку D прямоугольника $ABCD$ отмечена точка P; точки M и N — середины сторон AD, BC соответственно. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая NM — биссектриса угла PNQ.

3. Внешние биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC с наименьшей стороной BC пересекаются в точке I_A. На отрезках BC_1, CB_1 взяли точки X и Y соответственно так, что отрезок XY проходит через точку I_A. Докажите, что отражения прямых CX и BY относительно осей CI_A и BI_A соответственно пересекаются на прямой B_1C_1.

4. Дан четырехугольник $ABCD$, удовлетворяющий условиям $AB = BC$, $AD = DC$ и $\angle BAD = \angle BCD = 90°$. На отрезках AD и CD выбраны точки X и Y так, что $BX \perp AY$. Докажите, что $CX \perp BY$.

5. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром I. На отрезках AI, CI отмечены точки X и Y так, что $\angle XBY = \frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что $\angle XDY = \frac{1}{2}\angle ADC$.

Ниже более хитрые задачи, где проективность очередного отображения не так очевидна. Общий принцип — попытаться разложить отображение в композицию простых проективных. Если в конструкции отображения участвуют окружности, то особенно полезна инверсия.

1. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) вписан в окружность Ω. На меньшей дуге BC отмечена произвольная точка X. Касательная к Ω в точке X пересекает касательные к Ω из точек B и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что длина отрезка, высекаемого прямыми AP и AQ на прямой BC, не зависит от выбора точки X.

2. В остоугольном неравнобедренном треугольнике ABC отмечена середина M стороны BC и основание H высоты AH. Внутри треугольника нашлись такие точки P и Q, то $\angle BAP = \angle CAQ$ и $\angle BPA = \angle CQA = 90^\circ$. Докажите, что точки M, H, P, Q лежат на одной окружности.

3. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр треугольника ABC. Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω, а другая — на ω.

4. Пять прямых пересекаются в одной точке. В каждый из десяти углов вписано по окружности; окружности касаются друг друга по циклу. На сторонах углов отмечено по точке. Известно, что для всех углов, кроме одного, отрезок, соединяющий отмеченные точки на сторонах, касается вписанной в угол окружности. Докажите, что для оставшегося угла это также верно.

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена высота AA_0. Окружность γ с центром в середине отрезка AA_0 касается прямых AB и AC. Из точки X прямой BC проведены две касательные к окружности γ. Докажите, что эти касательные высекают на прямых AB и AC равные отрезки.

6. Выпуклый шестиугольник $AQCPBR$ вписан в окружность Ω, и при этом треугольники ABC и PQR описаны около одной и той же окружности ω. Прямая ℓ, параллельная прямой BC и не совпадающая с ней, касается окружности ω. Прямая ℓ пересекает отрезок QR в точке X. Докажите, что $\angle PAB = \angle CAX$.

7. Let $ABCDE$ be an arbitrary convex pentagon. Suppose that $BD \cap CE = A'$, $CE \cap DA = B'$, $DA \cap EB = C'$, $EB \cap AC = D'$ and $AC \cap BD = E'$. Suppose also that $(ABD') \cap (AC'E) = A''$, $(BCE') \cap (BD'A) = B''$, $(CDA') \cap (CE'B) = C''$, $(DEB') \cap DA'C = D''$ and $(EAC') \cap (EB'D) = E''$. Prove that AA'', BB'', CC'', DD'' and EE'' are concurrent.

Удобно ввести определение проективной инволюции (это когда $f(f(x)) \equiv x$). Полезно отрефлексировать следующее: (1) если проективное преобразование окружности меняет местами две различные точки, точки оно — инволюция; (2) любая проективная инволюция окружности — проекция с себя на себя из некоторой точки плоскости.

1. На стороне BC неравнобедренного треугольника ABC выбираются всевозможные пары симметричных относительно середины отрезка BC точек X, Y. Прямые AX, AY вторично пересекают окружность (ABC) в точках P, Q. Докажите, что все прямые PQ проходят через фиксированную точку.

2. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка P. Произвольная секущая, проходящая через точку P, пересекает окружность (ABC) в точках M и N. Прямые AM и AN пересекают прямую BC в точках X и Y. Докажите, что окружность (AXY) проходит через фиксированную (т. е. не зависящую от выбора секущей) точку, отличную от A.

3. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. Точки I, I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей ABC, ABD и ACD соответственно; точки $M \neq A$ и $N \neq A$ — точки пересечения описанной окружности треугольника ABC с описанными окружностями треугольников

IAI_1 и IAI_2 соответственно. Докажите, что прямая MN проходит через постоянную точку, не зависящую от выбора точки D.

Теорема. *Если три точки движутся по прямым с сохранением двойных отношений и четыре раза лежат на одной прямой, то они всегда лежат на одной прямой. Если три прямые вращаются с сохранением двойных отношений и четыре раза пересекаются в одной точке, то они всегда пересекаются в одной точке.*

Первая часть теоремы проективно эквивалентна соответствующей теореме для линейно движущихся точек, и для сведения достаточно увести одну из четырёх прямых на бесконечность. Вторая часть полярно двойственна первой.

1. Вписанная окружность треугольника ABC имеет центр I и касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. На отрезках IA_1, IB_1, IC_1 отмечены точки A_2, B_2, C_2 соответственно таким образом,что $IA_2 = IB_2 = IC_2$. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

2. (**Теорема Дроз-Фарни**) Через ортоцентр остроугольного треугольника провели две перпендикулярные прямые. Докажите, что середины отрезков, которые эти прямые высекают на сторонах или продолжениях сторон треугольника, лежат на одной прямой

3. (*Romanian Masters 2016.1*) Let ABC be a triangle and let D be a point on the segment BC, $D \neq B$ and $D \neq C$. The circle ABD meets the segment AC again at an interior point E. The circle ACD meets the segment AB again at an interior point F. Let A_0 be the reflection of A in the line BC. The lines A_0C and DE meet at P, and the lines A_0B and DF meet at Q. Prove that the lines AD, BP and CQ are concurrent (or all parallel).

3 Алгебраическая зависимость точек и прямых

На плоскости заводим однородные координаты, оцениваем степени зависимости координат точек и коэффициентов уравнений прямых от времени t. Однородные коодинаты позволяют корректо работать с проективной плоскостью не думать о нулях в знаменателях. Перечислим ключевые вспомагательные утверждения.

Утверждение. *Если точка X_t едет по прямой с сохранением двойных отношений относительно времени $t \in \mathbb{R}P$, то её однородные координаты — линейные функции от t. Если прямая ℓ_t вращется с сохранением двойных отношений относительно времени $t \in \mathbb{R}P$, то её коэффициенты (прямая задаётся уравнением $Ax + By + Cz = 0$) — линейные функции от t. Если точка Y_t едет по окружности/конике с сохранением двойных отношений относительно времени $t \in \mathbb{R}P$, то её однородные координаты — квадратичные функции от t.*

Обычно на оси времени я тоже завожу вместо одной координаты t однородные координаты $[u : v]$ (из категорного перфекционизма), но, видимо, это не обязательно.

Будем говорить, что прямая ℓ_t имеет степень зависимости k от времени t, если коэффициенты её уравнения в однородных координатах есть многочлены степени не более k от t. Аналогично, точка A_t имеет степень зависимости k, если её координаты — многочлены степени не более k от времени t.

Лемма (о сложении степеней)**.** *Прямая, соединяющая две точки степеней зависимости k и l от t, имеет степень зависимости $k + l$. Аналогично, точка пересечения двух прямых степеней зависимости k и l от t имеет степень зависимости $k + l$.*

Полезно понимать, что любые проективные преобразования плоскости в однородных координатах линейны, а значит не меняют степень зависимости точек. При манипуляциях с направлениями прямых их можно пересекать с бесконечно удалённой. Например, если нам очень хочется доказать, что прямая степени k всегда перпендикулярна прямой степени l, то их надо пересечь с бесконечно удалённой прямой (получив точки степеней $k + 0 = k$ и $l + 0 = l$) и попробовать совместить точки фиксированным поворотом плоскости на $90°$. За совпадение бесконечно удалённой точки степени k и повёрнутой бесконечно удалённой точки степени l отвечает многочлен степени $k + l$.

При верификации отдельных положений надо думать не о геометрическом смысле, а о многочленах, построенных при оценке числа состояний. Например, если при использовании леммы о сложении степеней проводилась прямая через две точки, и эти две точки в фиксированный момент времени t_0 совпали, то при этом t_0 коэффициенты прямой занулятся, все последующие координаты и коэффициенты тоже занулятся и утверждение задачи автоматически выполнится.

1. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Треугольники ACE и BDF в пересечении образуют шестиугольник. Докажите, что главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в одной точке.

2. На сторонах AB, AC остроугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно так, что четырёхугольник $BPQC$ — вписанный. Докажите, что прямая, соединяющая ортоцентры треугольников ABC и APQ, проходит через точку пересечения прямых BQ и CP.

3. В остроугольном треугольнике ABC, вписаном в окружность Ω с центром O, проведена высота AH_A. Прямые ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C касаются окружности Ω в точках A, B, C соответственно. Точка S — ортоцентр треугольника, образованного прямыми ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C. Докажите, что прямые OH_A и SH_A симметричны относительно прямой BC.

4. Вневписанная окружность треугольника ABC имеет центр I_A, касается отрезка BC в точке A_1 и касается прямых AB, AC в точках C_1, B_1 соответственно. На прямой I_AC_1 выбрана точка P так, что $AP \perp BI_A$. На прямой I_AB_1 выбрана точка Q так, что $AQ \perp CI_A$. Докажите, что точки P, Q, A_1 лежат на одной прямой.

5. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон CA и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. На прямых CA, AB, B_1C_1 отмечены точки B_2, C_2, M таким образом, что точки C, B, M — середины отрезков B_1B_2, C_1C_2, B_1C_1 соответственно. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке J. Докажите, что $JM \perp B_2C_2$.

6. Дан треугольник ABC. Проведены высота AH и медиана CM. Обозначим их точку пересечения через P. Высота, проведенная из вершины B треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки H на прямую CM, в точке Q. Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Лучи BA и CD пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P и параллельная касательной к окружности в точке D, пересекает в точках U и V касательные, проведённые к окружности в точках A и B. Докажите, что окружности (CUV) и $(ABCD)$ касаются.

8. На описанной окружности треугольника ABC отмечены точки P и Q. Точка A' на стороне BC такова, что прямые PA' и QA' симметричны относительно прямой BC. Аналогично определяются точки B', C'. Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой.

9. На прямой Эйлера неравнобедренного трегольника ABC отмечена точка X, лежащая внутри треугольника; точка O — центр окружности (ABC). Прямые AX, BX, CX пересекают соответственные стороны треугольника ABC, в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что окружности (AOA_1), (BOB_1), (COC_1) имеют две общие точки.