

## Заключительная олимпиада

Последний день весны

### ДОВЫВОД

1. Мосметрострой нанял двух землекопов для рытья туннеля. Один из них может за час прокопать вдвое больше, чем другой, а платят по договору каждому одинаково за каждый час работы. Что обойдётся дешевле — совместная работа землекопов с двух сторон до встречи или поочерёдное рытьё половины туннеля каждым из землекопов?

2. На олимпиаде  $m > 1$  школьников решали  $n > 1$  задач. Все школьники решили разное количество задач. Все задачи решены разным количеством школьников. Докажите, что один из школьников решил ровно одну задачу.

3. В классе 27 учеников. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любых двух учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдется кружок, в котором занимаются не менее 18 учеников.

4. У нумизмата Феди все монеты имеют диаметр не больше 10 см. Он хранит их в плоской коробке размером  $30 \times 70$  см (в один слой). Ему подарили монету диаметром 25 см. Докажите, что все монеты можно уложить в одну плоскую коробку размером  $55 \times 55$  см.

5. Кафельная плитка имеет форму прямоугольного треугольника с катетами 1 дм и 2 дм. Можно ли из 20 таких плиток сложить квадрат?

### Вывод

6. К кабинке канатной дороги, ведущей на гору, подошли четыре человека, которые весят 50, 60, 70 и 90 кг. Смотрителя нет, а в автоматическом режиме кабинка ездит туда-сюда только с грузом от 100 до 250 кг (в частности, пустой она не ездит), при условии, что пассажиров можно рассадить на две скамьи так, чтобы веса на скамьях отличались не более, чем на 25 кг. Каким образом все они смогут подняться на гору?

7. Наибольший общий делитель натуральных чисел  $m$  и  $n$  равен 1. Каково наибольшее возможное значение НОД чисел  $m + 2014n$  и  $n + 2014m$ ?

8. Коля и Витя играют в следующую игру. На столе лежит куча из 8191 камня. Мальчики делают ходы поочерёдно, а начинает Коля. Делая ход, играющий делит каждую кучку, в которой больше одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, кто после своего хода оставляет кучки по одному камню в каждой. Кто выигрывает при правильной игре?

9. Точка  $F$  — середина медианы  $BD$  треугольника  $ABC$ . Точка  $E$  на стороне  $BC$  такова, что  $DE \perp BC$ . Докажите, что если  $AB = AE$ , то  $\angle AFD = \angle FED$ .