Лепреконы

22 марта 2014 г.

Делимость

Напомним, что мы уже знаем, что такое алгоритм Евклида, сравнение чисел по модулю какого-нибудь числа и признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9 и 11.

1. а) Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k+3$. б) Докажите, что для любого натурального n существует n последовательных составных чисел.

2. Найдите последнюю цифру числа а) 2009^{2010}; б) 23^{2014}.

3. а) На сколько нулей оканчивается число 2014! ? б) Какова чётность его последней ненулевой цифры? в) Найдите эту цифру.

4. Могут ли сумма, разность (положительная), произведение и частное двух натуральных чисел при сложении давать 2014?

5. Решите в целых числа уравнение $x^2+y^2+z^2=2^{2014}$.

6. Докажите, что среди билетов с номерами от 000000 до 999999 количество счастливых не превосходит 1/11 от общего количества билетов.

7. Докажите, что в вершинах любого многогранника (это тот, который объёмненький) можно расставить натуральные числа так, чтобы числа в вершинах, связанных ребром, имели общий делитель больше 1, а в вершинах, не связанных, ребром — не имели.

8. Пусть a — сумма цифр числа 4444^{4444}, а b — сумма цифр числа a. Найдите сумму цифр числа b.

9. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2+b \,\vdots\, b^2+a$ и $a+b>2$. Докажите, что b^2+a — составное число.

Лепреконы

22 марта 2014 г.

Делимость

Напомним, что мы уже знаем, что такое алгоритм Евклида, сравнение чисел по модулю какого-нибудь числа и признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9 и 11.

1. а) Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k+3$. б) Докажите, что для любого натурального n существует n последовательных составных чисел.

2. Найдите последнюю цифру числа а) 2009^{2010}; б) 23^{2014}.

3. а) На сколько нулей оканчивается число 2014! ? б) Какова чётность его последней ненулевой цифры? в) Найдите эту цифру.

4. Могут ли сумма, разность (положительная), произведение и частное двух натуральных чисел при сложении давать 2014?

5. Решите в целых числа уравнение $x^2+y^2+z^2=2^{2014}$.

6. Докажите, что среди билетов с номерами от 000000 до 999999 количество счастливых не превосходит 1/11 от общего количества билетов.

7. Докажите, что в вершинах любого многогранника (это тот, который объёмненький) можно расставить натуральные числа так, чтобы числа в вершинах, связанных ребром, имели общий делитель больше 1, а в вершинах, не связанных, ребром — не имели.

8. Пусть a — сумма цифр числа 4444^{4444}, а b — сумма цифр числа a. Найдите сумму цифр числа b.

9. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2+b \,\vdots\, b^2+a$ и $a+b>2$. Докажите, что b^2+a — составное число.