Лепреконы

15 марта 2014 г.

Разнобой

1. Пусть $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Докажите, что а) $S_n \geqslant \frac{1}{2}$; б) $S_n < S_{n+1}$. в) Докажите, что сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ при достаточно больших n может принимать сколь угодно большие значения.

2. За два года работы в парламенте каждый из 100 депутатов подрался по крайней мере с 67 другими. Докажите, что можно составить комиссию из 4 депутатов, в которой любые двое уже подрались.

3. 100 точек делят окружность на 100 равных частей. 10 из этих точек покрасили в красный, а 10 других — в синий цвет. Докажите, что найдётся отрезок с синими концами, равный какому-либо отрезку с красными концами.

4. а) При $n > 2$ докажите неравенство $2^n > 2n + 1$ б) **(Неравенство Бернулли.)** При $n \geqslant 1$, $\alpha > -1$ докажите неравенство $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$.

5. Найдите (F_n, F_{n+1}), где F_n — n-е число Фибоначчи $(F_1 = F_2 = 1, \quad F_{i+1} = F_i + F_{i-1})$.

6. Два фокусника показывают зрителю такой фокус. У зрителя есть 24 карточки, пронумерованные числами от 1 до 24. Он выбирает из них 13 карточек и передаёт первому фокуснику. Тот возвращает зрителю две из них. Зритель добавляет к этим двум одну из оставшихся у него 11 карточек и, перемешав, передаёт эти три карточки второму фокуснику. Каким образом фокусники могут договориться так, чтобы второй всегда с гарантией мог определить, какую из трех карточек добавил зритель?

7. Можно ли в записи

$$2013^2 - 2012^2 - \ldots - 2^2 - 1^2$$

некоторые минусы заменить на плюсы так, чтобы значение получившегося выражения стало равно 2013?

8. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, $\angle ABC = 120^\circ$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = CQ = AC$. Докажите, что угол PIQ — прямой.

Лепреконы

15 марта 2014 г.

Разнобой

1. Пусть $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Докажите, что а) $S_n \geqslant \frac{1}{2}$; б) $S_n < S_{n+1}$. в) Докажите, что сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ при достаточно больших n может принимать сколь угодно большие значения.

2. За два года работы в парламенте каждый из 100 депутатов подрался по крайней мере с 67 другими. Докажите, что можно составить комиссию из 4 депутатов, в которой любые двое уже подрались.

3. 100 точек делят окружность на 100 равных частей. 10 из этих точек покрасили в красный, а 10 других — в синий цвет. Докажите, что найдётся отрезок с синими концами, равный какому-либо отрезку с красными концами.

4. а) При $n > 2$ докажите неравенство $2^n > 2n + 1$ б) **(Неравенство Бернулли.)** При $n \geqslant 1$, $\alpha > -1$ докажите неравенство $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$.

5. Найдите (F_n, F_{n+1}), где F_n — n-е число Фибоначчи $(F_1 = F_2 = 1, \quad F_{i+1} = F_i + F_{i-1})$.

6. Два фокусника показывают зрителю такой фокус. У зрителя есть 24 карточки, пронумерованные числами от 1 до 24. Он выбирает из них 13 карточек и передаёт первому фокуснику. Тот возвращает зрителю две из них. Зритель добавляет к этим двум одну из оставшихся у него 11 карточек и, перемешав, передаёт эти три карточки второму фокуснику. Каким образом фокусники могут договориться так, чтобы второй всегда с гарантией мог определить, какую из трех карточек добавил зритель?

7. Можно ли в записи

$$2013^2 - 2012^2 - \ldots - 2^2 - 1^2$$

некоторые минусы заменить на плюсы так, чтобы значение получившегося выражения стало равно 2013?

8. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, $\angle ABC = 120^\circ$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = CQ = AC$. Докажите, что угол PIQ — прямой.