

Индукция в графах

Определение. *Циклом* называется последовательность вершин графа A_1, A_2, \dots, A_n такая, что пары соседних вершин в ней (A_1 и A_2 , A_2 и A_3 , \dots , A_{n-1} и A_n , A_n и A_1) соединены рёбрами.

Определение. *Простым циклом* называется цикл, проходящий через каждую вершину не более одного раза. (то есть он выглядит как многоугольник)

Определение. Граф называется связным, если от любой его вершины можно дойти до любой другой по рёбрам этого графа.

Определение. *Деревом* называется связный граф, не содержащий простых циклов.

1. Докажите, что в дереве с n вершинами содержится ровно $n - 1$ ребро.

2. Докажите, что в дереве с $n \geq 2$ вершинами содержится хотя бы 2 висячие вершины. (*висячей* вершиной называется вершина, имеющая степень ровно 1)

3. Докажите, что а) из любого связного графа можно выделить дерево, содержащее все его вершины (*остовное дерево*); б) в связном графе с n вершинами содержится как минимум $n - 1$ ребро.

4. Докажите, что в любом связном графе есть вершина, при удалении которой граф остаётся связным.

5. В государстве n городов, каждые два из которых соединены дорогой. Правительство хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из любого города, в него нельзя было больше вернуться. Докажите, что это можно сделать.

6. а) Докажите, что в связном графе существует цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз (*Эйлеров цикл*), тогда и только тогда, когда степени всех вершин данного графа чётны; б) Докажите, что в связном графе существует путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз (*Эйлеров путь*), тогда и только тогда, когда в данном графе есть не более двух вершин нечётной степени.

7. В компании из k человек ($k > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2k - 4$ разговора все они могут узнать все новости.

8. В однокруговом турнире по волейболу участвовало n команд. Докажите, что их можно пронумеровать числами от 1 до n так, что первая команда выиграла у второй, вторая у третьей, \dots , $(n - 1)$ -я у n -й.

9. Рёбра дерева окрашены в два цвета. Если в какую-то вершину приходят рёбра только одного цвета, то их все можно перекрасить в другой цвет. Можно ли все дерево сделать одноцветным?

Определение. Граф называется *планарным*, если его можно без самопересечений изобразить на плоскости.

Определение. Изображение графа на плоскости без самопересечений называется *плоским* графом.

Определение. *Картой* называется связный плоский граф. Части, на которые карта разбивает плоскость, называются *гранями* (или *странами*).

10. (**Формула Эйлера.**) Докажите, что в карте с V вершинами, E рёбрами и F странами $V - E + F = 2$ а) для карты, образованной деревом; б) для произвольной карты.

11. Дана карта, степени всех вершин которой чётны. Докажите, что её страны можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две страны, имеющие общее ребро, были покрашены в разные цвета.