Лепреконы

1ый день весны 2014 г.

Добавка

1. Пусть все вершины связного графа имеют степень не больше d. Докажите, что его вершины можно покрасить правильным образом в d цветов, если выполнено одно из условий:

а) есть вершина степени $< d$;

б) есть вершина, при удалении которой граф теряет связность;

в) есть $d > 2$ и при удалении некоторых двух вершин граф теряет связность;

г) найдутся три вершины A, B, C такие, что A и C не соединены, B соединена с ними обеими, при удалении A и C граф остаётся связным.

2. (Теорема Брукса) Пусть $d > 2$ и все вершины связного графа имеют степень не больше d, граф не является полным. Докажите, что его вершины можно покрасить правильным образом в d цветов.

3. На плоскости расположено множество A, состоящее из нескольких прямых. Известно, что для любого его подмножества B, состоящего из $k^2 + 1$ ($k \geqslant 3$) прямых, можно выбрать k точек так, что любая прямая из множества B проходит хотя бы через одну из этих точек. Докажите, что и для всего множества A можно выбрать k точек так, чтобы любая прямая из A проходила хотя бы через одну из них них.

4. Докажите, что в графе с $2k$ вершинами и $k^2 + 1$ рёбрами найдётся по крайней мере k циклов длины 3.

Лепреконы

1ый день весны 2014 г.

Добавка

1. Пусть все вершины связного графа имеют степень не больше d. Докажите, что его вершины можно покрасить правильным образом в d цветов, если выполнено одно из условий:

а) есть вершина степени $< d$;

б) есть вершина, при удалении которой граф теряет связность;

в) есть $d > 2$ и при удалении некоторых двух вершин граф теряет связность;

г) найдутся три вершины A, B, C такие, что A и C не соединены, B соединена с ними обеими, при удалении A и C граф остаётся связным.

2. (Теорема Брукса) Пусть $d > 2$ и все вершины связного графа имеют степень не больше d, граф не является полным. Докажите, что его вершины можно покрасить правильным образом в d цветов.

3. На плоскости расположено множество A, состоящее из нескольких прямых. Известно, что для любого его подмножества B, состоящего из $k^2 + 1$ ($k \geqslant 3$) прямых, можно выбрать k точек так, что любая прямая из множества B проходит хотя бы через одну из этих точек. Докажите, что и для всего множества A можно выбрать k точек так, чтобы любая прямая из A проходила хотя бы через одну из них них.

4. Докажите, что в графе с $2k$ вершинами и $k^2 + 1$ рёбрами найдётся по крайней мере k циклов длины 3.

Лепреконы

1ый день весны 2014 г.

Добавка

1. Пусть все вершины связного графа имеют степень не больше d. Докажите, что его вершины можно покрасить правильным образом в d цветов, если выполнено одно из условий:

а) есть вершина степени $< d$;

б) есть вершина, при удалении которой граф теряет связность;

в) есть $d > 2$ и при удалении некоторых двух вершин граф теряет связность;

г) найдутся три вершины A, B, C такие, что A и C не соединены, B соединена с ними обеими, при удалении A и C граф остаётся связным.

2. (Теорема Брукса) Пусть $d > 2$ и все вершины связного графа имеют степень не больше d, граф не является полным. Докажите, что его вершины можно покрасить правильным образом в d цветов.

3. На плоскости расположено множество A, состоящее из нескольких прямых. Известно, что для любого его подмножества B, состоящего из $k^2 + 1$ ($k \geqslant 3$) прямых, можно выбрать k точек так, что любая прямая из множества B проходит хотя бы через одну из этих точек. Докажите, что и для всего множества A можно выбрать k точек так, чтобы любая прямая из A проходила хотя бы через одну из них них.

4. Докажите, что в графе с $2k$ вершинами и $k^2 + 1$ рёбрами найдётся по крайней мере k циклов длины 3.