

ГМТ + окружности

Часто полезно рассматривать **геометрическое место точек**, обладающих каким-нибудь свойством. Например, отрезок — по определению есть геометрическое место точек, находящихся между его концами. Используется это словосочетание настолько часто, что в русском языке получило общепринятое сокращение **ГМТ**.

Определение. Серединным перпендикуляром к отрезку AB называется прямая, проходящая через середину этого отрезка, и перпендикулярная ему.

1. Докажите, что серединный перпендикуляр — ГМТ равноудалённых от концов отрезка.

2. Докажите, что внутренняя биссектриса — ГМТ равноудалённых от сторон угла и расположенных внутри него. А что такое внешняя биссектриса?

Определение. Касательной к окружности называется прямая, которая имеет с ней ровно одну общую точку.

3. Касательная l касается окружности ω с центром в точке O в точке A . Докажите, что $l \perp OA$. Докажите и обратное: если прямая l проходит через точку A и перпендикулярна OA , то она касается окружности.

Определение. Окружность с центром O и радиусом R — ГМТ, удалённых от точки O на расстояние R .

Для данного треугольника ABC окружность называется *описанной*, если она проходит через все его вершины и *вписанной*, если касается всех его сторон, и расположена внутри него.

4. Докажите, что три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника ABC пересекаются в одной точке. Выведите из этого, что у любого треугольника существует единственная описанная окружность.

5. Докажите, что три биссектрисы произвольного треугольника пересекаются в одной точке. Выведите из этого, что у любого треугольника существует единственная вписанная окружность. А если считать, что стороны и треугольника не отрезки, а прямые (их содержащие), то существуют ли ещё аналоги вписанной окружности? Сколько? Чем являются их центры?

6. Найдите ГМТ X , удовлетворяющих неравенствам $AX \leq BX \leq CX$.

7. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите ГМТ X , для которых $AX + BX = CX + DX$.

8. Центр описанной окружности оказался на высоте, медиане или биссектрисе. В каких случаях можно сказать, что треугольник равнобедренный? Тот же вопрос про центр вписанной окружности.

Определение. Хордой окружности называется любой отрезок с концами, лежащими на окружности.

9. Касательная в точке C параллельна хорде AB . Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

10. Докажите, что ГМТ X , из которых данный отрезок AB виден под прямым углом есть окружность, построенная на AB , как на диаметре.

11. Докажите, что точка пересечения внутренних биссектрис, точки B и C , а также точка пересечения внешних биссектрис углов B и C лежат на одной окружности.

12. Из точки C к окружности провели касательные CA и CB . Тогда $CA = CB$. Докажите это и найдите из этого длину отрезка касательной из вершины A к вписанной окружности треугольника, если известно, что стороны треугольника равны a , b и c .