Лепреконы
18 января 2014 г.

Инварианты и полуинварианты

1. Круг разделён на 6 секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

2. В таблице n на n одна из угловых клеток закрашена чёрным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

3. В вершинах куба расставлены числа: 7 нулей и одна единица. За один ход разрешается прибавить по единице к числам в концах любого ребра куба. Можно ли добиться того, чтобы все числа стали равными? А можно ли добиться того, чтобы все числа делились на 3?

4. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т. п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

5. На доске выписаны числа $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/100$. Выбираем из написанных на доске два произвольных числа a и b, стираем их и пишем на доску число $a + b + ab$. Такую операцию проделываем 99 раз, пока не останется одно число. Какое это число? Найдите его и докажите, что оно не зависит от последовательности выбора чисел.

6. Можно ли доску размерами $4 \times N$ обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно один раз, и вернуться на исходное поле?

7. Петя разрезал прямоугольный лист бумаги по прямой. Затем он разрезал по прямой один из получившихся кусков. Затем он проделал то же самое с одним из трёх получившихся кусков и т. д. Докажите, что после достаточного количества разрезаний можно будет выбрать среди получившихся кусков 100 многоугольников с одинаковым числом вершин (например, 100 треугольников или 100 четырёхугольников и т. д.).

8. Два мудреца играют в следующую игру. Выписаны числа $0, 1, 2, \ldots, 1024$. Первый мудрец зачёркивает 512 чисел (по своему выбору), второй зачёркивает 256 из оставшихся, затем снова первый зачёркивает 128 чисел и т. д. На десятом шаге второй мудрец зачёркивает одно число; остаются два числа. После этого второй мудрец платит первому разницу между этими числами. Как выгоднее играть первому мудрецу? Как второму? Сколько уплатит второй мудрец первому, если оба будут играть наилучшим образом?

9. На шахматную доску произвольным образом уложили 32 доминошки (прямоугольника 1×2), так что доминошки не перекрываются. Затем к верхней правой угловой клетке справа прислонили еще одну свободную клетку. Разрешается вынимать любую доминошку, а затем класть её на две соседние пустые клетки. Докажите, что можно расположить все доминошки горизонтально.