Лепреконы
21 декабря 2013 г.

Метод математической индукции

1. Найдите в последовательности $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$ число, стоящее a) на 6-м; b) на 1994-м месте. Ответ объясните.

2. Докажите тождество: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

3. Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

4. Ученик Коля Васин при помощи метода математической индукции смог доказать, что в любом табуне все лошади одной масти. Если есть только одна лошадь, то она своей масти, так что база индукции верна. Для индуктивного перехода предположим, что есть n лошадей (с номерами от 1 до n). По индуктивному предположению лошади с номерами от 1 до $n-1$ одинаковой масти. Аналогично лошади с номерами от 2 до n также имеют одинаковую масть. Но лошади с номерами от 2 до $n-1$ не могут менять свою масть в зависимости от того как они сгруппированы — это лошади, а не хамелеоны. Поэтому все n лошадей должны быть одинаковой масти. Есть ли ошибка в этом рассуждении, и если есть, то какая?

5. Даны натуральные числа $x_1, \ldots, x_n$. Докажите, что число

$$(1 + x_1^2) \cdot (1 + x_2^2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n^2)$$

можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

6. Докажите, что если плоскость разбита на части прямыми и окружностями (всего n штук), то получившуюся карту можно раскрасить в два цвета так, что части, граничащие по дуге или отрезку, будут разного цвета.

7. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

8. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым другим одну партию. Доказать, что участников можно так занумеровать, что окажется, что ни один участник не проиграл непосредственно за ним следующему.

9. Известно, что $x + 1/x$ — целое число. Докажите, что $x^n + 1/x^n$ — также целое при любом целом n.

10. Доказать, что через n точек, не лежащих одновременно на одной прямой, можно провести хотя бы n различных прямых.

Лепреконы
21 декабря 2013 г.

Метод математической индукции

1. Найдите в последовательности $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$ число, стоящее a) на 6-м; b) на 1994-м месте. Ответ объясните.

2. Докажите тождество: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

3. Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

4. Ученик Коля Васин при помощи метода математической индукции смог доказать, что в любом табуне все лошади одной масти. Если есть только одна лошадь, то она своей масти, так что база индукции верна. Для индуктивного перехода предположим, что есть n лошадей (с номерами от 1 до n). По индуктивному предположению лошади с номерами от 1 до $n-1$ одинаковой масти. Аналогично лошади с номерами от 2 до n также имеют одинаковую масть. Но лошади с номерами от 2 до $n-1$ не могут менять свою масть в зависимости от того как они сгруппированы — это лошади, а не хамелеоны. Поэтому все n лошадей должны быть одинаковой масти. Есть ли ошибка в этом рассуждении, и если есть, то какая?

5. Даны натуральные числа $x_1, \ldots, x_n$. Докажите, что число

$$(1 + x_1^2) \cdot (1 + x_2^2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n^2)$$

можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

6. Докажите, что если плоскость разбита на части прямыми и окружностями (всего n штук), то получившуюся карту можно раскрасить в два цвета так, что части, граничащие по дуге или отрезку, будут разного цвета.

7. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

8. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым другим одну партию. Доказать, что участников можно так занумеровать, что окажется, что ни один участник не проиграл непосредственно за ним следующему.

9. Известно, что $x + 1/x$ — целое число. Докажите, что $x^n + 1/x^n$ — также целое при любом целом n.

10. Доказать, что через n точек, не лежащих одновременно на одной прямой, можно провести хотя бы n различных прямых.