Лепреконы
12 октября 2013 г.

Геометрия начало

Трудных наук нет, есть только трудные изложения, то есть неперевариваемые.
А. Н. Герцен

Первый признак равенства треугольников. Если у двух треугольников ABC и $A'B'C'$ равны соответственные углы $\angle A = \angle A'$ и прилежащие к ним стороны $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, то эти треугольники равны.

1. Докажите, что если в треугольнике ABC равны стороны AB и BC, то $\angle A = \angle C$.

Второй признак равенства треугольников. Если у двух треугольников ABC и $A'B'C'$ равны соответственные стороны $AB = A'B'$ и прилежащие к ним углы $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, то эти треугольники равны.

2. Докажите, что если у треугольнике ABC равны углы A и C, то равны и противолежащие им стороны BC и BA. Такие треугольники называются *равнобедренными.*

Определение. Пусть дан произвольный угол ABC. *Биссектрисой*[1] (да-да, с тремя «с») угла ABC называют прямую, проходящую через вершину угла B и составляющую равные углы с прямыми AB и BC.

3. Пусть дан угол ABC такой, что $0 < \angle ABC < 180°$. Докажите, что у него всегда существуют ровно две биссектрисы. Та, которая лежит «внутри» угла ABC называется *внутренней* биссектрисой угла ABC, а вторая — *внешней.* Докажите также, что стороны угла симметричны относительно биссектрисы угла.

Определения. Дан произвольный треугольник ABC.

- Опустим из точки A перпендикуляр AH на сторону BC. Прямая AH называется *высотой треугольника*[2] ABC, проведённой из вершины A.
- Внутренняя биссектриса угла BAC называется *внутренней биссектрисой* угла A треугольника ABC. Внешняя соответственно называется *внешней.* Обычно когда говорят, что проведена AL угла A, имеют ввиду, что проведена внутренняя биссектриса угла A, и точка L лежит на стороне BC.
- Отметим середину стороны BC, точку M. Прямая AM называется *медианой*[3] треугольника ABC, проведённой из вершины A.

Иногда, когда говорят про биссектрисы, высоты и медианы, имеют ввиду не соответственные прямые, а отрезки, соединяющие вершину с точкой пересечения соответственной прямой с противоположной стороной. Эту точку пересечения в таком случае называют *основанием* биссектрисы, высоты или медианы соответственно.

4. Докажите, что в прямоугольном треугольнике все высоты пересекаются в одной точке.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC$. Докажите, что высота, медиана и биссектриса проведённые из вершины B совпадают.

6. В треугольнике ABC из вершины B провели высоту, биссектрису и медиану. Докажите, что, если хотя бы две из трех проведённых линий совпали, то треугольник равнобедренный.

7. Про прямые a, b и c известно, что $a \parallel b$ и $b \parallel c$. Докажите, что $a \parallel c$.

8. Внутри острого угла AOB взята точка X. Пусть P и Q — точки симметричные X относительно прямых AO и BO соответственно. Докажите, что $\angle POQ = 2\angle AOB$. А, если точка X не внутри угла AOB, а снаружи? А что, если угол AOB может быть тупым?

9. В треугольнике ABC точка D — середина стороны BC, точка E — середина AD, причём $BE = BD$. Прямая CE пересекает сторону AB в точке K. Докажите, что $AK = EK$.

10. В треугольнике ABC биссектриса угла AE равна EC. Найдите углы треугольника, если известно, что $2AB = AC$.

---

[1] *bisector.*
[2] В английском варианте геометрическую высоту называют *altitude*, а не height, как можно было бы ожидать.
[3] *median*