Задачки с региональных олимпиад.

1. На координатной плоскости построены две параболы: $y = x^2 + 4$ и $y = -x^2 + 2x$. К ним проведены две общие касательные. Докажите, что четырёхугольник с вершинами в точках касания является параллелограммом.

2. Найти все натуральные числа, которые нельзя представить в виде $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$, где a и b натуральные.

3. Точки A, B, C, D лежат на окружности с центром I. Серединные перпендикуляры к отрезкам AD и BC пересекают прямую AB в точках P и Q. Докажите, что окружности, описанные около треугольников IPQ и ICD касаются.

4. В стране 64 города. Широта и долгота каждого города измеряется целым числом градусов от 1 до 8. Два города соединены двусторонним авиарейсом тогда и только тогда, когда они либо имеют одинаковую широту, а долгота отличается на 1°, либо имеют одинаковую долготу, а их широта отличается на 1°. Какое наибольшее число рейсов можно отменить так, чтобы всё равно из любого города в любой можно было попасть, совершив не более 14 рейсов?

5. Существуют ли такие 4 многочлена, что сумма любых трёх имеет хотя бы один корень, а сумма любых двух корней не имеет?

6. Найдите все четвёрки целых чисел x, y, z, t, что их сумма равна 0, а $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$ является квадратом целого числа.

7. В стране n городов, некоторые из которых соединены дорогами. Из каждого города можно попасть в каждый, причём единственным способом. Докажите, что можно закрыть не более $\frac{n}{51}$ городов так, чтобы для любых двух оставшихся городов A и B было выполнено условие: либо из A нельзя проехать в B, либо из A можно проехать в B по не более чем 49 дорогам.

8. Шахматную доску разбили на двуклеточные прямоугольники. Каждый из них надо покрасить в какой-нибудь цвет так, чтобы любые две клетки, отстоящие друг от друга на ход коня, были покрашены в разные цвета. Какого наименьшего числа цветов должно хватить?

9. В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. Известно, что в каждой из деревень число женихов и невест не превосходит половины от общего числа женихов и невест всего района. Докажите, что всех этих людей можно поженить так, что в каждой паре муж и жена будут из разных деревень.

10. Каждый из узлов бесконечного клетчатого листа бумаги раскрашен в один из двух цветов. Докажите, что существует бесконечное одноцветное множество узлов, имеющее центр симметрии.

11. Двое игроков по очереди заполняют отличными от нуля числами таблицу $(2n+1) \times (2n+1)$. В конце игры первому засчитывается число строк, сумма в которых равна 0, а второму — число столбцов с суммой 0. Выигрывает тот, у кого засчитанное число больше. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе выигрыш?

12. Имеются три комиссии бюрократов. Известно, что для каждой пары бюрократов из разных комиссий среди членов оставшейся комиссии есть ровно 10 бюрократов, которые знакомы с обоими, и ровно 10 бюрократов, которые незнакомы с обоими. Найдите общее число бюрократов в комиссиях.