Олимпиада 11.2

1. Дано натуральное $n > 1$. Докажите, что найдутся такие n последовательных натуральных чисел, что их произведение делится на все простые числа, не превосходящие $2n + 1$, и не делится ни на одно другое простое число.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, писанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

3. Многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 3$ имеет n вещественных корней $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, причём $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \ldots < x_n - x_{n-1}$. Докажите, что максимум функции $y = |P(x)|$ на отрезке $[x_1, x_n]$ достигается в точке, принадлежащей отрезку $[x_{n-1}, x_n]$.

4. По кругу стоят 2009 целых неотрицательных чисел, не превышающих 100. Разрешается прибавить по 1 к двум соседним числам, причём с любыми двумя соседними числами эту операцию можно проделать не более k раз. При каком наименьшем k все числа гарантированно можно сделать равными?

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 14 апреля 2014 г.

Олимпиада 11.2

1. Дано натуральное $n > 1$. Докажите, что найдутся такие n последовательных натуральных чисел, что их произведение делится на все простые числа, не превосходящие $2n + 1$, и не делится ни на одно другое простое число.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, писанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

3. Многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 3$ имеет n вещественных корней $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, причём $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \ldots < x_n - x_{n-1}$. Докажите, что максимум функции $y = |P(x)|$ на отрезке $[x_1, x_n]$ достигается в точке, принадлежащей отрезку $[x_{n-1}, x_n]$.

4. По кругу стоят 2009 целых неотрицательных чисел, не превышающих 100. Разрешается прибавить по 1 к двум соседним числам, причём с любыми двумя соседними числами эту операцию можно проделать не более k раз. При каком наименьшем k все числа гарантированно можно сделать равными?

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 14 апреля 2014 г.

Олимпиада 11.2

1. Дано натуральное $n > 1$. Докажите, что найдутся такие n последовательных натуральных чисел, что их произведение делится на все простые числа, не превосходящие $2n + 1$, и не делится ни на одно другое простое число.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, писанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

3. Многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 3$ имеет n вещественных корней $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, причём $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \ldots < x_n - x_{n-1}$. Докажите, что максимум функции $y = |P(x)|$ на отрезке $[x_1, x_n]$ достигается в точке, принадлежащей отрезку $[x_{n-1}, x_n]$.

4. По кругу стоят 2009 целых неотрицательных чисел, не превышающих 100. Разрешается прибавить по 1 к двум соседним числам, причём с любыми двумя соседними числами эту операцию можно проделать не более k раз. При каком наименьшем k все числа гарантированно можно сделать равными?