Олимпиада 11.1

1. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, которые не пересекаются вне городов. В каждом городе установлена табличка, на которой указана минимальная дли-на маршрута, выходящего из этого города и проходящего по всем остальным городам страны (маршрут может про-ходить по некоторым городам больше одного раза и не обязан возвращаться в исходный город). Докажите, что любые два числа на табличках отличаются не более, чем в полтора раза.

2. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_1 \in (1,2)$ и $a_{k+1} = a_k + \dfrac{k}{a_k}$ при любом натуральном k. Докажите, что в ней не может существовать более одной пары членов с целой суммой.

3. В треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках ABC, ABD, ACD лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины рёбер AB, AC, AD.

4. На плоскости отмечены все точки с целыми координатами (x, y) такие, что $x^2 + y^2 \leqslant 10^{10}$. Двое играют в игру (ходят по очереди). Первым ходом первый игрок ставит фишку в какую-то отмеченную точку и стирает её. Затем каждым очередным ходом игрок переносит фишку в какую-то другую отмеченную точку и стирает её. При этом длины ходов должны всё время увеличиваться; кроме того, запрещено делать ход из точки в симметричную ей относительно центра. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из играющих может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 14 апреля 2014 г.

Олимпиада 11.1

1. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, которые не пересекаются вне городов. В каждом городе установлена табличка, на которой указана минимальная дли-на маршрута, выходящего из этого города и проходящего по всем остальным городам страны (маршрут может про-ходить по некоторым городам больше одного раза и не обязан возвращаться в исходный город). Докажите, что любые два числа на табличках отличаются не более, чем в полтора раза.

2. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_1 \in (1,2)$ и $a_{k+1} = a_k + \dfrac{k}{a_k}$ при любом натуральном k. Докажите, что в ней не может существовать более одной пары членов с целой суммой.

3. В треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках ABC, ABD, ACD лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины рёбер AB, AC, AD.

4. На плоскости отмечены все точки с целыми координатами (x, y) такие, что $x^2 + y^2 \leqslant 10^{10}$. Двое играют в игру (ходят по очереди). Первым ходом первый игрок ставит фишку в какую-то отмеченную точку и стирает её. Затем каждым очередным ходом игрок переносит фишку в какую-то другую отмеченную точку и стирает её. При этом длины ходов должны всё время увеличиваться; кроме того, запрещено делать ход из точки в симметричную ей относительно центра. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из играющих может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?