Идея линейности.

Эзотерическое знание. Посвящённые знают, что $p|C_{p^n}^k$, p — простое $(0 < k < p^n)$.

1. По кругу стоят 128 целых чисел. За один ход все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через несколько ходов все числа станут делиться на 128.

(a) Сначала рассмотрите случай единицы и 127 нулей. Что получится через 7 ходов? Докажите, что через несколько ходов все числа станут чётными.

(b) Определим понятие суммы двух расстановок чисел по кругу. Пусть P — наша операция замены. Докажите, что P(от суммы)=сумме P-шек.

2. (Интерполяционный многочлен Лагранжа.) Докажите что для любого набора из $n+1$ точки с разными абсциссами найдётся единственный многочлен степени не выше n, который в этих точках принимает заданные значения.

Указание. Сравним с предыдущей задачей. Что здесь является аналогами 1) операции; 2) суммы расстановок; 3) умножения расстановки на число; 4) специфических расстановок?

3. По окружности расставлены p целых чисел (p — простое). За ход из каждого числа вычитается его левый сосед. Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2013}.

4. (Китайская теорема об остатках.) **(a)** Даны попарно взаимно простые числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и произвольные $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что существует такое число A, что $A \equiv a_i \pmod{m_i}$.

(b) Число A определено однозначно по модулю $m_1 \ldots m_n$.

Для многочлена $P(x)$ рассмотрим последовательность сумм

$$S_n = S_n(P) = P(1) + \cdots + P(n).$$

Интересно найти явную формулу для $S_n(P)$ (особенно для $P(x) = x^k$).

Определение. Дискретной производной (или разностным многочленом) многочлена $f(x)$ называется многочлен $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Как связаны степени многочлена и его разностного многочлена?

5. **(a)** Пусть для каждого $k = 0, 1, 2\ldots$ имеется многочлен $f_k(x)$, $\deg f_k(x) = k$. Докажите, что произвольный многочлен $g(x)$ можно представить в виде линейной комбинации многочленов $f_k(x)$.

(b) Докажите, что каждый многочлен равен дискретной производной некоторого многочлена.

6. Докажите, что если $\deg P(x) = k$, то $S_n(P)$ есть многочлен степени $k+1$ (то есть $S_n = g(n)$ для некоторого многочлена $g(x)$ степени $k+1$). Для примера вычислите (а не докажите по индукции!) $1^3 + \cdots + n^3$.

7. **(a)** **Определение.** Икс в убывающей степени $m \geqslant 0$: $x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)$.

(b) Докажите, что $(x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}$;

(c) Найдите $0^{\underline{m}} + 1^{\underline{m}} + 2^{\underline{m}} + 3^{\underline{m}} + \cdots + (n-1)^{\underline{m}}$. Есть ли причина тут сумме начинаться с 0, а не с 1?

(d) Решите еще раз задачу 6.

8. Есть вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$, среди них ровно два одинаковых. Напишите выражение от $a_1, \ldots, a_n$, значение которого равно этим одинаковым числам.

9. По окружности расставлены p^n целых чисел (p — простое). Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2013}, если за ход из каждого числа вычитается его

(a) l-ый сосед слева, l фиксировано;

(b) l-ый сосед слева, l может меняться от хода к ходу!