18 марта 2014 г.

Тренировочная олимпиада

1. Квадратные трёхчлены $P(x) = x^2 + ax + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ таковы, что уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ не имеет действительных корней. Докажите, что $b \neq d$.

2. Найдите все бесконечные ограниченные последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ для всех членов которых, начиная с третьего, выполнено

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{\text{НОД}(a_{n-1}, a_{n-2})}.$$

3. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом A, равным 60°. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABD. Прямая AO пересекает биссектрису внешнего угла C в точке K. Найдите отношение AO/OK.

4. В наборе из 17 внешне одинаковых монет две фальшивых, отличающихся от остальных по весу. Известно, что суммарный вес двух фальшивых монет вдвое больше веса настоящей. Всегда ли можно ли определить пару фальшивых монет, совершив 5 взвешиваний на чашечных весах без гирь? (Определять, какая из фальшивых тяжелее, не требуется.)

---

18 марта 2014 г.

Тренировочная олимпиада

1. Квадратные трёхчлены $P(x) = x^2 + ax + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ таковы, что уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ не имеет действительных корней. Докажите, что $b \neq d$.

2. Найдите все бесконечные ограниченные последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ для всех членов которых, начиная с третьего, выполнено

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{\text{НОД}(a_{n-1}, a_{n-2})}.$$

3. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом A, равным 60°. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABD. Прямая AO пересекает биссектрису внешнего угла C в точке K. Найдите отношение AO/OK.

4. В наборе из 17 внешне одинаковых монет две фальшивых, отличающихся от остальных по весу. Известно, что суммарный вес двух фальшивых монет вдвое больше веса настоящей. Всегда ли можно ли определить пару фальшивых монет, совершив 5 взвешиваний на чашечных весах без гирь? (Определять, какая из фальшивых тяжелее, не требуется.)

---

18 марта 2014 г.

Тренировочная олимпиада

1. Квадратные трёхчлены $P(x) = x^2 + ax + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ таковы, что уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ не имеет действительных корней. Докажите, что $b \neq d$.

2. Найдите все бесконечные ограниченные последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ для всех членов которых, начиная с третьего, выполнено

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{\text{НОД}(a_{n-1}, a_{n-2})}.$$

3. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом A, равным 60°. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABD. Прямая AO пересекает биссектрису внешнего угла C в точке K. Найдите отношение AO/OK.

4. В наборе из 17 внешне одинаковых монет две фальшивых, отличающихся от остальных по весу. Известно, что суммарный вес двух фальшивых монет вдвое больше веса настоящей. Всегда ли можно ли определить пару фальшивых монет, совершив 5 взвешиваний на чашечных весах без гирь? (Определять, какая из фальшивых тяжелее, не требуется.)