Разнобой

1. При каких натуральных n существует бесконечно много пар натуральных чисел a и b таких, что $[a,b] = (a-b)^n$?

2. Дано нечётное простое число p. Найдите сумму остатков от деления на p^2 чисел 1^p, 2^p, ..., $(p-1)^p$.

3. Решите в натуральных числах уравнение $k^m + m^n = k^n + 1$.

4. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно, причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что $\angle DHQ = 90^\circ$.

5. Докажите, что многочлен

$$(1x^8 + 3x^7 + 2x^6 - 9x^5 - 5x^4 - 7x^3 - 1x^2 + 7x + 9)^{2014}$$

имеет отрицательный коэффициент.

6. Даны натуральные числа n и k, что $k \leqslant n$. Докажите, что числа $C_n^k, C_{n+1}^k, \ldots, C_{n+k}^k$ взаимно просты в совокупности.

---

7. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется условие $f(x) + 2f(1-x) = \sin x$.

8. Пусть $p, d \in \mathbb{P}$, $d \mid 2^p + 1$, $d \neq 3$. Докажите, что $d = 2kp + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.

9. Пусть $(x^{1958} + x^{1957} + 2)^{1959} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Найдите $a_0 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} + a_3 - \frac{a_4}{2} - \frac{a_5}{2} + \ldots$.

10. Числа p и $2p+1$ простые. В двух кучах суммарно $2p+1$ камень. Каждым ходом из кучи, в которой чётное число камней, половина перекладывается в другую кучу. Докажите, что для любого натурального $k < 2p+1$ найдётся момент, когда в одной из куч будет ровно k камней.

11. Докажите, что число $n^7 + 7$ не является полным квадратом.

12. Пусть L — основание внутренней биссектрисы угла A треугольника ABC, а K – внешней. Пусть P — точка пересечения касательных к описанной окружности в точках B и C. Перпендикуляр в точке L к BC пересекает AP в точке Q. Докажите, что Q лежит на средней линии треугольника LKP.