

Ориентированные графы

Определение. Назовём ориентированный граф *сильно связным*, если из любой вершины существует путь до любой другой.

Определение. Назовём ориентированный граф *транзитивным*, если в нём нет циклических маршрутов (идуших по стрелкам).

Определение. Назовём ориентированный граф *турниром*, если между любыми двумя вершинами есть ребро ровно в одну сторону.

1. В стране несколько городов, некоторые из них соединены дорогами с односторонним движением. Докажите, что можно разбить все города на области, так что города в одной области и дороги между ними образовывали сильно связный граф, а циклов, проходящих по городам из разных областей не существовало.

2. (а) Ориентированный граф на n вершинах сильно связан. Докажите, что в нём можно оставить не более $2n - 2$ рёбер так, чтобы он остался сильно связным.

(б) Ориентированный граф на n вершинах сильно связан. Кроме того, известно, что существуют вершины u и v такие, что есть ребро uv , но нет ребра vu . Докажите, что можно оставить не более $2n - 3$ рёбер так, чтобы граф остался сильно связным.

3. Дан сильно связный турнир на $n \geq 3$ вершинах.

(а) Докажите, что в нём есть цикл, проходящий по всем вершинам.

(б) Докажите, что в нём есть простой цикл (не проходящий ни по какой вершине дважды) любой длины, меньшей n (ну, и хотя бы длины 3).

(с) Докажите, что через любую его вершину проходит простой цикл любой длины, меньшей n .

(д) Какое наименьшее количество простых циклов может быть в сильно связном турнире на n вершинах?

4. Докажите, что в любом турнире нечётное число *гамильтоновых* путей (то есть, путей, проходящих по всем вершинам по одному разу).

Ориентированные графы

Определение. Назовём ориентированный граф *сильно связным*, если из любой вершины существует путь до любой другой.

Определение. Назовём ориентированный граф *транзитивным*, если в нём нет циклических маршрутов (идуших по стрелкам).

Определение. Назовём ориентированный граф *турниром*, если между любыми двумя вершинами есть ребро ровно в одну сторону.

1. В стране несколько городов, некоторые из них соединены дорогами с односторонним движением. Докажите, что можно разбить все города на области, так что города в одной области и дороги между ними образовывали сильно связный граф, а циклов, проходящих по городам из разных областей не существовало.

2. (а) Ориентированный граф на n вершинах сильно связан. Докажите, что в нём можно оставить не более $2n - 2$ рёбер так, чтобы он остался сильно связным.

(б) Ориентированный граф на n вершинах сильно связан. Кроме того, известно, что существуют вершины u и v такие, что есть ребро uv , но нет ребра vu . Докажите, что можно оставить не более $2n - 3$ рёбер так, чтобы граф остался сильно связным.

3. Дан сильно связный турнир на $n \geq 3$ вершинах.

(а) Докажите, что в нём есть цикл, проходящий по всем вершинам.

(б) Докажите, что в нём есть простой цикл (не проходящий ни по какой вершине дважды) любой длины, меньшей n (ну, и хотя бы длины 3).

(с) Докажите, что через любую его вершину проходит простой цикл любой длины, меньшей n .

(д) Какое наименьшее количество простых циклов может быть в сильно связном турнире на n вершинах?

4. Докажите, что в любом турнире нечётное число *гамильтоновых* путей (то есть, путей, проходящих по всем вершинам по одному разу).