Разнобой

1. Докажите, что число $\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}+\ldots+\sqrt{p_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — попарно различные простые числа, всегда иррационально.

2. На плоскости даны окружность S, её центр O, точка A, лежащая на окружности S, и точка O_1, лежащая внутри S. Известно, что существует четырехугольник $ABCD$, вписанный в S и описанный вокруг некоторой окружности S_1 с центром O_1. При помощи одной линейки постройте еще одну вершину этого четырехугольника.

3. В таблице $m \times n$ $(m, n > 1)$ расставлены знаки «+» и «−». За один ход разрешается поменять знаки на противоположные в любой строке или столбце. Докажите, что если таблица такими действиями не приводится к таблице из одних плюсов, то в ней есть квадрат 2×2, который тоже не приводится.

4. Пусть $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ — биекция. Докажите, что найдутся две такие биекции $g, h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, что $f(x) = g(x)+h(x)$ для всех $x \in Z$.

5. В течение 92 дней авиакомпания ежедневно выполняла по десять рейсов. За сутки каждый самолёт выполнял не более одного рейса. Известно, что для любых двух дней имеется один и только один самолёт, летавший в оба эти дня. Докажите, что имеется самолёт, летавший во все дни.

6. Точка M — середина основания AB трапеции $ABCD$, в которой $AC = BC$. Прямая k, проходящая через M, пересекает прямые AD и BD в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые CP и CQ симметричны относительно прямой CM.

7. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\quad 2^{(2^n-1)n}-1 \,\vdots\, (2^n-1)^2$.

8. Пусть $a, b, c \geqslant 0$. Докажите неравенство $(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ac+a^2) \geqslant (ab+bc+ca)^3$.

9. В окружности проведены диаметр AB и хорда CD, перпендикулярная AB. Произвольная окружность касается хорды CD и дуги CBD. Докажите, что отрезок касательной к этой окружности, проведенной из точки A, равен AC.

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 6 марта 2014 г.

Разнобой

1. Докажите, что число $\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}+\ldots+\sqrt{p_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — попарно различные простые числа, всегда иррационально.

2. На плоскости даны окружность S, её центр O, точка A, лежащая на окружности S, и точка O_1, лежащая внутри S. Известно, что существует четырехугольник $ABCD$, вписанный в S и описанный вокруг некоторой окружности S_1 с центром O_1. При помощи одной линейки постройте еще одну вершину этого четырехугольника.

3. В таблице $m \times n$ $(m, n > 1)$ расставлены знаки «+» и «−». За один ход разрешается поменять знаки на противоположные в любой строке или столбце. Докажите, что если таблица такими действиями не приводится к таблице из одних плюсов, то в ней есть квадрат 2×2, который тоже не приводится.

4. Пусть $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ — биекция. Докажите, что найдутся две такие биекции $g, h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, что $f(x) = g(x)+h(x)$ для всех $x \in Z$.

5. В течение 92 дней авиакомпания ежедневно выполняла по десять рейсов. За сутки каждый самолёт выполнял не более одного рейса. Известно, что для любых двух дней имеется один и только один самолёт, летавший в оба эти дня. Докажите, что имеется самолёт, летавший во все дни.

6. Точка M — середина основания AB трапеции $ABCD$, в которой $AC = BC$. Прямая k, проходящая через M, пересекает прямые AD и BD в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые CP и CQ симметричны относительно прямой CM.

7. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\quad 2^{(2^n-1)n}-1 \,\vdots\, (2^n-1)^2$.

8. Пусть $a, b, c \geqslant 0$. Докажите неравенство $(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ac+a^2) \geqslant (ab+bc+ca)^3$.

9. В окружности проведены диаметр AB и хорда CD, перпендикулярная AB. Произвольная окружность касается хорды CD и дуги CBD. Докажите, что отрезок касательной к этой окружности, проведенной из точки A, равен AC.