Добавка изогонального сопряжения

1. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Точки X и Y также изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Докажите, что точка пересечения прямых PX и QY изогонально сопряжена точке пересечения прямых PY и QX.

2. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

3. Дан треугольник ABC. Точки D и E на прямой AB (порядок точек $D-A-B-E$) таковы, что $AD = AC$ и $BE = BC$. Биссектрисы углов A и B пересекают стороны в точках P и Q, а описанную окружность треугольника ABC в точках M и N соответственно. Прямые, соединяющие A с центром описанной окружности треугольника BME и B с центром описанной окружности треугольника AND, пересекаются в точке X. Докажите, что $CX \perp PQ$.

4. Дан остроугольный треугольник ABC такой, что $AC > BC$. В нем проведена высота CF. На прямой AB отмечена точка P такая, что $AF = FP$. Пусть H, O, M — ортоцентр, центр описанной окружности и середина стороны BC соответственно. Обозначим через X точку пересечения прямых BC и HP. Докажите, что точки O, F, M, X лежат на одной окружности.

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 3 марта 2014 г.

Добавка изогонального сопряжения

1. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Точки X и Y также изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Докажите, что точка пересечения прямых PX и QY изогонально сопряжена точке пересечения прямых PY и QX.

2. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

3. Дан треугольник ABC. Точки D и E на прямой AB (порядок точек $D-A-B-E$) таковы, что $AD = AC$ и $BE = BC$. Биссектрисы углов A и B пересекают стороны в точках P и Q, а описанную окружность треугольника ABC в точках M и N соответственно. Прямые, соединяющие A с центром описанной окружности треугольника BME и B с центром описанной окружности треугольника AND, пересекаются в точке X. Докажите, что $CX \perp PQ$.

4. Дан остроугольный треугольник ABC такой, что $AC > BC$. В нем проведена высота CF. На прямой AB отмечена точка P такая, что $AF = FP$. Пусть H, O, M — ортоцентр, центр описанной окружности и середина стороны BC соответственно. Обозначим через X точку пересечения прямых BC и HP. Докажите, что точки O, F, M, X лежат на одной окружности.