

Комбинаторика

1. У сейфа несколько замков. Ключи от них раздали членам комиссии из 11 человек (от одного замка ключи могут быть у нескольких человек, у одного члена комиссии может быть несколько ключей.) Известно, что любые 5 членов комиссии открыть все замки не смогут, а любые 6 — смогут. Какое минимальное возможное количество замков?

2. В некоторых клетках таблицы 50×50 расставили 1 и -1 . Оказалось, что сумма всех чисел в таблице по модулю не превосходит 100. Докажите, что найдётся квадрат 25×25 , сумма чисел в котором не превосходит 50.

3. В некоторых клетках таблицы $2n \times 2n$ расставлено m звёздочек. При каком наибольшем m можно гарантированно вычеркнуть n строк и n столбцов так, чтобы все звёздочки оказались вычеркнуты?

4. По кругу приготовлены места для 10 человек (у каждого из них своё место). Пришедший первым Петя сел не на своё место, а на соседнее по часовой стрелке. После чего каждый следующий приходящий садился либо за свой стол, либо, если оно занято, шёл по часовой стрелке от своего места до первого свободного и садился за него. Сколько вариантов рассадки могло в таком случае получиться?

5. В компании из 100 человек среди любых 50 найдётся один, знакомый со всеми. Докажите, что в этой компании есть 52 человека, которые попарно знакомы между собой.

6. В городе N каждый из n человек живёт в своей квартире. (Фантастика!) В один прекрасный день выяснилось, что они хотели бы жить по-другому, но по-прежнему на каждую квартиру был ровно один соискатель. Но в городском управлении жилищными делами принимают только заявки в виде двойного обмена (двое меняются квартирами друг с другом). Кроме того, никто не может делать два обмена в один день. Какого наименьшего количества дней заведомо хватит, чтобы переселиться нужным образом?

7. В комнате стоят несколько сундуков, в некоторых из них лежат ключи. Кроме того, у игрока есть некоторый набор ключей на руках. Далее игрок открывает одним из ключей сундук, после чего этим ключом пользоваться уже не может, но может взять все ключи, которые лежат в открытом сундуке. Известно, в каком сундуке какой ключ лежит. А ещё про любой ключ и любой сундук известно, способен ли этот ключ открыть этот сундук. Известно, что если бы все ключи были бы изначально на руках у игрока, то он смог бы открыть все сундуки. И, наконец, известно, что игрок может открыть любой сундук. (Возможно, предварительно открыв ещё несколько сундуков) Докажите, что игрок может открыть все сундуки.