

Первый-первый разнобой полтора года спустя

1. Докажите неравенство для $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$:

$$\frac{(a_1 + b_1) \dots (a_n + b_n)}{2^{n-1}} + \frac{1}{a_1 b_1} + \dots + \frac{1}{a_n b_n} \geq n + 2.$$

2. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC нашлись такие точки D, E, F , что центр вписанной окружности треугольника DEF совпадает с центром вписанной окружности ABC , а радиус в 2 раза меньше. Докажите, что тогда ABC — правильный.

3. Есть доска 2006×2006 клеток. Рассмотрим наименьшее m такое, что можно вырезать из этой доски m фигурок, изображённых справа так, что из оставшейся фигуры нельзя вырезать ни одной. Докажите, что $m < 340000$.



4. Решите в вещественных числах уравнение $x + \frac{2009}{x} = [x] + \frac{2009}{[x]}$.

5. В каждой вершине графа находится лампочка. За один шаг можно поменять состояние на противоположное какой-то из лампочек и всех ее соседей. Изначально все лампочки выключены. Федя смог добиться того, чтобы они все были включены за s шагов, а Лёша — за t . Докажите, что $s - t$ чётно.

6. Найдите все тройки натуральных чисел (n, a, b) такие, что $n^a + 1$ делится на $n^b - 1$.

Первый-первый разнобой полтора года спустя

1. Докажите неравенство для $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$:

$$\frac{(a_1 + b_1) \dots (a_n + b_n)}{2^{n-1}} + \frac{1}{a_1 b_1} + \dots + \frac{1}{a_n b_n} \geq n + 2.$$

2. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC нашлись такие точки D, E, F , что центр вписанной окружности треугольника DEF совпадает с центром вписанной окружности ABC , а радиус в 2 раза меньше. Докажите, что тогда ABC — правильный.

3. Есть доска 2006×2006 клеток. Рассмотрим наименьшее m такое, что можно вырезать из этой доски m фигурок, изображённых справа так, что из оставшейся фигуры нельзя вырезать ни одной. Докажите, что $m < 340000$.



4. Решите в вещественных числах уравнение $x + \frac{2009}{x} = [x] + \frac{2009}{[x]}$.

5. В каждой вершине графа находится лампочка. За один шаг можно поменять состояние на противоположное какой-то из лампочек и всех ее соседей. Изначально все лампочки выключены. Федя смог добиться того, чтобы они все были включены за s шагов, а Лёша — за t . Докажите, что $s - t$ чётно.

6. Найдите все тройки натуральных чисел (n, a, b) такие, что $n^a + 1$ делится на $n^b - 1$.