По мотивам недавних олимпиад

1. Назовём натуральное число *влюблённым*, если в его десятичной записи участвуют только единицы. Существует ли такой квадратный трёхчлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что для любого влюблённого числа a число $P(a)$ также является влюблённым?

2. На доске в ряд выписаны 2014 ненулевых чисел с общей суммой, равной нулю. Маша и Дима играют в следующую игру. Каждый игрок своим ходом переписывает себе какое-то из крайних чисел и затем стирает его с доски. Ходят по очереди, начинает Маша. Может ли Маша играть так, чтобы независимо от Димы (кроме как своими ходами на него воздействовать она не может) сумма переписанных ею чисел была положительной?

3. Пусть $p > 2$ — целое число, не делящееся на 3. Докажите, что существуют такие целые числа a_1, a_2, …, a_k, что $-p/2 < a_i < p/2$ и для некоторого натурального m

$$\frac{p-a_1}{|a_1|}\cdot\frac{p-a_2}{|a_2|}\cdot\ldots\cdot\frac{p-a_k}{|a_k|}=3^m.$$

4. Натуральные числа m и n настолько непохожи друг на друга, что даже не имеют общих делителей, больших единицы. Отрезок $[0,1]$ разбит на $m+n$ одинаковых отрезков. Постарайтесь доказать, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из $m+n-2$ чисел

$$\frac{1}{m},\frac{2}{m},\ldots,\frac{m-1}{m},\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}.$$

5. На клетчатой доске размером $2\times n$ клеток некоторые клетки закрашиваются в чёрный цвет. Раскраска называется правильной, если среди закрашенных нет двух соседних клеток. (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону.) Пусть A_n — количество правильных раскрасок с чётным числом закрашенных клеток, B_n — количество правильных раскрасок с нечётным числом закрашенных клеток. Найдите $A_n - B_n$.

6. В остроугольном треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D. Обозначим через O_1 и O_2 центры описанных окружностей треугольников ABD и ACD соответственно. Докажите, что прямой, соединяющей центр описанной окружности треугольника ABC и ортоцентр треугольника O_1O_2D, не суждено встретиться с прямой, содержащей сторону BC.

7. Докажите, что в графе с $2k$ вершинами и k^2+1 рёбрами найдётся по крайней мере k циклов длины 3. Спасибо!

8. Пусть число $\alpha > 1$ таково, что $\alpha^3 = \alpha^2 + 1$. Рассмотрим всевозможные конечные суммы чисел 1, α, α^2, α^3, …, в которые каждое из этих слагаемых входит не больше одного раза. Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, пусть даже совсем маленькое, что любые две различные из этих сумм отличаются хотя бы на ε.