

3 февраля 2014 г.

Разной по тригонометрии

1. Даны различные натуральные числа a, b . На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c , отличное от a, b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

2. Углы треугольника α, β, γ удовлетворяют неравенствам $\sin \alpha > \cos \beta$, $\sin \beta > \cos \gamma$, $\sin \gamma > \cos \alpha$. Докажите, что треугольник остроугольный.

3. Существует ли такое вещественное α , что число $\cos \alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 5\alpha$ рациональны?

4. Вычислите

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x) dx.$$

5. Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \sin x + a = bx, \\ \cos x = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение

6. Известно число $\sin \alpha$. Какое наибольшее число значений может принимать а) $\sin \frac{\alpha}{2}$, б) $\sin \frac{\alpha}{3}$?

7. Тангенсы углов треугольника — натуральные числа. Чему они могут быть равны?

8. Докажите, что при всех x , $0 < x < \pi/3$, справедливо неравенство

$$\sin 2x + \cos x > 1.$$

9. Для заданных натуральных чисел $k_0 < k_1 < k_2$ выясните, какое наименьшее число корней на промежутке $[0; 2\pi)$ может иметь уравнение вида

$$\sin k_0 x + A_1 \sin k_1 x + A_2 \sin k_2 x = 0,$$

где $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$.