

3 февраля 2014 г.

## Разной по тригонометрии

1. Даны различные натуральные числа  $a, b$ . На координатной плоскости нарисованы графики функций  $y = \sin ax$ ,  $y = \sin bx$  и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число  $c$ , отличное от  $a, b$  и такое, что график функции  $y = \sin cx$  проходит через все отмеченные точки.

2. Углы треугольника  $\alpha, \beta, \gamma$  удовлетворяют неравенствам  $\sin \alpha > \cos \beta$ ,  $\sin \beta > \cos \gamma$ ,  $\sin \gamma > \cos \alpha$ . Докажите, что треугольник остроугольный.

3. Существует ли такое вещественное  $\alpha$ , что число  $\cos \alpha$  иррационально, а все числа  $\cos 2\alpha$ ,  $\cos 3\alpha$ ,  $\cos 4\alpha$ ,  $\cos 5\alpha$  рациональны?

4. Вычислите

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x) dx.$$

5. Числа  $a$  и  $b$  таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \sin x + a = bx, \\ \cos x = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение

6. Известно число  $\sin \alpha$ . Какое наибольшее число значений может принимать а)  $\sin \frac{\alpha}{2}$ , б)  $\sin \frac{\alpha}{3}$ ?

7. Тангенсы углов треугольника — натуральные числа. Чему они могут быть равны?

8. Докажите, что при всех  $x$ ,  $0 < x < \pi/3$ , справедливо неравенство

$$\sin 2x + \cos x > 1.$$

9. Для заданных натуральных чисел  $k_0 < k_1 < k_2$  выясните, какое наименьшее число корней на промежутке  $[0; 2\pi)$  может иметь уравнение вида

$$\sin k_0 x + A_1 \sin k_1 x + A_2 \sin k_2 x = 0,$$

где  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ .