Разнобой по геометрии

1. Угол при вершине A равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) равен $30°$. На сторонах AB и AC взяты точки Q и P соответственно так, что $\angle QPC = 45°$ и $PQ = BC$. Докажите, что $BC = CQ$.

2. Центры четырёх окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 лежат на окружности S. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и B_1. Аналогично опряделяются точки A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4. Причём точки A_i лежат на окружности S, а B_i различны и лежат внутри неё. Докажите, что $B_1B_2B_3B_4$ — прямоугольник.

3. Через точку внутри прямоугольного параллелепипеда провели три плоскости, параллельные его граням. При это он оказался разбитым на восемь меньших параллелепипедов. Докажите, что по крайней мере у четырёх из этих параллелепипедов объём не превышает $\frac{1}{8}$ объёма исходного параллелпипеда.

4. Внутри острого угла XAY взята точка D, а на его сторонах AX и AY — точки B и C соответственно так, что $\angle ABC = \angle XBD$ и $\angle ACB = \angle YCD$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке AD.

5. В треугольнике ABC с острым углом A проведены биссектриса AE и высота BH. Известно, что $\angle AEB = 45°$. Найдите угол EHC.

6. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки P, Q и R расположены так, что основания перпендикуляров, опущенных из них на каждую из прямых AB, BC и AC, принадлежат отрезкам AB, BC и CA соответственно. Докажите, что площадь треугольника PQR не превосходит площади треугольника ABC.

7. В равнобедренную трапецию $ABCD$ ($AB = CD$) вписана окружность. Пусть M — точка касания окружности со стороной CD, K — точка пересечения окружности с отрезком AM, L — точка пересечения окружности с отрезком BM. Вычислите величину $\dfrac{AM}{AK} + \dfrac{BM}{BL}$.

8. Существует ли треугольная пирамида, каждое ребро основания которой видно из середины противоположного ребра под прямым углом?

9. На плоскости расположено множество A, состоящее из нескольких прямых. Известно, что для любого его подмножества B, состоящего из $k^2 + 1$ ($k \geqslant 3$) прямых, можно выбрать k точек так, что любая прямая из множества B проходит хотя бы через одну из этих точек. Докажите, что и для всего множества A можно выбрать k точек так, чтобы любая прямая из A проходила хотя бы через одну из них них.

10. Назовём высотой $(2n+1)$-угольника $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ прямую, проходящую через вершину, перпендикулярную противоположной стороне (через A_1 перпендикулярно $A_{n+1}A_{n+2}$ и т. д.). Докажите, что если $2n$ высот $(2n+1)$-угольника проходят через одну точку, то и $(2n+1)$-я высота проходит черзу ту же точку.