11 класс • Кружок в Хамовниках • 5 декабря 2013 г.

Производящие функции 2

1. (a) Докажите, что натуральное число N может быть ровно $2^{N-1}-1$ различными способами представлено в виде суммы меньших натуральных слагаемых, если представления, отличающиеся порядком слагаемых, считать различными. (Например, у числа 4 имеется 7 представлений: $4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2 = 1+3 = 3+1$.)

(b) Какой будет ответ, если каждое разбиение считать столько раз, сколько в нем слагаемых?

2. Запишите (в виде бесконечного произведения) производящую функцию для последовательности (2^{a_n}), где a_n — сумма цифр числа n.

3. (a) Найдите производящую функцию чисел Фибоначчи F_n.

(b) Найдите производящую функцию последовательности $a_n = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$. Вспомните и докажите ещё раз, что $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.

4. (a) Докажите, что производящая функция последовательности (a_n) является рациональной тогда и только тогда, когда (a_n) является линейной рекуррентой, т. е. удовлетворяет соотношению вида

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \ldots + c_k a_n.$$

Что за многочлен стоит в знаменателе?

(b) Пусть (a_n) — линейная рекуррента. Докажите, что последовательность $b_n = a_1 + \ldots + a_n$ также является линейной рекуррентой.

(c) Докажите формулу Бине:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 5 декабря 2013 г.

Производящие функции 2

1. (a) Докажите, что натуральное число N может быть ровно $2^{N-1}-1$ различными способами представлено в виде суммы меньших натуральных слагаемых, если представления, отличающиеся порядком слагаемых, считать различными. (Например, у числа 4 имеется 7 представлений: $4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2 = 1+3 = 3+1$.)

(b) Какой будет ответ, если каждое разбиение считать столько раз, сколько в нем слагаемых?

2. Запишите (в виде бесконечного произведения) производящую функцию для последовательности (2^{a_n}), где a_n — сумма цифр числа n.

3. (a) Найдите производящую функцию чисел Фибоначчи F_n.

(b) Найдите производящую функцию последовательности $a_n = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$. Вспомните и докажите ещё раз, что $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.

4. (a) Докажите, что производящая функция последовательности (a_n) является рациональной тогда и только тогда, когда (a_n) является линейной рекуррентой, т. е. удовлетворяет соотношению вида

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \ldots + c_k a_n.$$

Что за многочлен стоит в знаменателе?

(b) Пусть (a_n) — линейная рекуррента. Докажите, что последовательность $b_n = a_1 + \ldots + a_n$ также является линейной рекуррентой.

(c) Докажите формулу Бине:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$