

Производящие функции

Определение. Производящей функцией последовательности (a_n) называется формальный степенной ряд

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

- (a) Докажите, что $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.
- (b) Выразите в замкнутом виде сумму $C_n^0 C_m^{2k} + C_n^2 C_m^{2k-2} + \dots + C_n^{2k} C_m^0$.
- Найдите значения выражения (a) $\sum_{k=1}^n k C_n^k$; (b) $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k$; (c) $\sum_{k=1}^n \frac{C_n^k}{k+1}$.
- Найдите количество счастливых билетов. (То есть упорядоченных наборов из 6 цифр таких, что сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр в наборе.)
- Найти производящие функции следующих последовательностей:
 - a_n — количество способов разложить n на различные натуральные слагаемые без учёта порядка.
 - b_n — количество способов разбить n на натуральные слагаемые с учётом порядка.
 - c_n — количество способов разбить n на натуральные слагаемые без учёта порядка
 - d_n — количество способов разбить n на нечётные натуральные слагаемые без учёта порядка.
 - Докажите, что $a_n = d_n$.
- Найдите количество многочленов $P(x)$ с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, 3\}$ таких, что $P(2) = n$.
- Find the number of subsets of $\{1, 2, \dots, 2000\}$, the sum of whose elements is divisible by 5.

Производящие функции

Определение. Производящей функцией последовательности (a_n) называется формальный степенной ряд

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

- (a) Докажите, что $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.
- (b) Выразите в замкнутом виде сумму $C_n^0 C_m^{2k} + C_n^2 C_m^{2k-2} + \dots + C_n^{2k} C_m^0$.
- Найдите значения выражения (a) $\sum_{k=1}^n k C_n^k$; (b) $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k$; (c) $\sum_{k=1}^n \frac{C_n^k}{k+1}$.
- Найдите количество счастливых билетов. (То есть упорядоченных наборов из 6 цифр таких, что сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр в наборе.)
- Найти производящие функции следующих последовательностей:
 - a_n — количество способов разложить n на различные натуральные слагаемые без учёта порядка.
 - b_n — количество способов разбить n на натуральные слагаемые с учётом порядка.
 - c_n — количество способов разбить n на натуральные слагаемые без учёта порядка
 - d_n — количество способов разбить n на нечётные натуральные слагаемые без учёта порядка.
 - Докажите, что $a_n = d_n$.
- Найдите количество многочленов $P(x)$ с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, 3\}$ таких, что $P(2) = n$.
- Find the number of subsets of $\{1, 2, \dots, 2000\}$, the sum of whose elements is divisible by 5.