

Геометрические неравенства

1. Дан остроугольный треугольник ABC . Точки A' , B' и C' выбраны на его соответственных сторонах BC , AC и AB . Докажите, что минимум периметра треугольника $A'B'C'$ достигается, когда его вершины являются вершинами ортотреугольника ABC .
2. В треугольнике одна из средних линий больше одной из медиан. Докажите, что этот треугольник тупоугольный.
3. Даны n точек A_1, A_2, \dots, A_n и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку P так, что $PA_1 + \dots + PA_n \geq n$.
4. Докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин всех его диагоналей.
5. Внутри выпуклого многоугольника лежит другой выпуклый многоугольник. (а) Докажите, что периметр внешнего многоугольника больше, чем периметр внутреннего. (б) Для точки O внутри треугольника ABC периметра P докажите неравенство $P/2 < OA + OB + OC < P$.
6. Площади треугольников ABC , $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ равны S , S_1 , S_2 соответственно, причём $AB = A_1B_1 + A_2B_2$, $AC = A_1C_1 + A_2C_2$, $BC = B_1C_1 + B_2C_2$. Докажите, что $S \geq 4\sqrt{S_1S_2}$.
7. Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образованных парами соседних сторон и соответствующими диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.
8. Докажите, что периметр остроугольного треугольника не меньше $4R$.
9. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D , а на боковой стороне AB — точки E и M , так что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен AC . Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.
10. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M . Докажите, что, если угол AMB не тупой, то $AC + BC > 3AB$.

Геометрические неравенства

1. Дан остроугольный треугольник ABC . Точки A' , B' и C' выбраны на его соответственных сторонах BC , AC и AB . Докажите, что минимум периметра треугольника $A'B'C'$ достигается, когда его вершины являются вершинами ортотреугольника ABC .
2. В треугольнике одна из средних линий больше одной из медиан. Докажите, что этот треугольник тупоугольный.
3. Даны n точек A_1, A_2, \dots, A_n и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку P так, что $PA_1 + \dots + PA_n \geq n$.
4. Докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин всех его диагоналей.
5. Внутри выпуклого многоугольника лежит другой выпуклый многоугольник. (а) Докажите, что периметр внешнего многоугольника больше, чем периметр внутреннего. (б) Для точки O внутри треугольника ABC периметра P докажите неравенство $P/2 < OA + OB + OC < P$.
6. Площади треугольников ABC , $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ равны S , S_1 , S_2 соответственно, причём $AB = A_1B_1 + A_2B_2$, $AC = A_1C_1 + A_2C_2$, $BC = B_1C_1 + B_2C_2$. Докажите, что $S \geq 4\sqrt{S_1S_2}$.
7. Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образованных парами соседних сторон и соответствующими диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.
8. Докажите, что периметр остроугольного треугольника не меньше $4R$.
9. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D , а на боковой стороне AB — точки E и M , так что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен AC . Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.
10. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M . Докажите, что, если угол AMB не тупой, то $AC + BC > 3AB$.