Геометрические неравенства для серьёзных парней

1. На сторонах AB, BC, CD и DA произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки K, L, M и N. Обозначим через S_A, S_B, S_C и S_D площади треугольников AKN, BLK, CML и DNM соответственно. Докажите неравенство

$$\sqrt[3]{S_A}+\sqrt[3]{S_B}+\sqrt[3]{S_C}+\sqrt[3]{S_D}\leqslant 2\sqrt[3]{S_{ABCD}}$$

2. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно таким образом, что $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB перпендикулярна стороне CD, а сторона BC — стороне DE. Докажите, что если $AB = AE = ED = 1$, то $BC + CD < 1$.

4. Let ABC be a triangle with centroid G. Determine, with proof, the position of the point P in the plane of ABC such that $AP\cdot AG + BP\cdot BG + CP\cdot CG$ is a minimum, and express this minimum value in terms of the side lengths of ABC.

5. Let ABC be a triangle for which there exists an interior point F such that $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$. Let the lines BF and CF meet the sides AC and AB at D and E respectively. Prove that $AB + AC \geqslant 4DE$.

6. For a convex hexagon $ABCDEF$ with an area S, prove that

$$AC\cdot(BD+BF-DF)+CE\cdot(BD+DF-BF)+AE\cdot(BF+DF-BD)\geqslant 2\sqrt{3}S$$

7. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Лучи CA и DE пересекаются в точке F. Докажите, что $3\angle DFC < \angle BAC - \angle ACB$.

8. Докажите, что для любых точек A, B, C, D, E, F имеет место неравенство

$$2(AB^2+BC^2+CD^2+DE^2+EF^2+FA^2)\geqslant AD^2+BE^2+CF^2$$

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 24 ноября 2013 г.

Геометрические неравенства для серьёзных парней

1. На сторонах AB, BC, CD и DA произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки K, L, M и N. Обозначим через S_A, S_B, S_C и S_D площади треугольников AKN, BLK, CML и DNM соответственно. Докажите неравенство

$$\sqrt[3]{S_A}+\sqrt[3]{S_B}+\sqrt[3]{S_C}+\sqrt[3]{S_D}\leqslant 2\sqrt[3]{S_{ABCD}}$$

2. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно таким образом, что $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB перпендикулярна стороне CD, а сторона BC — стороне DE. Докажите, что если $AB = AE = ED = 1$, то $BC + CD < 1$.

4. Let ABC be a triangle with centroid G. Determine, with proof, the position of the point P in the plane of ABC such that $AP\cdot AG + BP\cdot BG + CP\cdot CG$ is a minimum, and express this minimum value in terms of the side lengths of ABC.

5. Let ABC be a triangle for which there exists an interior point F such that $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$. Let the lines BF and CF meet the sides AC and AB at D and E respectively. Prove that $AB + AC \geqslant 4DE$.

6. For a convex hexagon $ABCDEF$ with an area S, prove that

$$AC\cdot(BD+BF-DF)+CE\cdot(BD+DF-BF)+AE\cdot(BF+DF-BD)\geqslant 2\sqrt{3}S$$

7. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Лучи CA и DE пересекаются в точке F. Докажите, что $3\angle DFC < \angle BAC - \angle ACB$.

8. Докажите, что для любых точек A, B, C, D, E, F имеет место неравенство

$$2(AB^2+BC^2+CD^2+DE^2+EF^2+FA^2)\geqslant AD^2+BE^2+CF^2$$