Комбинаторный разнобой

1. Коридор длины l покрыт конечным числом дорожек. Докажите, что можно убрать часть из них так, чтобы оставшиеся дорожки по-прежнему покрывали коридор и суммарная их длина не превышала бы $2l$.

2. Дан куб $12\times12\times12$, который разрезан плоскостями, параллельными граням куба, на единичные кубики. В кубе проводится сечение в виде правильного шестиугольника. Сколько маленьких кубиков пересечёт плоскость сечения?

3. Игра в "супершахматы" ведётся на доске размером 100×100, и в ней участвует 20 различных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьёт не более 20 полей (но больше о правилах ничего не сказано, например, если фигуру A передвинуть, то о том, как изменится множество битых полей мы ничего не знаем). Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

4. В таблице размера $m \times n$ стоят такие вещественные числа, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке целая. Докажите, что каждое число можно округлить (x заменить на $[x]$ или на $[x+1]$) так, что сумма чисел во всех строчках и столбцах не изменится.

5. В n-элементном множестве M выбрано n различных подмножеств $A_1, \ldots, A_n$. Докажите, что для некоторого $x \in M$ множества $A_1 \cup \{x\}, \ldots, A_n \cup \{x\}$ также различны.

6. Каждая сторона правильного треугольника поделена на 15 равных частей и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате этого получили разбиение треугольника на маленькие треугольнички. После этого в каждый из маленьких треугольничков записали $+1$ или -1. Известно, что число в каждом треугольничке равно произведению чисел в тех треугольничках, которые имеют с ним общую сторону. Докажите, что в каждом из маленьких треугольничков, прилегающих к серединам сторон большого треугольника, стоит число $+1$.

7. В таблице $2n \times 2n$ расставлено k звёздочек. При каком наибольшем k заведомо можно вычеркнуть n столбцов и n строк так, чтобы все звёздочки были вычеркнуты?

8. Камни, сложенные в n куч собрали и разложили в $n+k$ куч. Докажите, что не менее $k+1$ камня оказались в кучках, меньших, чем те, в которых они лежали.

9. В городе 57 автобусных остановок, через какие-то остановки проходят автобусные маршруты с выполнением следующих условий:

1. любые два маршрута имеют ровно одну общую остановку;
2. любые две остановки соединены маршрутом напрямую;
3. каждый маршрут содержит не меньше трёх остановок.

(a) Докажите, что каждый маршрут содерит одинаковое количество остановок.

(b) Докажите, что такое расположение маршрутов существует.

10. На вечеринку пришло **(a)** 19 гостей; **(b)** 21 гость, причём среди любых трех из них есть двое знакомых. Докажите, что гости могут разбиться на 5 групп, в каждой из которых все попарно знакомы.