Функциональные уравнения.

1. Найдите все пары функций $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $g(f(x) - y) = f(g(y)) + x$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ такие, что $f(x)^{f(y)} = f(x^y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

3. Пусть $P(x)$ — непостоянный многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что не существует функции $T\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такой, что количество целых x, удовлетворяющих уравнению $T^n(x) = x$ равно $P(n)$ для любого $n \geqslant 1$. ($T^n(x)$ обозначает результат n-кратного последовательного применения к x функции T)

4. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$

$$f([x]y) = f(x)[f(y)].$$

5. Дана функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что для любых $a, b \in \mathbb{N}$ выражение $af(a) + bf(b) + 2ab$ является полным квадратом. Докажите, что f совпадает с тождественной функцией.

6. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ такие, что $f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

7. Функция $F\colon \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ такова, что для любого $n \geqslant 0$ выполнены условия:

$$\begin{aligned} F(4n) &= F(2n) + F(n), \\ F(4n+2) &= F(4n) + 1, \\ F(2n+1) &= F(2n) + 1. \end{aligned}$$

Докажите, что для любого натурального m количество таких $0 \leqslant n < 2^m$, что $F(4n) = F(3n)$, равно $F(2^{m+1})$.

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 24 октября 2013 г.

Функциональные уравнения.

1. Найдите все пары функций $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $g(f(x) - y) = f(g(y)) + x$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ такие, что $f(x)^{f(y)} = f(x^y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

3. Пусть $P(x)$ — непостоянный многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что не существует функции $T\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такой, что количество целых x, удовлетворяющих уравнению $T^n(x) = x$ равно $P(n)$ для любого $n \geqslant 1$. ($T^n(x)$ обозначает результат n-кратного последовательного применения к x функции T)

4. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$

$$f([x]y) = f(x)[f(y)].$$

5. Дана функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что для любых $a, b \in \mathbb{N}$ выражение $af(a) + bf(b) + 2ab$ является полным квадратом. Докажите, что f совпадает с тождественной функцией.

6. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ такие, что $f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

7. Функция $F\colon \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ такова, что для любого $n \geqslant 0$ выполнены условия:

$$\begin{aligned} F(4n) &= F(2n) + F(n), \\ F(4n+2) &= F(4n) + 1, \\ F(2n+1) &= F(2n) + 1. \end{aligned}$$

Докажите, что для любого натурального m количество таких $0 \leqslant n < 2^m$, что $F(4n) = F(3n)$, равно $F(2^{m+1})$.