11 класс • Кружок в Хамовниках • 21 октября 2013 г.

Начала общей топологии в $\mathbb{R}^n$

Определение. Множество S называется **открытым**, если с каждой своей точкой $x \in S$ оно содержит открытый шар с центром в x. Множество называется **замкнутым**, если его дополнение открыто.

1. Какие из приведённых множеств являются открытыми — какие замкнутыми? **(a)** $\varnothing$, отрезок, интервал, полуинтервал, окружность, треугольник; **(b)** график $y = x^2$, решение неравенства $y^2 - x^2 < 1$ и $y^2 + x^2 + z^2 \geqslant 5$; **(c)** объединение (пересечение) конечного числа открытых (замкнутых) множеств; **(d)** предыдущий пункт с бесконечным количеством множеств.

2. Докажите, что любое непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде **(a)** объединения шаров; **(b)*** *счётного* объединения шаров; **(c)*** а на прямой (т. е. $n = 1$) в виде дизъюнктного объединения интервалов, т. е. когда объединяемые элементы попарно не пересекаются.

Свойство действительных чисел: у любого ограниченного множества M существует точная верхняя грань, т. е. такое число c, что $c \geqslant x, \forall x \in M$ и $\nexists b < c\colon b \geqslant x, \forall x \in M$.

3. Докажите, что последовательность вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, имеет единственную общую точку.

Определение. Семейство множеств $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ называется покрытием множества X, если $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \supset X$.

Определение. Множество точек A пространства $\mathbb{R}^n$ называется **компактным** (**компактом**), если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

4. Let M be a compact set. Prove that **(a)** M is closed; **(b)** its intersection with any closed set is compact.

5. Докажите, что любая последовательность на отрезке имеет на нем хотя бы одну предельную точку.

6. Докажите, что отрезок $[0, 1]$ — компакт.

7. Докажите, что **(a)** декартово произведение компактов компактно; **(b)** объединение конечного числа компактных множеств компактно.

8.* Докажите, что множество в $\mathbb{R}^n$ замкнуто, если и только если оно содержит все свои предельные точки.

9. Докажите, что множество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

10. Компактны ли на плоскости **(a)** окружность; **(b)** прямая; **(c)** отрезок; **(d)** замкнутый круг; **(e)** график произвольной непрерывной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; **(f)** график непрерывной функции $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$.

Определение. Отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества открыт.

11. Докажите, что образ компакта при непрерывном отображении есть компакт.