11 класс • Кружок в Хамовниках • 10 октября 2013 г.

Сохранение двойных отношений

1. В треугольнике ABC M — середина AC, а H — основание высоты, проведенной из B на AC. Точки P и Q в углу ABC выбраны так, что $\angle ABP = \angle CBQ$ и $BP \perp PA$, $BQ \perp QC$. Докажите, что точки P, Q, M и H лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC H — ортоцентр, а O — центр описанной окружности. Окружность (ABH) вторично пересекает BC в точке A', а (CBH) — BA в точке C'. Доказать, что центр описанной окружности треугольника $A'C'H$ лежит на OH.

3. Докажите теорему Паскаля через движение и дробную линейность.

4. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

5. **(a)** Стороны AD и BC вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P и при этом $AB \nparallel CD$. H_1, H_2, O_1, O_2 — ортоцентры и центры описанных окружностей треугольников ABP и CDP соответственно. E_1 — середина отрезка H_1O_1, E_2 — середина H_2O_2. Докажите, что перпендикуляр из E_1 на CD, из E_2 на AB и прямая H_1H_2 пересекаются в одной точке. **(b)** * то же самое, только четырехугольник не обязательно вписанный.

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 10 октября 2013 г.

Сохранение двойных отношений

1. В треугольнике ABC M — середина AC, а H — основание высоты, проведенной из B на AC. Точки P и Q в углу ABC выбраны так, что $\angle ABP = \angle CBQ$ и $BP \perp PA$, $BQ \perp QC$. Докажите, что точки P, Q, M и H лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC H — ортоцентр, а O — центр описанной окружности. Окружность (ABH) вторично пересекает BC в точке A', а (CBH) — BA в точке C'. Доказать, что центр описанной окружности треугольника $A'C'H$ лежит на OH.

3. Докажите теорему Паскаля через движение и дробную линейность.

4. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

5. **(a)** Стороны AD и BC вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P и при этом $AB \nparallel CD$. H_1, H_2, O_1, O_2 — ортоцентры и центры описанных окружностей треугольников ABP и CDP соответственно. E_1 — середина отрезка H_1O_1, E_2 — середина H_2O_2. Докажите, что перпендикуляр из E_1 на CD, из E_2 на AB и прямая H_1H_2 пересекаются в одной точке. **(b)** * то же самое, только четырехугольник не обязательно вписанный.

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 10 октября 2013 г.

Сохранение двойных отношений

1. В треугольнике ABC M — середина AC, а H — основание высоты, проведенной из B на AC. Точки P и Q в углу ABC выбраны так, что $\angle ABP = \angle CBQ$ и $BP \perp PA$, $BQ \perp QC$. Докажите, что точки P, Q, M и H лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC H — ортоцентр, а O — центр описанной окружности. Окружность (ABH) вторично пересекает BC в точке A', а (CBH) — BA в точке C'. Доказать, что центр описанной окружности треугольника $A'C'H$ лежит на OH.

3. Докажите теорему Паскаля через движение и дробную линейность.

4. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

5. **(a)** Стороны AD и BC вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P и при этом $AB \nparallel CD$. H_1, H_2, O_1, O_2 — ортоцентры и центры описанных окружностей треугольников ABP и CDP соответственно. E_1 — середина отрезка H_1O_1, E_2 — середина H_2O_2. Докажите, что перпендикуляр из E_1 на CD, из E_2 на AB и прямая H_1H_2 пересекаются в одной точке. **(b)** * то же самое, только четырехугольник не обязательно вписанный.