

## Непрерывность. Дискретная и непрерывная.

1. Существует ли 2013 подряд идущих чисел, среди которых ровно 23 простые?

2. **Лемма Кронекера.** Пусть дано иррациональное число  $\alpha$ . Докажите, что для любого числа  $0 \leq \beta < 1$  и произвольного числа  $\varepsilon > 0$  существует натуральное число  $n$  такое, что  $|\{n\alpha\} - \beta| < \varepsilon$ .

3. В некоторых клетках квадрата  $10 \times 10$  стоят  $+1$  и  $-1$ , причем сумма всех чисел не больше 27 и не меньше  $-27$ . Докажите, что есть квадрат  $5 \times 5$ , абсолютная величина суммы чисел в котором не превосходит 5.

4. (а) Назовем медианой системы  $2n$  точек плоскости прямую, проходящую ровно через две из них, по обе стороны от которой точек этой системы поровну. Какое наименьшее количество медиан может быть у системы из  $2n$  точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой? (б) Дано  $n$  точек общего положения. Через одну из точек проводится некая прямая  $l$  и после этого начинает вращаться вокруг этой точки против часовой стрелки до момента, когда она *впервые* пройдет через какую-то другую точку. После этого она начинает вращаться относительно нее и т. д. Докажите, что существует такое начальное положение прямой  $l$ , что в течении этого процесса прямая будет вращаться через каждую точку множества бесконечное число раз.

5. Улицы города Дужинска — простые ломаные, не пересекающиеся между собой во внутренних точках. Каждая улица соединяет два перекрестка и покрашена в один из трех цветов: белый, красный или синий. На каждом перекрестке сходятся ровно три улицы, по одной каждого цвета. Перекресток называется положительным, если при его обходе против часовой стрелки цвета улиц идут в следующем порядке: белый, синий, красный, и отрицательным в противном случае. Докажите, что разность между числом положительных и числом отрицательных перекрестков кратна четырем.

6. Даны многоугольник, прямая  $l$  и точка  $P$  на прямой  $l$  в общем положении (т. е. все прямые, содержащие стороны многоугольника, пересекают  $l$  в различных точках, отличных от  $P$ .) Отметим те вершины многоугольника, для каждой из которых прямые, на которых лежат выходящие из нее стороны многоугольника, пересекают  $l$  по разные стороны от точки  $P$ . Докажите, что точка  $P$  лежит внутри многоугольника тогда и только тогда, когда по каждую сторону от  $l$  отмечено нечетное число вершин.

7. Докажите, что в любом многоугольнике площади  $S$  можно провести хорду, которая делит его на два многоугольника, площади которых отличаются не более чем на  $S/3$ . Докажите, что эта оценка неумлучшаема.

8. **Флатландцы.** Двое флатландцев спускаются с высочайшей вершины Флатландии «Пик кипа» — один по левому склону, а второй по правому. Гора везде выше уровня моря, а ее поверхность — график кусочно-линейной непрерывной функции. Флатландцы "непрерывно" двигаются, так что зависимость координат флатландца от времени — непрерывная функция, на скорость ограничений нет.

(а) Докажите, что флатландцы могут достичь моря, все время находясь на одинаковой высоте над уровнем моря.

(б) Пусть поверхность горы — график дифференцируемой функции. Тогда аналогичное утверждение может быть неверным.

(с) Докажите, что если есть  $n$  гор равной высоты, и по склону каждой горы спускается флатландец (всего  $2n$  флатландцев), то они смогу спуститься, оставаясь все время на одной и той же высоте.