Линейность возвращается

1. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSCB$ и $OSAD$.

2. Через вершины B и C треугольника ABC проводится окружность. Ее вторые точки пересечения со сторонами AB и AC — точки C' и B'. Докажите, что прямые BB', CC' и HH' пересекаются в одной точке, где H — ортоцентр треугольника ABC, а H' — треугольника $AB'C'$.

3. С помощью циркуля и линейки постройте квадрат с вершинами на четырех заданных прямых.

4. На стороне BC треугольника ABC выбирается точка P. Точка Q симметрична ей относительно середины BC. Прямые AP и AQ вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках P' и Q' соответственно. Докажите, что все прямые $P'Q'$ проходят через фиксированную точку.

5. На высоте BH треугольника ABC выбрана произвольная точка P. Прямые AP и CP пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что HB — биссектриса угла A_1HC_1.

6. Даны две непересекающиеся окружности ω и γ и к ним проведены одна их общая внешняя касательная l и одна общая внутренняя касательная k. Из точки A, лежащей на прямой k проведены вторые касательные к окружностям AB и AC (B и C лежат на l), так что обе окружности лежат внутри треугольника ABC. Покажите, что если точка A двигается по прямой k, то центр I вписанной окружности треугольника ABC тоже двигается по прямой.

7. Докажите, что изогональный образ прямой, не проходящей через вершины треугольника, есть коника.

8. *Пусть A_1, B_1, A_2 и B_2 — основания высот и биссектрис треугольника ABC соответственно. Обозначим центр вписанной и описанной окружностей треугольника ABC через I и O соответственно. Докажите, что то, что O лежит на A_2B_2 равносильно тому, что I лежит на A_1B_1.

9. **Докажите, что если прямая пересекает три из четырех высот тетраэдра, то она пересекает и четвертую (или она ей параллельна).

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 3 октября 2013 г.

Линейность возвращается

1. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSCB$ и $OSAD$.

2. Через вершины B и C треугольника ABC проводится окружность. Ее вторые точки пересечения со сторонами AB и AC — точки C' и B'. Докажите, что прямые BB', CC' и HH' пересекаются в одной точке, где H — ортоцентр треугольника ABC, а H' — треугольника $AB'C'$.

3. С помощью циркуля и линейки постройте квадрат с вершинами на четырех заданных прямых.

4. На стороне BC треугольника ABC выбирается точка P. Точка Q симметрична ей относительно середины BC. Прямые AP и AQ вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках P' и Q' соответственно. Докажите, что все прямые $P'Q'$ проходят через фиксированную точку.

5. На высоте BH треугольника ABC выбрана произвольная точка P. Прямые AP и CP пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что HB — биссектриса угла A_1HC_1.

6. Даны две непересекающиеся окружности ω и γ и к ним проведены одна их общая внешняя касательная l и одна общая внутренняя касательная k. Из точки A, лежащей на прямой k проведены вторые касательные к окружностям AB и AC (B и C лежат на l), так что обе окружности лежат внутри треугольника ABC. Покажите, что если точка A двигается по прямой k, то центр I вписанной окружности треугольника ABC тоже двигается по прямой.

7. Докажите, что изогональный образ прямой, не проходящей через вершины треугольника, есть коника.

8. *Пусть A_1, B_1, A_2 и B_2 — основания высот и биссектрис треугольника ABC соответственно. Обозначим центр вписанной и описанной окружностей треугольника ABC через I и O соответственно. Докажите, что то, что O лежит на A_2B_2 равносильно тому, что I лежит на A_1B_1.

9. **Докажите, что если прямая пересекает три из четырех высот тетраэдра, то она пересекает и четвертую (или она ей параллельна).