Инверсия + симметрия 2

1. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω, соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP.

2. Обозначим середины стороны AB, BC и AC треугольника ABC через C_0, A_0 и B_0 соответственно, а центр описанной окружности через O. Окружности, описанные около треугольников AOB и $A_0B_0C_0$ пересекаются в точках P и Q. Докажите, что $\angle ABQ = \angle CBP$.

3. Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей остроугольного треугольника ABC соответственно. Окружность γ касается отрезков AB и AC в точках P и Q, а также описанной окружности треугольника BOC внешним образом. Докажите, что $APIQ$ — ромб.

4. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

5. В описанной окружности ω треугольника ABC проведена хорда XY параллельная BC и располагающаяся между точкой A и прямой BC. Окружности γ_1 и γ_2 касаются этой хорды, окружности ω и сторон AB и AC соответственно, причем расположены между прямыми BC и XY. Докажите, что общие a) внешние (b) внутренние) касательные к эти окружностям пересекаются в точке, лежащей на a) внешней (b) внутренней) биссектрисе угла A.

6. Даны точки A, B, C и D. Пусть X, Y и Z — точки Микеля всевозможных "четырехугольников", образованных на этих точках. Докажите, что точки A, B, C и D (как множество из четырех точек) переходят сами в себя при нашем преобразовании относительно треугольника XYZ.

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 30 сентября 2013 г.

Инверсия + симметрия 2

1. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω, соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP.

2. Обозначим середины стороны AB, BC и AC треугольника ABC через C_0, A_0 и B_0 соответственно, а центр описанной окружности через O. Окружности, описанные около треугольников AOB и $A_0B_0C_0$ пересекаются в точках P и Q. Докажите, что $\angle ABQ = \angle CBP$.

3. Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей остроугольного треугольника ABC соответственно. Окружность γ касается отрезков AB и AC в точках P и Q, а также описанной окружности треугольника BOC внешним образом. Докажите, что $APIQ$ — ромб.

4. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

5. В описанной окружности ω треугольника ABC проведена хорда XY параллельная BC и располагающаяся между точкой A и прямой BC. Окружности γ_1 и γ_2 касаются этой хорды, окружности ω и сторон AB и AC соответственно, причем расположены между прямыми BC и XY. Докажите, что общие a) внешние (b) внутренние) касательные к эти окружностям пересекаются в точке, лежащей на a) внешней (b) внутренней) биссектрисе угла A.

6. Даны точки A, B, C и D. Пусть X, Y и Z — точки Микеля всевозможных "четырехугольников", образованных на этих точках. Докажите, что точки A, B, C и D (как множество из четырех точек) переходят сами в себя при нашем преобразовании относительно треугольника XYZ.