Инверсия + симметрия

1. Окружность γ вписана в угол ABC треугольника ABC и касается его описанной окружности внутренним образом в точке P. Обозначим ее точки касания со сторонами AB и BC через X и Y; I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Пусть также вневписанная в угол B окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке Q. **(a)** Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$. **(b)** Докажите, что I лежит на прямой XY. **(c)** Докажите, что точки изогонально сопряжённые точкам Жергонна и Нагеля суть центры отрицательной и положительной гомотетий, переводящих вписанную окружность в описанную окружность, соответственно.

2. Пусть Γ — описанная окружность треугольника ABC. Окружность с центром в точке O касается отрезка BC в точке P, и дуги BC Γ, не содержащей точки A в точке Q. Докажите, что, если $\angle BAO = \angle CAO$, то $\angle PAO = \angle QAO$.

3. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Докажите, что углы AOE и DOF равны.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

5. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются хордами касающихся окружностей ω_1 и ω_2 соответственно. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны соответственно α и β. Пусть ω_3 и ω_4 — также окружности с хордами AB и CD соответственно, но градусные меры аналогичных дуг AB и CD равны соответственно β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

6. В углы B и C треугольника ABC вписаны непересекающиеся окружности ω и γ с центрами P и Q. Оказалось, что $\angle BAQ = \angle CAP$. Докажите, что окружность, касающаяся γ и ω внешним образом и проходящая через A, касается и описанной окружности треугольника ABC.

7. Пусть M и N — соответственно середины большой и маленькой дуги BC описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Из вершины B проведена высота BH. Точка K на прямой AN выбрана таким образом, что $\angle KHM = 90°$. Докажите, что $BN = BK$.

8. Докажите, что композиция трёх таких преобразований, применённых последовательно от трёх вершин треугольника есть тождественное преобразование.

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 26 сентября 2013 г.

Инверсия + симметрия

1. Окружность γ вписана в угол ABC треугольника ABC и касается его описанной окружности внутренним образом в точке P. Обозначим ее точки касания со сторонами AB и BC через X и Y; I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Пусть также вневписанная в угол B окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке Q. **(a)** Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$. **(b)** Докажите, что I лежит на прямой XY. **(c)** Докажите, что точки изогонально сопряжённые точкам Жергонна и Нагеля суть центры отрицательной и положительной гомотетий, переводящих вписанную окружность в описанную окружность, соответственно.

2. Пусть Γ — описанная окружность треугольника ABC. Окружность с центром в точке O касается отрезка BC в точке P, и дуги BC Γ, не содержащей точки A в точке Q. Докажите, что, если $\angle BAO = \angle CAO$, то $\angle PAO = \angle QAO$.

3. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Докажите, что углы AOE и DOF равны.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

5. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются хордами касающихся окружностей ω_1 и ω_2 соответственно. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны соответственно α и β. Пусть ω_3 и ω_4 — также окружности с хордами AB и CD соответственно, но градусные меры аналогичных дуг AB и CD равны соответственно β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

6. В углы B и C треугольника ABC вписаны непересекающиеся окружности ω и γ с центрами P и Q. Оказалось, что $\angle BAQ = \angle CAP$. Докажите, что окружность, касающаяся γ и ω внешним образом и проходящая через A, касается и описанной окружности треугольника ABC.

7. Пусть M и N — соответственно середины большой и маленькой дуги BC описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Из вершины B проведена высота BH. Точка K на прямой AN выбрана таким образом, что $\angle KHM = 90°$. Докажите, что $BN = BK$.

8. Докажите, что композиция трёх таких преобразований, применённых последовательно от трёх вершин треугольника есть тождественное преобразование.