Первый разнобой

1. В клетках квадрата 100×100 расставлены числа от 1 до 10000. Докажите, что найдутся три клетки, центры которых образуют равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, параллельными сторонам квадрата, такие, что сумма чисел в этих клетках не превосходит 10400.

2. Существуют ли такие вещественные числа a и b, что число $a+b$ иррационально, однако при любом натуральном n число $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ рационально?

3. На плоскости имеется n точек общего положения. Рассмотрим все отрезки, соединяющие эти точки, и выберем из них отрезки наибольшей длины. Докажите, что выбранных отрезков не более n.

4. Положительные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют при $1 \leqslant i \leqslant n-1$ условию $a_{i-1}a_{i+1} \leqslant a_i^2$. Докажите, что

$$\frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geqslant \frac{a_0 + \cdots + a_{n-1}}{n} \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

5. Пяточок разливает килограмм меда по пяти стоящим в ряд большим горшочкам. Винни-Пух после этого забирает себе два стоящих рядом горшочка, в которых суммарно налито максимальное количество меда. Какое наибольшее количество меда гарантированно может забрать себе Винни-Пух?

6. Несколько кроликов построились в ряд. Оказалось, что каждый кролик, кроме двух крайних, имеет поровну друзей слева и справа от него. Докажите, что у двух крайних кроликов поровну друзей.

7. Докажите, что из 3^8 натуральных делителей числа 3^8 можно выбрать несколько (быть может, один) не обязательно различных делителей с суммой, равной 3^8.

8. Дан остроугольный треугольник ABC с центром описанной окружности O. Прямые BO и CO пересекают биссектрису угла A в точках P и Q соответственно. Определим точку R, как пересечение BQ и CP. Докажите, что прямые AR и BC перпендикулярны.

9. Дано натуральное число n. Покажите, что уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$ имеет решение, являющееся парой целых чисел (x, y) тогда и только тогда, когда n не свободно от квадратов.

10. Окружность проходит через вершины A и B четырехугольника $ABCD$, пересекает стороны BC и AD в точках P и Q, а диагонали AC и BD в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD конкурентны.

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 23 сентября 2013 г.

Первый разнобой

1. В клетках квадрата 100×100 расставлены числа от 1 до 10000. Докажите, что найдутся три клетки, центры которых образуют равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, параллельными сторонам квадрата, такие, что сумма чисел в этих клетках не превосходит 10400.

2. Существуют ли такие вещественные числа a и b, что число $a+b$ иррационально, однако при любом натуральном n число $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ рационально?

3. На плоскости имеется n точек общего положения. Рассмотрим все отрезки, соединяющие эти точки, и выберем из них отрезки наибольшей длины. Докажите, что выбранных отрезков не более n.

4. Положительные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют при $1 \leqslant i \leqslant n-1$ условию $a_{i-1}a_{i+1} \leqslant a_i^2$. Докажите, что

$$\frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geqslant \frac{a_0 + \cdots + a_{n-1}}{n} \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

5. Пяточок разливает килограмм меда по пяти стоящим в ряд большим горшочкам. Винни-Пух после этого забирает себе два стоящих рядом горшочка, в которых суммарно налито максимальное количество меда. Какое наибольшее количество меда гарантированно может забрать себе Винни-Пух?

6. Несколько кроликов построились в ряд. Оказалось, что каждый кролик, кроме двух крайних, имеет поровну друзей слева и справа от него. Докажите, что у двух крайних кроликов поровну друзей.

7. Докажите, что из 3^8 натуральных делителей числа 3^8 можно выбрать несколько (быть может, один) не обязательно различных делителей с суммой, равной 3^8.

8. Дан остроугольный треугольник ABC с центром описанной окружности O. Прямые BO и CO пересекают биссектрису угла A в точках P и Q соответственно. Определим точку R, как пересечение BQ и CP. Докажите, что прямые AR и BC перпендикулярны.

9. Дано натуральное число n. Покажите, что уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$ имеет решение, являющееся парой целых чисел (x, y) тогда и только тогда, когда n не свободно от квадратов.

10. Окружность проходит через вершины A и B четырехугольника $ABCD$, пересекает стороны BC и AD в точках P и Q, а диагонали AC и BD в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD конкурентны.