Линейность 1

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если для любой точки C, делящей прямую AB в отношении $a:b$, выполнено равенство: $f(C) = \dfrac{b}{a+b}f(A) + \dfrac{a}{a+b}f(B)$.

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существуют a, b, c такие, что для любой точки (x,y) плоскости $f\big((x,y)\big) = ax+by+c$.

Определение. Скажем, что объект движется *линейно*, если существует такой вектор $\overrightarrow{v}$, что за время t объект сдвигается на вектор $t\cdot\overrightarrow{v}$.

0. (a) Точки A и B двигаются линейно. Докажите, что середина отрезка AB тоже двигается линейно.

(b) Точка C линейно двигается по лучу AC. Докажите, что центр описанной окружности, точка пересечения высот и точка пересечения медиан треугольника ABC двигаются линейно (точка B покоится на месте).

(c) Три прямые двигаются линейно. Сколько требуется моментов времени, в которые они должны пересечься в одной точке, чтобы утверждать, что они всегда пересекаются в одной точке?

(d) Точка A покоится на месте, а точки B и C двигаются линейно и параллельно друг другу. Сколько требуется моментов времени, в которые они должны лежать на одной прямой, чтобы утверждать, что они всегда лежат на одной прямой?

1. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба.

2. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN. На стороне AB выбрана точка P, а на сторонах AC и BC выбраны точки L и K такие, что PL параллельно BN, а PK параллельно AM. Докажите, что отрезок LK делится медианами на три равные части.

3. Внутри треугольника ABC расположен треугольник PQR. Известно, что сумма расстояний от вершины треугольника PQR до сторон треугольника ABC не зависит от выбора вершины треугольника PQR. Докажите, что треугольник ABC — правильный.

4. (a) Докажите существование прямой Гаусса через движение прямой. **(b)** Докажите, что для почти любого четырехугольника $ABCD$ ГМТ точек P таких, что сумма ориентированных площадей треугольников ABP и CDP равна сумме ориентированных площадей треугольников BCP и DAP, есть прямая. Когда это неверно? Докажите еще раз существование прямой Гаусса. **(c)** Докажите что, если четырехугольник описанный, то центр вписанной окружности лежит на прямой Гаусса.

5. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Получилось так, что три пары внешних биссектрис: при вершинах A и C, при вершинах B и D и при вершинах P и Q имеют точки пересечения. Докажите, что они лежат на одной прямой.

6. Через точки касания вневписанных окружностей со сторонами провели прямые параллельные биссектрисам соответственных углов. Докажите, что они пересеклись в одной точке.

7. (a) Из линейности площади найдите ориентированную площадь треугольника с вершинами $(0,0)$, (x_1,y_1), (x_2,y_2).

(b) Решите пункт **0 (d)** в случае, когда все три точки двигаются линейно в произвольных направлениях.

8. H — ортоцентр треугольника ABC. Точка P движется по описанной окружности треугольника ABH. Пусть A' и B' — точки пересечения прямых AP и BP с противоположными сторонами треугольника ABC. Найдите ГМТ середин отрезков $A'B'$.