6-я Олимпиада Мегаполисов

Математика

Решения. День 2

Задача 4. Даны шесть действительных чисел $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$. Для каждой тройки различных чисел из этих шести Витя вычислил их сумму. Оказалось, что все 20 полученных сумм попарно различны; обозначим их через

$$s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_{19} < s_{20}\,.$$

При этом $x_2 + x_3 + x_4 = s_{11}$, $x_2 + x_3 + x_6 = s_{15}$ и $x_1 + x_2 + x_6 = s_m$. Найдите все возможные значения m.

Ответ: $m = 7$.

Решение. Наблюдение 1. Любая сумма, содержащая x_1, меньше любой суммы, не содержащей x_1.

Действительно, заметим, что $x_2 + x_3 + x_4$ — наименьшая среди всех 10 сумм, не содержащих x_1. По условию она равна s_{11}, поэтому все остальные 9 сумм, не содержащих x_1, должны быть равны $s_{12}, s_{13}, \ldots, s_{20}$ в некотором порядке. Значит, все меньшие суммы, от s_1 до s_{10}, должны содержать x_1.

Наблюдение 2. Рассмотрим суммы без x_1. Среди них любая сумма, содержащая x_6, больше любой суммы, не содержащей x_6.

Действительно, аналогично заметим, что $x_2 + x_3 + x_6$ — наименьшая среди всех 6 сумм, не содержащих x_1, но содержащих x_6. По условию она равна s_{15}, поэтому все остальные 5 сумм, содержащие x_6, но не x_1, должны быть равны $s_{16}, s_{17}, \ldots, s_{20}$ в некотором порядке. Тогда все меньшие суммы, от s_{11} до s_{14}, не содержат x_6.

Наблюдение 3. Пары сумм, дополняющих друг друга до $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$, распределены симметрично: если одна сумма в паре это s_i, то вторая — это s_{21-i}.

(Это наблюдение очевидно.)

Завершим решение задачи. Рассмотрим сумму $x_3 + x_4 + x_5$.

- Согласно наблюдению 1, эта сумма больше любой из 10 сумм, содержащих x_1.
- По наблюдению 2 эта сумма меньше любой из 6 сумм без x_1, но с x_6.
- А среди оставшихся 4 сумм (без x_1 и x_6) эта сумма явно наибольшая.

Получается, что $x_3 + x_4 + x_5 = s_{14}$. Но тогда $x_1 + x_2 + x_6 = s_7$ по наблюдению 3.

Замечание 1. Нетрудно подобрать набор чисел, удовлетворяющий условию. Например, подойдут числа $-32, 1, 2, 4, 8, 16$. Их суммы в любых комбинациях различны, и для них верны наблюдения 1 и 2, равносильные условиям $x_2 + x_3 + x_4 = s_{11}$ и $x_2 + x_3 + x_6 = s_{15}$.

Замечание 2. Условие задачи позволяет упорядочить все суммы, кроме двух пар. Обозначив $X_{ijk} = x_i + x_j + x_k$, можно доказать, что

$$X_{123} < X_{124} < (X_{125}, X_{134}) < X_{135} < X_{145} < X_{126} < X_{136} < X_{146} < X_{156} <$$
$$< X_{234} < X_{235} < X_{245} < X_{345} < X_{236} < X_{246} < (X_{346}, X_{256}) < X_{356} < X_{456}\,. \quad \square$$

Задача 5. Есть сейф, который можно открыть, введя *секретный код,* состоящий из n цифр, каждая из которых — это 0 или 1. Изначально было введено n нулей, но сейф остался закрыт (т. е. все нули — это не секретный код).

За одну попытку можно ввести произвольную последовательность из n цифр, каждая из которых — это 0 или 1. Если введённая последовательность совпадет с секретным кодом, то сейф откроется. Если введённая последовательность совпадет с секретным кодом в большем количестве позиций, чем предыдущая введённая последовательность, то будет слышен щелчок. В иных случаях сейф останется закрытым и щелчка не будет.

За какое наименьшее количество попыток гарантированно удастся открыть сейф?

Ответ: n.

Решение. Пример. Приведём алгоритм, гарантированно открывающий сейф за n попыток.

Обозначим через $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ секретный код сейфа. Также положим

$$A_k = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 1, 0, 0, \dots, 0)\,,$$

в частности $A_0 = (0, 0, 0, 0, \dots, 0)$.

Покажем индукцией по k для $k = 1, 2, \dots, n$, что на k-й попытке (если сейф не открылся ранее) мы сможем ввести последовательность A_k (для этого достаточно на k-м ходу научиться узнавать a_k).

Это даст нужный алгоритм: действительно, если m — наибольший индекс, для которого $a_m = 1$, то $A = A_m$, и сейф открывается на m-й попытке.

База $k = 1$ очевидна.

Переход индукции. Докажем переход $k \to k + 1$. Пусть сейф еще не открыт после k-й попытки.

Заметим, что A_k отличается от A_{k-1} в k-й позиции и, возможно, еще в одной, $(k-1)$-й, позиции — но в этой позиции A_k совпадает с A. Значит, если $a_k = 0$, то A_k не «ближе» (по количеству совпадений в позициях) к A, чем A_{k-1}. Если же $a_k = 1$, то A_k «ближе» к A, чем A_{k-1}. Таким образом, мы услышим щелчок после k-й попытки тогда и только тогда, когда $a_k = 1$. Тем самым после k-й попытки мы узнаем a_k.

Оценка. После каждой попытки будем считать количество *возможных* (т. е. не противоречащих исходам всех прошедших попыток, но и не испробованных) вариантов для секретного кода. Изначально возможных вариантов ровно $2^n - 1$ (все последовательности длины n из нулей и единиц, кроме нулевой последовательности). Предположим, что после k-й попытки осталось хотя бы $2^{n-k} - 1$ возможных вариантов; для $k = 0$ это показано. Тогда докажем, что после $(k+1)$-й попытки вне зависимости от введённой последовательности хотя бы в одном из исходов останется не менее $2^{n-k-1} - 1$ возможных вариантов.

Пусть на $(k+1)$-й попытке введена некоторая последовательность B. Разобьём возможные (до этой попытки) варианты на 3 группы: совпадающие с B (таких или нет, или один); те, при которых должен раздаться щелчок; и те, при которых щелчка не будет. (Каждый вариант попадёт ровно в одну такую группу.) Возьмём из двух последних групп ту, в которой наибольшее количество вариантов, и тогда при соответствующем исходе у нас останется хотя бы $\frac{1}{2}\big((2^{n-k} - 1) - 1\big) = 2^{n-k-1} - 1$ возможных вариантов.

Таким образом, после $n - 1$ попыток при некотором исходе останется хотя бы один возможный вариант, а значит, сейф всё ещё будет закрыт. $\square$

Другое доказательство оценки. Докажем, что $n - 1$ попыток не хватит.

Предположим противное: пусть имеется написанный алгоритм, как открыть сейф не более чем за $n-1$ попыток (шагов). Этот алгоритм должен иметь следующую структуру. На 1-м шаге вводится некоторая последовательность B. Если сейф открылся, то у нас «успех». Иначе на 2-м шаге алгоритм имеет 2 ветви: в случае щелчка вводится B_1, иначе B_2. На каждом следующем шаге в случае неуспеха имеем два варианта вводимой последовательности.

В целом во всех ветвях алгоритма на k-м шаге вводится не более 2^{k-1} последовательностей. Итого, во всех ветвях алгоритма вводится не более $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$ различных последовательностей. Но так как каждая из $2^n - 1$ последовательностей (кроме нулевой) может оказаться секретным кодом, то найдётся случай, в котором такой алгоритм не справится с сейфом. $\square$

Задача 6. Внутри тетраэдра $ABCD$ выбрана точка M таким образом, что $\angle MAD = \angle MBC$ и $\angle MDB = \angle MCA$. Докажите, что

$$MA \cdot MB + MC \cdot MD < \max(AD \cdot BC, AC \cdot BD)\,.$$

Решение. Лемма.

$$\angle AMD + \angle BMC + \angle AMC + \angle BMD > 2\pi\,.$$

Доказательство леммы. Действительно, пусть прямая DM пересекает плоскость ABC в точке E, а прямая BE пересекает отрезок AC в точке F (рис. 1). Тогда имеем $\angle AMC +$

$+ \angle BMC = \angle AMF + (\angle CMF + \angle BMC) > \angle AMF + \angle BMF = (\angle AMF + \angle FME) + \angle BME > > \angle AME + \angle BME = (\pi - \angle AMD) + (\pi - \angle BMD)$, следовательно, $\angle AMC + \angle BMC + \angle AMD + + \angle BMD > 2\pi$. *Лемма доказана.*

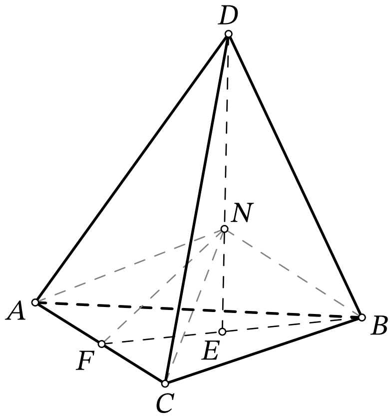

Рис. 1: к решению задачи 6

Согласно лемме $(\angle AMD + \angle BMC) + (\angle AMC + \angle BMD) > 2\pi$, тогда $\angle AMC + \angle BMD > \pi$ или $\angle AMD + \angle BMC > \pi$. Без ограничения общности будем считать, что выполняется первый случай.

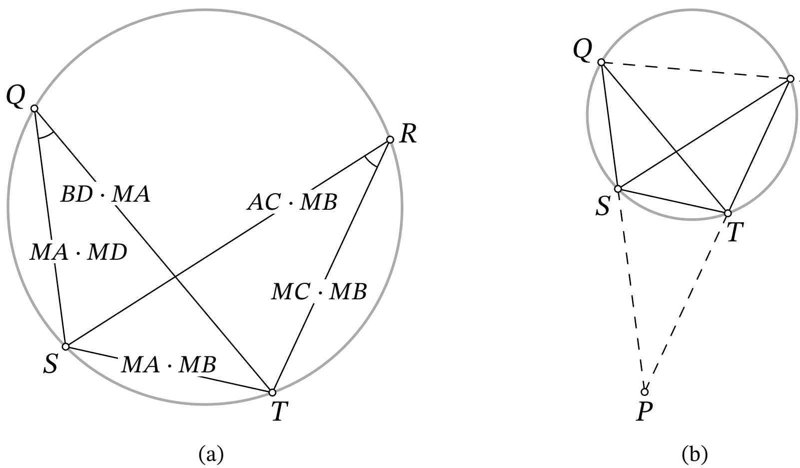

Рис. 2: к решению задачи 6

Длины сторон треугольников AMC и BMD умножим на BM и AM соответственно, и из полученных треугольников составим фигуру, показанную на рис. 2a. Так как $\angle SQT = = \angle MDB = \angle MCA = \angle TRS$, то точки S, Q, R и T лежат на одной окружности.

Имеем $\angle RTS + \angle QST = \angle AMC + \angle BMD > \pi$, следовательно, лучи QS и RT пересекаются в некоторой точке P, как на рис. 2b. Согласно теореме Птолемея имеем

$$QR \cdot MA \cdot MB + MA \cdot MD \cdot MC \cdot MB = AC \cdot MB \cdot BD \cdot MA\,,$$

следовательно,

$$QR + MC \cdot MD = AC \cdot BD\,. \tag{1}$$

Из подобия треугольников PQR и PTS следует

$$\frac{QR}{ST} = \sqrt{\frac{S(PQR)}{S(PST)}} > 1\,. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получим $AC \cdot BD > ST + MC \cdot MD = MA \cdot MB + MC \cdot MD$. □

Другое решение. После того, как мы сведем задачу к случаю $\angle AMC + \angle BMD > \pi$, мы можем закончить решение по-другому.

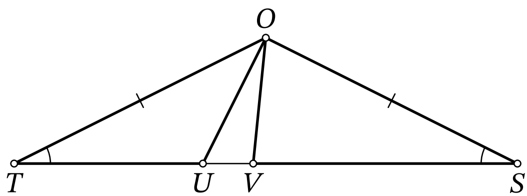

Рис. 3: к другому решению задачи 6

Построим треугольник OUV с $\angle OUV = \pi - \angle AMC$ и $\angle OVU = \pi - BMD$. На прямой UV найдутся такие точки T и S, что $\triangle TUO \sim \triangle CMA$ и $\triangle SVO \sim \triangle DMB$; при этом расположение точек будет таким, как показано на рис. 3.

Из равенства углов $\angle UTO = \angle VSO$ получаем, что треугольник TOS равнобедренный. Также

$$OT^2 = OU^2 + TU \cdot US \quad \text{и} \quad OT^2 = OV^2 + TV \cdot VS$$

(например, поскольку $-TU \cdot US$ — это степень точки U относительно окружности с центром в O и радиусом $OT = OS$; аналогично для V).

Без ограничения общности считаем $OV \leqslant OU$; тогда

$$OT \cdot OS = OT^2 = OU^2 + TU \cdot US > OU \cdot OV + TU \cdot VS\,,$$

что по подобию эквивалентно $AC \cdot BD > MA \cdot MB + MC \cdot MD$. □