6-я Олимпиада Мегаполисов

Математика

Решения. День 1

Задача 1. На доске написано целое положительное число. Раз в минуту Максим прибавляет к числу на доске какой-то его положительный делитель, записывает на доску результат и стирает прошлое число. При этом ему запрещено дважды подряд прибавлять одно и то же число. Докажите, что он может действовать так, чтобы на доске когда-нибудь оказался точный квадрат.

Первое решение. Пусть изначально на доске было написано число k. Будем считать, что $k \geqslant 2$ (в случае $k = 1$ на доске уже записан точный квадрат). Максим может выполнить следующую последовательность действий:

$$k \xrightarrow{k} 2k \xrightarrow{2k} 2 \cdot 2k \xrightarrow{2} 2 \cdot (2k+1) \xrightarrow{2k+1} 3 \cdot (2k+1) \xrightarrow{3}$$

$$3 \cdot (2k+2) \xrightarrow{2k+2} 4 \cdot (2k+2) \xrightarrow{4} 4 \cdot (2k+3) \xrightarrow{2k+3} \ldots$$

$$\ldots \xrightarrow{k^2-1} (k^2-2k+1)(k^2-1) \xrightarrow{k^2-2k+1} (k^2-2k+1) \cdot k^2\,,$$

где над каждой стрелкой указано прибавляемое число (очевидно, что любые два числа, прибавляемые подряд, различны). Осталось заметить, что $(k^2-2k+1)\cdot k^2 = \big(k(k-1)\big)^2$. $\square$

Второе решение. Пусть изначально на доске было написано число k. Докажем, что Максим может получить любое число, делящееся на 6 и большее $2k$. Из этого легко будет следовать утверждение задачи — например, можно получить $(6k)^2$.

Предположим, что мы в какой-то момент получили число вида $6n$. Покажем, как получить $6(n+1)$. Это можно сделать либо последовательностью

$$6n \xrightarrow{3} (6n+3) \xrightarrow{1} (6n+4) \xrightarrow{2} (6n+6)\,,$$

либо

$$6n \xrightarrow{2} (6n+2) \xrightarrow{1} (6n+3) \xrightarrow{3} (6n+6)$$

в зависимости от того, использовалось ли 2 или 3 для получения $6n$. Таким образом, осталось получить какое-то число, делящееся на 6. Рассмотрим случаи.

Если $k = 6m+3$, сделаем $(6m+3) \xrightarrow{3} (6m+6)$.

Если $k = 6m+4$, сделаем $(6m+4) \xrightarrow{2} (6m+6)$.

Если $k = 6m+5$, сделаем $(6m+5) \xrightarrow{1} (6m+6)$.

Если $k = 6m + 2$, сделаем $(6m + 2) \xrightarrow{1} (6m + 3) \xrightarrow{3} (6m + 6)$.

Если $k = 6m + 1$, то при $m = 0$ получаем точный квадрат $k = 1$, а в ином случае сделаем

$$(6m + 1) \xrightarrow{6m+1} (12m + 2) \xrightarrow{1} (12m + 3) \xrightarrow{3} (12m + 6)\,. \qquad \square$$

Третье решение. Пусть изначально на доске было записано число x. Пусть $x = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_k}$, где $a_1 > a_2 > \ldots > a_k \geqslant 0$. Докажем, что если у x в двоичной записи во втором разряде стоит 0 (то есть $a_2 < a_1 - 1$), то мы сможем получить число x^2.

Для этого на первом этапе проделаем операции

$$x \xrightarrow{x} 2x \xrightarrow{2x} 4x \xrightarrow{4x} \ldots \xrightarrow{2^{a_1-1}x} 2^{a_1}x\,.$$

На втором этапе проделаем операции

$$2^{a_1}x \xrightarrow{2^{a_2}x} 2^{a_1}x + 2^{a_2}x \xrightarrow{2^{a_3}x} \ldots \xrightarrow{2^{a_k}x} 2^{a_1}x + 2^{a_2}x + \ldots + 2^{a_k}x = x^2\,.$$

На первом этапе каждый раз прибавляется число вдвое больше, чем на предыдущем шаге, поэтому там прибавляемые подряд числа различны. На втором этапе прибавляются разные степени двойки, умноженные на x, поэтому там прибавляемые подряд числа тоже различны. На стыке этапов подряд прибавляются числа $2^{a_1-1}x$ и $2^{a_2}x$, и они тоже различны, поскольку $a_2 < a_1 - 1$.

Осталось разобраться со случаем, когда у x во втором разряде в двоичной записи стоит 1 (то есть $a_2 = a_1 - 1$). Заметим, что нам достаточно получить из x любое число с 0 во втором разряде и повторить далее предыдущий алгоритм (дважды подряд одинаковые числа прибавляться не будут, так как первый шаг описанного выше алгоритма — это удвоение числа). Для этого получим число $12x$ как

$$x \xrightarrow{x} 2x \xrightarrow{2x} 4x \xrightarrow{x} 5x \xrightarrow{5x} 10x \xrightarrow{2x} 12x\,.$$

Проверим, что у $12x$ во втором разряде в двоичной записи будет 0. Действительно, при $x = 2^{a_1} + 2^{a_1-1} + S$, где $0 \leqslant S < 2^{a_1-1}$, имеем

$$\begin{aligned} 2^{a_1+4} = 12 \cdot 2^{a_1} + 8 \cdot 2^{a_1-1} < 12x = 12 \cdot (3 \cdot 2^{a_1-1} + S) = 36 \cdot 2^{a_1-1} + 12 \cdot S < \\ < 36 \cdot 2^{a_1-1} + 12 \cdot 2^{a_1-1} = 2^{a_1+4} + 2^{a_1+3}\,, \end{aligned}$$

что и означает, что у числа $12x$ во втором разряде в двоичной записи стоит 0. $\square$

Четвёртое решение. Пусть Максим на каждом шаге будет увеличивать степень вхождения 2 в разложение числа на доске на простые множители. А именно, к числу $x = 2^k \cdot a$, где a — нечётное, Максим будет прибавлять его делитель 2^k. Тогда

$$x + 2^k = 2^k(a + 1) = 2^{k+s} \cdot \frac{a+1}{2^s}\,,$$

где число $\frac{a+1}{2^s}$ нечётно. Заметим, что $s \geqslant 1$, поэтому $\frac{a+1}{2^s} < a$, если $a > 1$. Таким образом, наибольший нечётный делитель числа на доске будет всегда уменьшаться, пока не станет равным 1, то есть рано или поздно число на доске станет некоторой степенью двойки, числом вида 2^n. Если n чётно, то Максим добился требуемого. Если же n нечётно, Максим может прибавить к этому числу 2^n, после чего получится точный квадрат.

В ходе этого алгоритма каждый раз прибавляются разные числа, так как максимальная степень 2, на которую делится число на доске, увеличивается. □

Задача 2. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что P лежит между B и Q. Лучи AP и AQ делят угол BAC на три равные части. Оказалось, что треугольник APQ является остроугольным. Обозначим через B_1, P_1, Q_1, C_1 проекции точек B, P, Q, C на прямые AP, AQ, AP, AQ соответственно. Докажите, что прямые B_1P_1 и C_1Q_1 пересекаются на прямой BC.

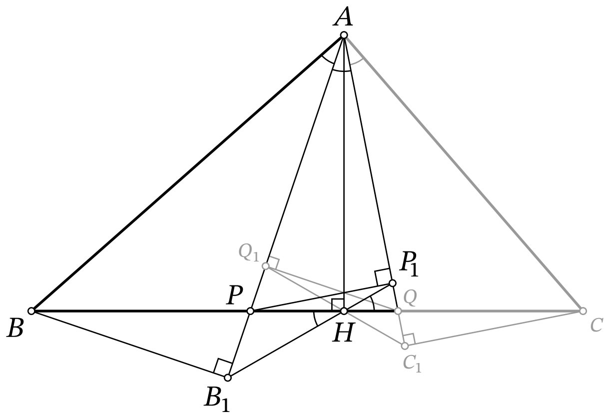

Рис. 1: for the solution of problem 2

Решение. Проведём высоту AH в треугольнике ABC (рис. 1). Точки A, B, B_1, H лежат на окружности с диаметром AB, а точки A, P, P_1, H лежат на окружности с диаметром AP. Следовательно,

$$\angle BHB_1 = \angle BAB_1 = \angle PAP_1 = \angle QHP_1,$$

то есть прямые HB_1 и HP_1 совпадают, откуда точки B_1, H, P_1 лежат на одной прямой. Аналогично точки C_1, H, P_1 лежат на одной прямой. □

Другое решение. Обозначим через X и Y точки пересечения прямых B_1P_1 и C_1Q_1 с прямой BC соответственно. По теореме Менелая

$$\frac{PX}{XQ} \cdot \frac{QP_1}{P_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1P} = 1 \qquad \text{и} \qquad \frac{QY}{YP} \cdot \frac{PQ_1}{Q_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1Q} = 1\,.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$\frac{XQ}{PX} \cdot \frac{YP}{QY} = \frac{QP_1}{P_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1P} \cdot \frac{PQ_1}{Q_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1Q} = \left(\frac{QP_1}{C_1Q} \cdot \frac{AC_1}{P_1A}\right) \cdot \left(\frac{PQ_1}{B_1P} \cdot \frac{AB_1}{Q_1A}\right). \qquad (*)$$

Заметим, что $QP_1 : C_1Q = QP : CQ = AP : AC = P_1A : AC_1$ и $PQ_1 : B_1P = PQ : BP = AQ : AB = Q_1A : AB_1$. Следовательно, правая часть равенства (*) равна 1. Таким образом, $QX : XP = QY : YP$, то есть точки X и Y совпадают. $\square$

Задача 3. Даны неотрицательные действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geqslant 2$), сумма которых равна $\frac{n}{2}$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ обозначим

$$b_i = a_i + a_i a_{i+1} + a_i a_{i+1} a_{i+2} + \dots + a_i a_{i+1} \dots a_{i+n-2} + 2a_i a_{i+1} \dots a_{i+n-1}\,,$$

где $a_{j+n} = a_j$ для всех j. Докажите, что $b_i \geqslant 1$ хотя бы для одного индекса i.

Первое решение. Все индексы в решении рассматриваются по модулю n.

Лемма. Найдётся индекс i такой, что если обозначить $x_1 = a_{i+1}$, $x_2 = a_{i+2}$ и т. д., то

$$x_1 + x_2 + \dots + x_j \geqslant \frac{j}{2} \quad \text{для каждого } j = 1, 2, \dots, n\,. \qquad (\spadesuit)$$

Доказательство леммы. Выберем i так, чтобы величина $a_1 + a_2 + \dots + a_i - \frac{i}{2}$ была наименьшей возможной (так как $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}$, то такие величины будут одинаковыми для i и $i + n$). Тогда для любого j имеем

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \dots a_{i+j} = \frac{j}{2} + \left(a_1 + a_2 + \dots + a_{i+j} - \frac{i+j}{2}\right) - \left(a_1 + a_2 + \dots + a_i - \frac{i}{2}\right) \geqslant \frac{j}{2}\,.$$

Лемма доказана.

Обозначив x_j в соответствии с леммой, докажем индукцией по k, что если ($\spadesuit$) выполнено для $j \leqslant k$, то

$$x_1 + x_1x_2 + \dots + x_1x_2 \cdots x_{k-1} + 2x_1x_2 \cdots x_k \geqslant 1\,. \qquad (\heartsuit)$$

При $k = n$ это даст искомое $b_{i+1} \geqslant 1$.

Для $k = 1$ неравенство $2x_1 \geqslant 1$ очевидно; предположим, что ($\heartsuit$) выполнено для $k - 1$, где $k > 1$. Шаг индукции будет следовать из ($\heartsuit$), примененного к $k - 1$ числу x_1, …, x_{k-2}, $\frac{1}{2}x_{k-1} + x_{k-1}x_k$, так что достаточно проверить, что эта последовательность удовлетворяет условиям ($\spadesuit$).

Обозначим $x_1 + \dots + x_{k-2} = \frac{k-1}{2} - s$, где $s \leqslant \frac{1}{2}$; нам нужно доказать, что $\frac{1}{2}x_{k-1} + x_{k-1}x_k \geqslant s$. При $s \leqslant 0$ или $x_{k-1} > 1$ это очевидно, так что разберем случай $0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}$ и $0 \leqslant x_{k-1} \leqslant 1$. Так как мы знаем $x_{k-1} \geqslant s$ и $x_{k-1} + x_k \geqslant s + \frac{1}{2}$ из условий ($\spadesuit$) для $j = k - 1$ и k, то

$$\tfrac{1}{2}x_{k-1} + x_{k-1}x_k = x_{k-1}(x_{k-1} + x_k - \tfrac{1}{2}) + (1 - x_{k-1})x_{k-1} \geqslant x_{k-1}s + (1 - x_{k-1})s = s\,,$$

что и требовалось. $\square$

Второе решение. Предположим, что $b_i < 1$ для всех i. Тогда и $a_i \leqslant b_i < 1$ для всех i.

Обозначим $A = a_1 a_2 \dots a_n$. Имеем

$$b_{i-1} = a_{i-1} + a_{i-1} b_i + A - 2A a_{i-1}$$

(все индексы рассматриваются по модулю n). Суммируя это для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и подставляя $\sum_i a_i = \frac{n}{2}$, получаем

$$\sum_i b_i = \frac{n}{2} + \sum_i b_i a_{i-1} + nA - nA \quad \Rightarrow$$
$$\frac{n}{2} = \sum_i b_i (1 - a_{i-1}) < \sum_i (1 - a_{i-1}) = \frac{n}{2},$$

противоречие. $\square$