5-я Олимпиада Мегаполисов

Математика

Решения. День 2

Задача 4. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 = b^2 + bc$ и $b^2 = c^2 + ac$. Докажите, что $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. *(Vladimir Bragin)*

Решение. Перепишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} a^2 = (b+c)b\,; \\ (b+c)(b-c) = ac\,. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на b, получаем

$$\begin{cases} a^2 = (b+c)b\,; \\ b(b+c)(b-c) = bac\,. \end{cases}$$

Заменяя $b(b+c)$ на a^2 во втором уравнении, приходим к $a^2(b-c) = abc$.

Теперь осталось разделить обе части на a^2bc и получить $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$. □

Другое решение. Если обозначить $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$, условие перепишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{yz}\,; \\ \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{xz}\,; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y^2z = x^2z + x^2y\,; \\ xz^2 = xy^2 + y^2z\,. \end{cases}$$

Перенося все слагаемые в правую часть и складывая два уравнения, получаем

$$\begin{gathered} 0 = (x^2z + x^2y - y^2z) + (xy^2 + y^2z - xz^2) \quad \Rightarrow \\ 0 = x(xy + xz + y^2 - z^2) \quad \Rightarrow \\ 0 = x(y+z)(x+y-z)\,. \end{gathered}$$

В последнем произведении множители x и $y + z$ положительны, поэтому $x + y - z = 0$, откуда

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = x + y = z = \frac{1}{c}\,.$$ □

Решение в одну строку.

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \cdot abc(b+c) = a(c^2 + ac - b^2) + c(b^2 + bc - a^2) = 0\,.$$ □

Замечание. Нетрудно понять, что $b + c > a > b > c$. Если построить треугольник ABC со сторонами $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, то уравнения, данные в условии задачи, окажутся эквивалентны $\angle A = 2\angle B$ и $\angle B = 2\angle C$ соответственно. Отсюда получаем $a : b : c = \sin(\frac{4\pi}{7}) : \sin(\frac{2\pi}{7}) : \sin(\frac{\pi}{7})$, что даёт ещё один способ доказать искомое равенство.

Задача 5. В пустой таблице 2^{100} строк и 100 столбцов. Алиса и Ева по очереди заполняют пустые клетки первой строки таблицы; Алиса ходит первой. Каждым ходом Алиса выбирает пустую клетку и ставит в неё крестик, а Ева каждым ходом выбирает пустую клетку и ставит нолик. После того, как в первой строке не остаётся пустых клеток, игроки переходят ко второй строке, и так далее (в каждой новой строке Алиса ходит первой).

Игра заканчивается, когда все строки заполнятся. Алиса хочет, чтобы различных строк в таблице было как можно больше, а Ева — как можно меньше. Сколько различных строк будет в таблице, если обе будут действовать наилучшим для себя образом?

(Denis Afrizonov)

Ответ: 2^{50}.

Решение. Сначала докажем, что Ева может добиться того, чтобы различных строк было не больше 2^{50}. Пусть она разобьёт каждую строку на 50 прямоугольников 1×2 (доминошек). Каждый раз, когда Алиса ставит крестик в одну из клеток какой-то доминошки, Ева будет ставить нолик в другую клетку этой доминошки. Тогда в любой строке каждая доминошка разбиения может быть только одного из двух типов (крестик-нолик или нолик-крестик), поэтому различных вариантов строк не более 2^{50}.

Теперь докажем, что Алиса может получить не менее 2^{50} различных строк. Для этого достаточно показать, что пока заполнено менее чем 2^{50} строк, при заполнении следующей строки Алиса может действовать так, чтобы эта строка получилась отличной от всех предыдущих.

Рассмотрим очередную («новую») строку, которую заполняют игроки. Назовём *токсичными* те строки из всех ранее заполненных, которые совпадают с новой по уже проставленным в ней символам. (Таким образом, до первого хода Алисы в новой строке токсичными будут все ранее заполненные строки.) Докажем, что каждым своим ходом Алиса может уменьшать количество токсичных строк в два раза. Если изначально это количество было меньше 2^{50}, то в конце оно окажется меньше 1, то есть новая строка не будет совпадать ни с одной из предыдущих.

Пусть Алиса и Ева сделали по i ходов в новой строке. Обозначим текущее соличество токсичных строк за T. Каждая из них совпадает с новой строкой по i крестикам; значит, $50-i$ крестиков в токсичной строке расположены над пустыми клетками новой строки. Тогда всего в токсичных строках над этими пустыми клетками ровно $(50-i)T$ крестиков. Самих пустых клеток при этом $100-2i$; по принципу Дирихле найдется такая пустая клетка, над которой не более $\frac{1}{2}T$ крестиков. В неё Алисе и следует поставить крестик своим $(i + 1)$-м ходом. $\square$

Задача 6. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 — точки пересечения пар диагоналей BD и CE, CE и DA, DA и EB, EB и AC, AC и BD соответственно. Докажите, что если четыре из пяти четырехугольников AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E, EA_1E_1A вписанные, то и пятый тоже вписанный. *(Nairi Sedrakyan, Yuliy Tikhonov)*

Решение 1. Пусть четырехугольники AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E вписанные. Тогда $\angle ABD = \angle AB_1E = \angle EBC$, следовательно, $\angle ABE = \angle CBD$. Аналогично получаем, что $\angle BCA = \angle DCE$ и $\angle CDB = \angle EDA$.

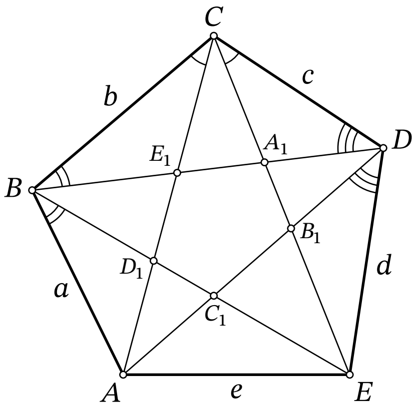

Рис. 1: к решению 1 задачи 6

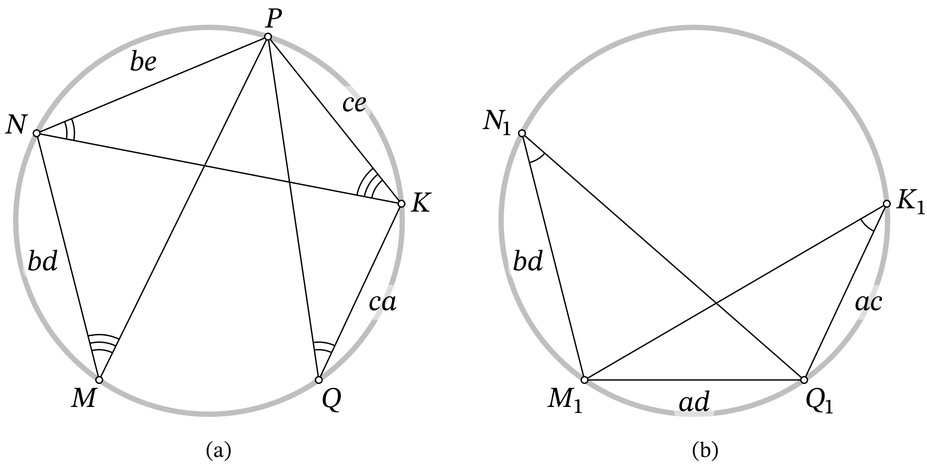

Рис. 2: к решению 1 задачи 6

Обозначим длины сторон пятиугольника за a, b, c, d, e как показано на рис. 1. Длины сторон треугольников AED, BCD, BAE умножим на b, e, c соответственно; из полученных треугольников составим фигуру, показанную на рис. 2a. Имеем $\angle NMP = \angle EDA = \angle CDB = \angle PKN$, следовательно, точки M, N, P, K лежат на одной окружности. Аналогично получаем, что точки N, P, K, Q лежат на одной окружности. Значит, все пять точек M, N, P, K, Q лежат на одной окружности.

Теперь длины сторон треугольников ABC и ECD умножим на d и a соответственно. Из полученных треугольников составим фигуру, показанную на рис. 2b. Ясно, что точки K_1, Q_1, M_1, N_1 тоже лежат на одной окружности.

Достаточно доказать равенство дуг MN и M_1N_1, так как в этом случае $\angle BAC = \angle M_1Q_1N_1 = \angle MPN = \angle DAE$, откуда $\angle EAC = \angle BAD = \angle BA_1C$, то есть четырёхгольник AE_1A_1E вписан.

Заметим, что $\angle BAD + \angle DEB = \angle BA_1C + \angle DE_1C = \pi - \angle ACE = \angle CAE + \angle AEC$, следовательно, $\angle BAC + \angle CED = \angle DAE + \angle BEA < \pi$. Имеем $\angle MPN + \angle QPK = \angle DAE + \angle BEA = \angle BAC + \angle CED = \angle M_1Q_1N_1 + \angle K_1M_1Q_1$. Получаем, что $MN = M_1N_1$, $QK = Q_1K_1$ и $\overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{QK} = \overset{\frown}{M_1N_1} + \overset{\frown}{Q_1K_1} < 2\pi$.

Забудем про всю остальную конструкцию, кроме четырёх дуг, указанных в последнем равенстве. Сдвинем дугу QK вдоль окружности так, чтобы её середина стала диаметрально противоположна середине дуги MN; аналогично поступим с Q_1K_1. Тогда $MN \parallel QK$ и $M_1N_1 \parallel Q_1K_1$, и равнобедренные трапеции $MNKQ$ и $M_1N_1K_1Q_1$ равны по двум основаниям и углу между диагоналями (углы выражаются как полусумма дуг). Отсюда следует, что и в изначальной конструкции $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{M_1N_1}$. □

Замечание. Нетрудно доказать, что конструкции на рис. 2 на самом деле полностью совмещаются по соответствующим точкам. Например, для этого достаточно заметить, что $\angle MPQ = \angle BCD - \angle DAE - \angle AEB = \angle BCD - \angle BC_1A = \angle BCA = \angle M_1N_1Q_1$.

Решение 2. Как и предыдущем решении, предположим, что четырёхугольники AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E вписанные и отметим те же три пары равных углов. Обозначим эти углы за β, γ, δ (при вершинах B, C, D соответственно); кроме того, обозначим $\alpha = \angle BAC$, $\alpha_1 = \angle EAD$, $\varepsilon = \angle DEC$, $\varepsilon_1 = \angle BEA$ (рис. 3). Достаточно доказать, что $\alpha = \alpha_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_1$: тогда вписанность четырёхугольника AE_1A_1E будет следовать из $\angle EAC = \angle BAD = \angle BA_1C$.

Для этого, в свою очередь, достаточно установить, что

$$\alpha + \varepsilon = \alpha_1 + \varepsilon_1 < \pi \quad \text{и} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\varepsilon} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\varepsilon_1}.$$

Действительно, рассмотрев треугольники с парами углов α, ε и α_1, ε_1, нетрудно видеть, что при таком условии их третьи углы равны, как и отношения прилегающих к ним сторон, и нужные нам равенства углов следуют из подобия треугольников.

Как отмечено в предыдущем решении, $\alpha + \varepsilon = \alpha_1 + \varepsilon_1 < \pi$ следует из $\angle BAD + \angle DEB = \angle BA_1C + \angle DE_1C = \pi - \angle ACE = \angle CAE + \angle AEC$.

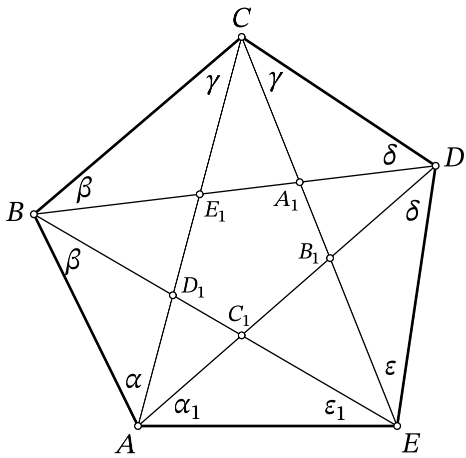

Рис. 3: к решению 2 задачи 6

А чтобы доказать равенство отношений синусов, мы перемножим пять теорем синусов:

$$1 = \frac{EA}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{DE}{EA} = \frac{\sin\beta}{\sin\varepsilon_1} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\delta} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\varepsilon_1} \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha}. \quad \square$$

Решение 3. Введём на плоскости произвольным образом комплексные координаты; векторы будем идентифицировать с комплексными числами.

Воспользуемся тем фактом, что четырехугольник AE_1A_1E вписан тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AE_1} \cdot \overrightarrow{A_1E}}{\overrightarrow{E_1A_1} \cdot \overrightarrow{EA}} \in \mathbb{R}.$$

Более того, векторы в этом условии можно заменять на коллинеарные им, действительность выражения от этого не изменится.

Обозначим $z_1 = \overrightarrow{AC}$, $z_2 = \overrightarrow{BD}$, $z_3 = \overrightarrow{CE}$, $z_4 = \overrightarrow{DA}$, $z_5 = \overrightarrow{EB}$. Тогда указанное условие можно переписать как

$$\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2(z_1 + z_3)} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_3}\right) z_2 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$(w_1 + w_3) \cdot \overline{w_2} \in \mathbb{R},$$

где $w_i = z_i^{-1}$. Вписанность остальных четырёхугольников, перечисленных в условии, будет эквивалентна аналогичным условиям, записанным с циклическим сдвигом индексов. (Далее в решении индексы рассматриваем по модулю 5.)

Но сумма всех пяти выражений, фигурирующих в этих условиях, всегда является действительным числом:

$$\sum_{k=1}^{5}(w_k + w_{k+2}) \cdot \overline{w_{k+1}} = \sum_{k=1}^{5}(w_k \cdot \overline{w_{k+1}} + w_{k+1} \cdot \overline{w_k}) \in \mathbb{R}\,,$$

что следует из $u \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot v \in \mathbb{R}$. Значит, если четыре слагаемых действительны, то и пятое тоже. □

Решение 4.[1] Как и в первых двух решениях, предположим, что четырехугольники AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E вписанные и отметим те же три пары равных углов. В частности, обозначим $\gamma = \angle BCA = \angle ECD$; знаки направленных углов выберем так, чтобы $\angle(EC, DC) = +\gamma$.

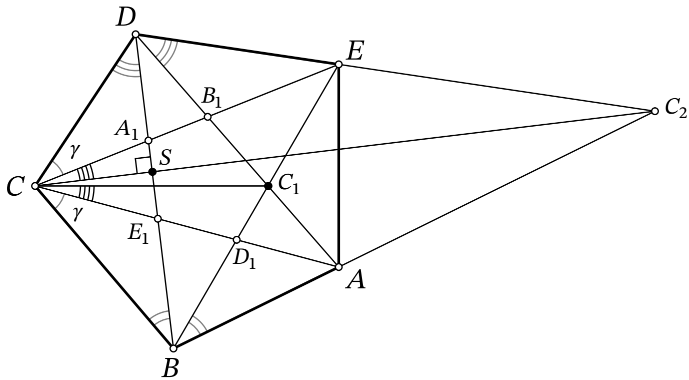

Рис. 4: к решению 4 задачи 6

Обозначим за C_2 точку пересечения прямых BA и DE (рис. 4). Заметим, что

$$\angle(DE, BA) = \angle(DA, BA) + \angle(DE, DA) = \angle(EC, DB) + \angle(DB, DC) = \angle(EC, DC) = \gamma \neq 0\,,$$

то есть эти прямые действительно пересекаются. Более того, пересекаются именно лучи BA и DE (а не AB и ED), так как иначе $\angle AC_2E = \pi - \gamma > \angle ACE$ привело бы к противоречию.

По лемме об изогоналях мы получаем, что CC_1 и CC_2 — изогонали относительно угла BCD. Обозначим за S точку пересечения прямых CC_2 и BD. Заметим, что точки C_1 и S лежат на изогоналях относительно каждого из углов ABC, BCD, CDE. Отсюда следует, что C_1 и S являются изогонально сопряженными точками относительно четырехугольника CBC_2D (это можно доказать, рассмотрев отражения C_1 относительно сторон этого четырехугольника и показав, что они лежат на окружности с центром S).

[1] на основе решений, найденных (независимо) участниками Boris Stanković и Mijail Guttierrez после соревнования

Но тогда $\angle CSB + \angle DSC_2 = \pi$ (известное свойство точек, у которых есть изогонально сопряженная относительно четырехугольника), что в данном случае означает $CC_2 \perp BD$.

Остается только посчитать углы:

$$\angle AA_1E = \angle ABB_1 = \angle ABE + \angle EBB_1 = \angle DBC + \angle C_1CB_1 = \angle DBC + \angle E_1CC_2 = \tfrac{\pi}{2} - \gamma\,,$$
$$\angle AE_1E = \angle D_1DE = \angle ADE + \angle D_1DA = \angle CDB + \angle D_1CC_1 = \angle CDB + \angle C_2CA_1 = \tfrac{\pi}{2} - \gamma\,. \quad \square$$