3-я Олимпиада Мегаполисов

День 1. Решения

Задача 1. Решите систему уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases}(x-1)(y-1)(z-1)=xyz-1\,,\\(x-2)(y-2)(z-2)=xyz-2\,.\end{cases}$$

(Vladimir Bragin)

Ответ: $x=1$, $y=1$, $z=1$.

Решение 1. Раскрыв скобки и сократив общие члены, мы получаем

$$\begin{cases}-(xy+yz+zx)+(x+y+z)=0\,,\\-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)=6\,.\end{cases}$$

Из первого уравнения заключаем $xy+yz+zx=x+y+z$. Подставляя это во второе уравнение, получаем $x+y+z=3$. Теперь осталось решить систему

$$\begin{cases}x+y+z=3\,,\\xy+yz+zx=3\,.\end{cases}\tag{1}$$

Возведя первое равенство в квадрат, получаем $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=9$. Отсюда извлекаем $x^2+y^2+z^2=3=xy+yz+zx$.

Докажем, что если $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$, то $x=y=z$:

$$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx \quad\Longleftrightarrow$$
$$2x^2+2y^2+2z^2=2xy+2yz+2zx \quad\Longleftrightarrow$$
$$x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+z^2+y^2-2yz+z^2=0 \quad\Longleftrightarrow$$
$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0\,.$$

Сумма трёх квадратов равна 0, поэтому они все нули, а значит $x=y=z$. Отсюда следует, что $x=y=z=1$. □

Решение 1'. Покажем, как ещё можно было решить систему (1). Из первого уравнения выразим $z=3-x-y$ и подставим во второе:

$$xy+(y+x)(3-x-y)=3 \quad\Longleftrightarrow$$
$$xy+3x+3y-2xy-x^2-y^2=3 \quad\Longleftrightarrow$$
$$x^2+y^2+xy-3x-3y+3=0 \quad\Longleftrightarrow$$
$$x^2+x(y-3)+y^2-3y+3=0\,.$$

Решим как квадратное уравнение относительно x:

$$\begin{aligned}x &= \frac{(3-y) \pm \sqrt{(y-3)^2 - 4(y^2-3y+3)}}{2} = \\ &= \frac{(3-y) \pm \sqrt{y^2-6y+9-4y^2+12y-12}}{2} = \\ &= \frac{(3-y) \pm \sqrt{-3y^2+6y-3}}{2} = \\ &= \frac{(3-y) \pm \sqrt{-3(y-1)^2}}{2}\,.\end{aligned}$$

Чтобы квадратный корень существовал, необходимо $y = 1$. Тогда из предыдущей строчки легко можно понять, что $x = 1$, а значит и $z = 1$. □

Решение 2. Сделаем замену: $u = x-1$, $v = y-1$, $w = z-1$. Тогда условие перепишется в виде

$$\begin{cases}(u+1)(v+1)(w+1) = uvw+1\,, \\ (u-1)(v-1)(w-1) = uvw-1\,,\end{cases}$$

(где второе уравнение на самом деле соответствует разности двух исходных).

После раскрытия всех скобок и сокращения общих членов получаем

$$\begin{cases}uv+uw+vw+u+v+w = 0\,, \\ -(uv+uw+vw)+u+v+w = 0\,.\end{cases}$$

Вычитая и складывая уравнения, находим $uv+uw+vu = 0$ и $u+v+w = 0$. Наконец, заметим, что

$$u^2+v^2+w^2 = (u+v+w)^2 - 2(uv+uw+vw) = 0-0 = 0\,,$$

откуда следует $u = v = w = 0$, и, соответственно, $x = y = z = 1$. □

Решение 3. Рассмотрим многочлен $f(t) = (t-x)(t-y)(t-z)$ с корнями x, y, z. Перепишем условие в виде

$$\begin{cases}-f(1) = -f(0)-1\,, \\ -f(2) = -f(0)-2\,.\end{cases}$$

Теперь рассмотрим многочлен $g(t) = f(t) - f(0) - t$. Заметим, что его старший коэффициент равен 1, а числа 0, 1 и 2 являются его корнями. Поэтому $g(t) = t(t-1)(t-2)$, то есть

$$\begin{aligned}f(t) &= g(t)+t+f(0) = t(t-1)(t-2)+t+f(0) = \\ &= t(t^2-3t+3)+f(0) = t^3-3t^2+3t-1+f(0)+1 = (t-1)^3+f(0)+1\,.\end{aligned}$$

Заметим, что многочлен $(t-1)^3+f(0)+1$ — возрастающая функция, поэтому три корня у него могут быть, только если они равны. Предположим, они равны c. Тогда c является и корнем производной $f'(t)=3(t-1)^2$, а её корни равны 1. Значит, $x=y=z=1$. $\square$

Задача 2. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Пусть PQ — диаметр ω, перпендикулярный AC. Известно, что прямые BP и DQ пересекаются в точке X, а прямые BQ и DP — в точке Y. Докажите, что точки X и Y лежат на прямой AC. *(Géza Kós)*

Решение. Точки P и Q входят в условие симметрично, поэтому без ограничения общности можно считать, что точка P лежит внутри треугольника ACD, а точка Q — внутри треугольника ABC.

Часть 1. Обозначим вписанные окружности треугольников ABC и ACD через ω_1 и ω_2, а их точки касания с диагональю AC — через X_1 и X_2 соответственно. Мы покажем, что прямая BP проходит через точку X_1, прямая DQ проходит через точку X_2, и что точки X_1 и X_2 совпадают. Из этого будет следовать, что $X_1=X_2=X$, то есть что точка X лежит на AC (рис. 1).

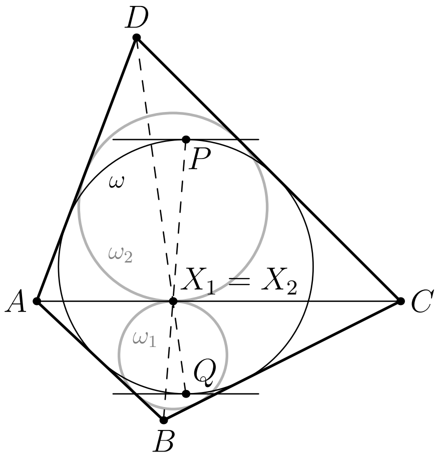

Рис. 1: к решению задачи 2.

Известно, что длины отрезков касательных AX_1 и AX_2 могут быть выражены через стороны треугольников следующим образом:

$$AX_1=\frac{1}{2}(AB+AC-BC) \quad \text{и} \quad AX_2=\frac{1}{2}(AC+AD-CD).$$

Из описанности четырёхугольника $ABCD$ имеем равенство $AB+CD=BC+AD$, откуда

$$AX_1-AX_2=\frac{1}{2}(AB-BC-AD+CD)=0, ,$$

поэтому $X_1 = X_2$.

Поскольку BA и BC являются общими внешними касательными к ω и ω_1, эти окружности гомотетичны с центром в точке B. Касательные к ω в точке X_1 и к ω_1 в точке P параллельны, поэтому эта гомотетия переводит точку P в точку X_1. Значит, точки B, P, X_1 лежат на одной прямой.

Аналогично из гомотетичности окружностей ω и ω_2 точки D, Q, X_2 лежат на одной прямой.

Часть 2. Обозначим через γ_1 и γ_2 вневписанные окружности треугольников ABC и ACD, лежащие напротив вершин B и D соответственно, а их точки касания с диагональю AC — через Y_1 и Y_2 соответственно. Аналогично первой части, мы покажем, что прямая BQ проходит через точку Y_1, прямая DP проходит через точку Y_2, и что точки Y_1 и Y_2 совпадают (рис. 2).

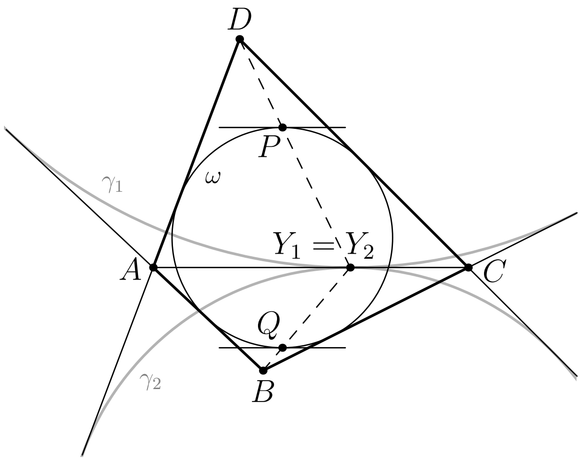

Рис. 2: for the solution of the problem 2.

Длины отрезков касательных AY_1 и AY_2 могут быть выражены через стороны треугольников следующим образом:

$$CY_1 = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) \quad \text{и} \quad CY_2 = \frac{1}{2}(AC + AD - CD)\,,$$

откуда из равенства $AB + CD = BC + AD$ получаем, что $CY_1 = CY_2$ и $Y_1 = Y_2$.

Окружности ω и γ_1 гомотетичны с центром в точке B. Касательные к ω в точке Q и к γ_1 в точке X_1 параллельны, поэтому эта гомотетия переводит точку Q в точку Y_1. Таким образом, точки B, Q, Y_1 лежат на одной прямой.

Аналогично из гомотетичности окружностей ω и ω_2 точки D, P, Y_2 лежат на одной прямой. $\square$

Задача 3. Пусть k — такое натуральное число, что $p = 8k+5$ — простое число. Целые числа $r_1, r_2, \ldots, r_{2k+1}$ таковы, что числа $0, r_1^4, r_2^4, \ldots, r_{2k+1}^4$ дают попарно различные остатки при делении на p. Докажите, что произведение

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2k+1} (r_i^4 + r_j^4)$$

сравнимо с $(-1)^{k(k+1)/2}$ по модулю p.

(Два целых числа сравнимы по модулю p, если их разность делится на p.)

(Fedor Petrov)

Решение 1. Воспользуемся существованием первообразного корня g по модулю p, то есть такого целого числа, что числа $1, g, g^2, \ldots, g^{p-2}$ дают все различные ненулевые остатки по модулю p. Две степени g, скажем g^m и g^k, сравнимы по модулю p тогда и только тогда, когда m и k сравнимы по модулю $p-1$ («тогда» в силу малой теоремы Ферма, а «только тогда» — поскольку g является первообразным корнем).

Четвёртые степени дают в точности $2k+1$ ненулевых остатков по модулю p, а именно, это остатки чисел $1, g^4, g^8, \ldots, g^{8k}$. Поэтому числа $r_1^4, \ldots, r_{2k+1}^4$ сравнимы с ними по модулю p (в каком-то порядке).

Определим отображение $f(j)\colon \{0, 1, \ldots, 2k\} \to \{0, 1, \ldots, 2k\}$ как остаток $2j$ по модулю $2k+1$. Заметим, что $8j$ и $4f(j)$ сравнимы по модулю $p-1 = 4(2k+1)$, поэтому $g^{8j} \equiv g^{4f(j)} \pmod p$ при всех $j = 0, 1, \ldots, 2k$.

Имеем

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2k+1} (r_j^4 + r_i^4) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2k+1} \frac{r_j^8 - r_i^8}{r_j^4 - r_i^4} \equiv$$

$$\equiv \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant 2k} \frac{g^{8j} - g^{8i}}{g^{4j} - g^{4i}} \equiv \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant 2k} \frac{g^{4f(j)} - g^{4f(i)}}{g^{4j} - g^{4i}} \pmod p\,.$$

Можно записать $g^{4f(j)} - g^{4f(i)} = \pm(g^{4\max(f(j),f(i))} - g^{4\min(f(j),f(i))})$, где знак положителен при $f(j) > f(i)$ и отрицателен при $f(j) < f(i)$. Далее, когда упорядоченная пара (i, j) пробегает множество всех $k(2k+1)$ упорядоченных пар, для которых $0 \leqslant i < j \leqslant 2k$, упорядоченная пара $\big(\min(f(j), f(i)), \max(f(j), f(i))\big)$ пробегает то же множество. Поэтому разности сокращаются и произведение отношений $\prod \frac{g^{4f(j)} - g^{4f(i)}}{g^{4j} - g^{4i}}$ оказывается равно $(-1)^N$, где N — количество пар $i < j$, для которых $f(i) > f(j)$. Это происходит при $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = k+1, \ldots, k+i$, так что $N = 1 + \ldots + k = k(k+1)/2$. Утверждение доказано. $\square$

Решение 2. Обозначим $t_i = r_i^4$. Заметим, что множество $T := \{t_1, \ldots, t_{2k+1}\}$ — это все различные корни многочлена $x^{2k+1} - 1$ в поле вычетов по модулю p. Перенумеруем элементы T так, чтобы $t_{k+1} = 1$ и $t_i = 1/t_{2k+2-i}$ при $i = 1, 2, \ldots, k$.

Отображение $t \mapsto t^2$ — биекция множества T, обратное к нему отображение — это $s \mapsto s^{k+1}$, которое мы естественным образом обозначим как $\sqrt{s}$. Для различных $t, s \in T$ выполнено равенство $t + s = \sqrt{st}(\sqrt{s/t} + \sqrt{t/s})$. В следующей формуле $\prod$ обозначает произведение по всем $k(2k+1)$ парам различных $t, s \in T$. Тогда получаем

$$\prod(t+s) = \prod \sqrt{st} \cdot \prod(\sqrt{s/t} + \sqrt{t/s}) = \left(\prod_{t \in T} t\right)^k \cdot \left(\prod_{i=1}^{k}(t_i + 1/t_i)\right)^{2k+1} .$$

Из теоремы Виета для многочлена $x^{2k+1} - 1 = \prod_{t \in T}(x - t)$ следует, что первый множитель равен 1. Перейдём ко второму множителю; заметим, что существует многочлен $\psi(x)$ с целыми коэффициентами, для которого

$$\psi\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + x^{k-1} + \ldots + 1 + \ldots + x^{-k} .$$

Старший коэффициент ψ, очевидно, равен 1. Свободный член можно вычислить, подставляя мнимую единицу $x = \mathrm{i}$; свободный член равен

$$\psi(0) = \psi\left(\mathrm{i} + \frac{1}{\mathrm{i}}\right) = \sum_{j=-k}^{k} \mathrm{i}^j = \begin{cases} 1 & \text{при } k \equiv 0, 1 \pmod 4 , \\ -1 & \text{при } k \equiv 2, 3 \pmod 4 . \end{cases}$$

В поле вычетов по модулю p корнями ψ являются остатки $t_i + 1/t_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ (эти остатки различны). Произведение корней многочлена равно

$$\prod_{i=1}^{k}(t_i + 1/t_i) = (-1)^k \cdot \psi(0) = \begin{cases} 1 & \text{при } k \equiv 0, 3 \pmod 4 , \\ -1 & \text{при } k \equiv 1, 2 \pmod 4 . \end{cases}$$

И мы, наконец, получаем

$$\prod(t+s) = \begin{cases} 1 & \text{при } k \equiv 0, 3 \pmod 4 , \\ -1 & \text{при } k \equiv 1, 2 \pmod 4 . \end{cases}$$ □